В. О. Кузнецов, О свойствах ассоциированных квадратичных дифференциалов в некоторых экстремальных задачах,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1988, том 168, 85–97

https://www.mathnet.ru/znsl5583

В.О.Кузнецов

О СВОЙСТВАХ АССОЦИИРОВАННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ В НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

§ I. Введение. Формулировки результатов

I^0. Пусть $\Delta=\{\zeta:|\zeta|>1\}$; Σ - класс мероморфных и однолистных в Δ функций $f(\zeta)$ с разложением в окрестности $\zeta=\infty$ вида

$$f(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty} b_n\zeta^{-n}; \qquad (I)$$

Σ_0 - класс функций $f(\zeta)\in\Sigma$, для которых в разложении (I) $b_0=0$; $\Sigma^{(l)}$, $l=1,2,\ldots$, - класс функций $f(\zeta)\in\Sigma$ с разложением

$$f(\zeta)=\zeta+\sum_{n=1}^{\infty} b_{nl-1}\zeta^{-nl+1}, \qquad (2)$$

$f(\zeta)\neq 0$ в Δ ; $\Sigma'=\Sigma_0\cap\Sigma^{(1)}$. Подклассы функций из указанных классов, для которых в приведенных разложениях все коэффициенты вещественные, будем обозначать соответственно через $\Sigma_R,\Sigma_R^{(l)},\ldots$ Пусть

$$k_n(\zeta)=\zeta(1+\zeta^{-1})^{2/n},\quad n=1,2,\ldots$$

Вариационные методы в теории однолистных функций приводят к утверждению, что границы экстремальных областей в ряде задач лежат на траекториях ассоциированного квадратичного дифференциала, следовательно, являются объединением конечного числа аналитических дуг. Поэтому геометрические характеристики экстремальных областей существенно связаны с кратностью и расположением нулей этого дифференциала. Вариация усечения Шиффера (truncation variation; см. [I, 2]) позволяет в ряде случаев свести вопрос о существовании у ассоциированного квадратичного дифференциала нулей заданной кратности к вопросу об экстремальности определенных функций в некоторых "коэффициентных" задачах. В данной работе при помощи подхода, аналогичного использованному в работе А.Чанга, М.Шиффера и Г.Шобера [2], исследуются геометрические свойства экстремальных конфигураций некоторых задач. Первыми из них являются следующие две задачи:

Задача I. Пусть E - континуум на $\mathbb{C}$ и пусть $d_n(E)$ - n-ый диаметр E :

$$d_n(E)=\Big\{\max_{c_k,c_l\in E}\prod_{1\le k<l\le n}|c_k-c_l|\Big\}^{2/[n(n-1)]}.$$

Найти максимум $d_n(E)$ в семействе всех континуумов E единичной емкости.

Задача 2. Пусть $c_1,\dots,c_n$ – системы различных точек на $\overline{\mathbb{C}}$, $D_1,\dots,D_n$ – система неналегающих односвязных областей, $c_k\in D_k$, $k=1,\dots,n$. Найти максимум функционала

$$\prod_{k=1}^{n} R(D_k,c_k)\left\{\prod_{1\leq k<\ell\leq n}|c_k-c_\ell|\right\}^{-2/(n-1)} \tag{3}$$

для всех указанных систем точек c_k и областей D_k. Здесь под $R(D_k,c_k)$ понимается конформный радиус области D_k относительно точки c_k, если $c_k\neq\infty$, и обратная величина, если $c_k=\infty$.

Указанные задачи относятся к числу классических проблем теории функций. Задаче I были посвящены работы М.Шиффера, Г.М.Голузина, Е.Райха и М.Шиффера и работы других авторов. Постановка задачи 2 восходит к исследованиям М.А.Лаврентьева и Г.М.Голузина: при $n=2,3$ задача 2 равносильна задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих односвязных областей, содержащих заданные точки на $\overline{\mathbb{C}}$. О результатах, полученных в задачах I и 2, см., например, [3, 4, 5]. Хорошо известна характеристика экстремальных конфигураций задач I и 2 в терминах квадратичных дифференциалов. Так, каждый экстремальный континуум E задачи I представляет собой множество $\overline{\Phi}$, т.е. объединение замыканий всех критических траекторий, для квадратичного дифференциала вида

$$Q_1(z)dz^2=-\frac{2}{n-1}\sum_{1\leq k<\ell\leq n}\frac{1}{(z-c_k)(z-c_\ell)}dz^2, \tag{4}$$

где c_k – точки Фекете на E. При $n\geqslant 3$ каждая из экстремальных систем областей задачи 2 состоит из круговых областей для квадратичного дифференциала вида

$$Q_2(z)dz^2=-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(z-c_k)^2}-\frac{2}{n-1}\sum_{1\leq k<\ell\leq n}\frac{1}{(z-c_k)(z-c_\ell)}\right]dz^2. \tag{5}$$

Доказательство последнего утверждения дано в работах Г.П.Бахтиной [6] и С.И.Федорова [7]. В настоящее время решения задач I и 2 известны только в случаях $n=2,3,4$. При $n=2$ решения этих задач даются соответственно теоремой Фабера о диаметре в классе Σ и известным результатом М.А.Лаврентьева 1934 года. Решения задач I и 2 при $n=3$ впервые получены Г.М.Голузиным, при $n=4$ Г.В.Кузьминой [5, гл.2 и 6; 8] (в связи с доказательством в [8] см. также работу С.И.Федорова [7]).

Наряду с задачей 2 рассматривалась аналогичная задача об экстремальном разбиении верхней полуплоскости (или единичного круга).

Пусть в условиях задачи 2 n - четное число: $n=2m$ и система точек $c_1,\ldots,c_{2m}$ симметрична относительно вещественной оси: $c_{m+l}=\bar{c}_l$, $\operatorname{Im} c_l>0$ при $l=1,\ldots,m$. Задачу о максимуме функционала (3) относительно всех систем точек $c_1,\ldots,c_{2m}$, удовлетворяющих указанному условию, и всех систем неналегающих односвязных областей $D_1,\ldots,D_{2m}$ на $\bar{\mathbb{C}}$, $c_k\in D_k$ при $k=1,\ldots,2m$, $m\geqslant 2$, будем называть задачей $2'$. Известно [9], что каждая экстремальная система областей этой задачи характеризуется симметрией относительно вещественной оