V. G. Kadyshevskii, A note on mass formulas in the theory of unitary symmetry,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1967, Volume 172, Number 1, 73–75

https://www.mathnet.ru/eng/dan32799

Доклады Академии наук СССР
1967. Том 172, № 1

УДК 539.121.23 ФИЗИКА

В. Г. КАДЫШЕВСКИЙ

ЗАМЕЧАНИЕ О МАССОВЫХ ФОРМУЛАХ В ТЕОРИИ УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 10 III 1966)

Известно, что для получения массовых формул в $SU(3)$-схеме достаточно к инвариантному массовому оператору добавить возмущение с подходящими тензорными свойствами. В частности, формула Гелл-Манна — Окубо ([1])*

$$(\Xi + N) / 2 = (3\Lambda + \Sigma) / 4 \tag{1}$$

возникает в том случае, если указанное возмущение преобразуется как (33)-компонента октета.

Аналогом (1) для масс кварков p, n, λ является соотношение

$$p = n \neq \lambda. \tag{2}$$

Цель настоящей заметки — дать вывод формул типа (1), не опираясь на конкретные выражения для массового оператора, связанные с теорией возмущений. Для нас будет существенным лишь то, что этот оператор диагонален по изотопическому спину I и гиперзаряду Y.

Введем в рассмотрение «вращающийся» триплет кварков

$$q' = \begin{pmatrix} p' \\ n' \\ \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ n\cos\theta + \lambda\sin\theta \\ -n\sin\theta + \lambda\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Преобразование (3) принадлежит группе $SU(3)$, и поэтому в штрихованной системе координат компоненты мультиплетов характеризуются тем же набором квантовых чисел, что и в первоначальной системе. При этом, очевидно,

$$Q' = Q,\ U'(U'+1) = U(U+1), \tag{4}$$

где Q — электрический заряд; $U(U+1)$ — инвариант группы U-спина, действующей в подпространстве (n, λ). Ясно, что кваркам n' и λ' нельзя приписать определенной массы. Однако можно рассматривать средние значения массы в этих состояниях, полагая **

$$\bar{m}(n') = n\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta; \quad \bar{m}(\lambda') = n\sin^2\theta + \lambda\cos^2\theta. \tag{5}$$

В системе координат, отвечающей $\theta = \pi / 4$, будем иметь

$$\bar{m}(n') = \bar{m}(\lambda') = (n + \lambda) / 2. \tag{6}$$

Поскольку n'- и λ'-кварки образуют дублет по U'-спину, то равенство (5) означает, что средняя масса и U'-спин коммутируют между собой. Естественно предположить, что и в высших мультиплетах $SU(3)$, построенных из q'-кварков, средние массы состояний, принадлежащих одному

---

* Ниже массы частиц обозначаются теми же символами, что и сами частицы.

** Для выполнения равенств (5) и подобных им соотношений в других мультиплетах существенно предположение о диагональности оператора массы по I и Y. Действительно,

$$\bar{m}(n') = \langle n\cos\theta + \lambda\sin\theta \mid m \mid n\cos\theta + \lambda\sin\theta\rangle = n\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta,$$

если $\langle\lambda \mid m \mid n\rangle = \langle n \mid m \mid \lambda\rangle = 0$.

U'-мультиплету, являются одинаковыми, Тогда между массами реальных частиц, входящих в одни и те же U'-мультиплеты, должны существовать определенные соотношения. Ниже на примере октета барионов $1/2^+$ и декуплета барионных резонансов $3/2^+$ мы покажем, что эти соотношения эквивалентны обычным массовым формулам.

Нетрудно убедиться, что после преобразования (3) с $\theta = \pi / 4$ октет барионов принимает вид

$$\|B'^{a}_{b}\| = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \frac{\Sigma^+ - p}{\sqrt{2}} & \frac{\Sigma^+ + p}{\sqrt{2}} \\ \frac{\Sigma^- - \Xi^-}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda\right) - \frac{1}{2}(n + \Xi^0) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Lambda - \frac{\Sigma^0}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(n - \Xi^0) \\ \frac{\Sigma^- + \Xi^-}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Lambda - \frac{\Sigma^0}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(n - \Xi^0) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda\right) + \frac{1}{2}(n + \Xi_0) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Теперь из (7) выделим U'-мультиплеты:

$$\frac{1}{2}(\Lambda + \sqrt{3}\,\Sigma^0) \equiv S^0 \qquad (U' = 0);$$

$$\left(\frac{\Sigma^+ - p}{\sqrt{2}}, \frac{\Sigma^+ + p}{\sqrt{2}}\right) \equiv D^+, \qquad \left(\frac{\Sigma^- - \Xi^-}{\sqrt{2}}, \frac{\Sigma^- + \Xi^-}{\sqrt{2}}\right) \equiv D^- \qquad \left(U' = \frac{1}{2}\right);$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Lambda - \frac{\Sigma^0}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(n - \Xi^0), -\frac{n + \Xi^0}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Lambda - \right. \tag{8}$$
$$\left. - \frac{\Sigma}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(n - \Xi^0)\right) \equiv (T^0_1, T^0_0, T^0_{-1}) = T^0 \qquad (U' = 1).$$

Ясно, что в дублетах D^+ и D^- средняя масса в состояниях с разными значениями U_3 одинакова, причем

$$\bar{m}(D^+) = (\Sigma^+ + p) / 2, \qquad \bar{m}(D^-) = (\Xi^- + \Sigma^-) / 2. \tag{9}$$

В триплете T^0, очевидно, равны средние массы первой и третьей компонент:

$$\bar{m}(T_1{}^0) = \bar{m}(T_{-1}{}^0) = {}^3/_8\Lambda + \Sigma^0 / 8 + (n + \Xi^0) / 4. \tag{10}$$

Из условия

$$\bar{m}(T_1{}^0) = \bar{m}(T_{-1}{}^0) = \bar{m}(T_0{}^0) \tag{11}$$

находим

$$(n + \Xi^0) / 2 = (3\Lambda + \Sigma^0) / 4, \tag{12}$$

что совпадает с формулой (1) для нейтральных барионов *.

Таким образом, формула Гелл-Манна — Окубо для масс барионов нами получена без использования какого-либо приближенного выражения для массового оператора и, в частности, без предположения об его октетной природе. Однако при выводе соотношения (12) мы игнорировали перенормировку волновых функций барионов, полагая, что коэффициенты, с которыми эти функции входят в октет $B_b{}^a$, остаются неизменными после включения взаимодействия. Очевидно, такое приближение соответствует первому порядку теории возмущений.

Сравнивая данную схему с обычным подходом, заключаем, что средние массы U'-мультиплетов, на которые распадается октет в выбранной системе координат, также должны быть связаны формулой типа (1):

$$[\bar{m}(D^+) + \bar{m}(D^-)] / 2 = [3\bar{m}(S^0) + \bar{m}(T^0)] / 4, \tag{13}$$

откуда, с учетом (8), (9), (10), (12), находим:

$$\frac{\Sigma^+ + p + \Xi^- + \Sigma^-}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{\Lambda + 3\Sigma^0}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{n + \Xi^0}{2}\right). \tag{14}$$

---

* Согласно ([2]), соотношение Гелл-Манна — Окубо необходимо применять именно в форме (12).

Это соотношение * хорошо согласуется с экспериментом (левая часть равна 1161,4 $\pm$ 0,1 Мэв, правая часть 1161,5 $\pm$ 0,2 Мэв).

Заметим, что если на основании (12) в формуле (14) произвести замену $(n + \Xi^0)/2 \rightarrow {}^1/_3[n + \Xi^0 + (3\Lambda + \Sigma^0)/4]$, то в результате возникает соотношение

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma^+ + p}{2} + \frac{\Xi^- + \Sigma^-}{2}\right] = \frac{1}{4}\left[3\left(\frac{\Lambda + 3\Sigma^0}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(n + \Xi^0 + \frac{3\Lambda + \Sigma^0}{4}\right)\right], \qquad (15)$$

которое можно интерпретировать как формулу Гелл-Манна — Окубо для центров тяжести обычных U-мультиплетов (при этом «массы» смешанных состояний определяются согласно сноске к формулам (5). Нетрудно убедиться, что центры тяжести мультиплетов, отвечающих V-спину, тоже подчиняются формуле, аналогичной (15).

Теперь обратимся к декуплету ${}^3/_2{}^+$. Преобразование (3) с $\theta = \pi/4$ приводит к следующим U'-мультиплетам:

1) $U' = \frac{3}{2}$:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\Omega^- - \Delta^- - \sqrt{3}\,\Xi_\delta^- + \sqrt{3}\,\Sigma_\delta^-),$$

$$\Xi_\delta^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}\,\Omega^- + \sqrt{3}\,\Delta^- - \Xi_\delta^- - \Sigma_\delta^-),$$

$$\Sigma_\delta^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}\,\Omega^- - \sqrt{3}\,\Delta^- - \Xi_\delta^- + \Sigma_\delta^-),$$

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\Omega^- + \Delta^- + \sqrt{3}\,\Xi_\delta^- + \sqrt{3}\,\Sigma_\delta^-);$$

2) $U' = 1$:

$$\Delta^{0\prime} = \frac{1}{2}\Delta^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_\delta^0 + \frac{1}{2}\Xi_\delta', \qquad \Xi_\delta^{0\prime} = \frac{1}{2}\Delta^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_\delta^0 + \frac{1}{2}\Xi_\delta^0, \qquad (16)$$

$$\Sigma_\delta^{0\prime} = -\frac{1}{2}\Delta^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_\delta^0;$$

3) $U' = \frac{1}{2}$:

$$\Delta^{+\prime} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta^+ + \Sigma_\delta^+), \qquad \Sigma_\delta^{+\prime} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\Delta^+ + \Sigma_\delta^+);$$

4) $U' = 0$:

$$\Delta^{++}.$$

Отсюда, применяя уже известную процедуру, будем иметь

$$\Omega^- - \Xi_\delta^- = \Sigma_\delta^- - \Delta^-, \qquad \Xi_\delta^0 - \Sigma_\delta^0 = \Sigma_\delta^0 - \Delta^0. \qquad (17)$$

Кроме того (ср. с (13)—(15)),

$$(\Omega^- + \Delta^- + 3\Xi_\delta^- + 3\Sigma_\delta^-)/8 - (\Delta^0 + \Xi_\delta^0)/2 =$$
$$= (\Delta^0 + \Xi_\delta^0 - \Sigma_\delta^+ - \Delta^+)/2 = (\Sigma_\delta^+ + \Delta^+)/2 - \Delta^{++}. \qquad (18)$$

Легко видеть, что в пренебрежении изотопическим расщеплением соотношения (17)—(18) эквивалентны известному правилу интервалов

$$\Omega - \Xi_\delta = \Xi_\delta - \Sigma_\delta = \Sigma_\delta - \Delta. \qquad (19)$$

Автор выражает искреннюю благодарность А. В. Ефремову, Р. М. Мурадяну, В. В. Серебрякову, Д. Ц. Стоянову, А. Н. Тавхелидзе, И. Т. Тодорову и Д. В. Ширкову за полезные дискуссии.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступило
11 II 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Gell-Mann, Preprint: A Theory of Strong Interaction Symmetry, California Institute of Technology, 15 III 1961; Phys. Rev., 125, 1067 (1962); S. Okubo, Progr. Theor. Phys., 27, 949 (1962). [2] S. Okubo, Electromagnetic Mass Differences in the Unitary Symmetry Model, Preprint UR-875-26, Rochester, 1964.

* В приближении $p = n = N$, $\Xi^0 = \Xi^- = \Xi$, $\Sigma^0 = \Sigma^- = \Sigma^+ = \Sigma$ формула (14), очевидно, переходит в (1). Строго говоря, учитывать электромагнитные разности масс в формулах (12), (14) и подобных им мы не имеем права в силу предположения об изотопической инвариантности массового оператора.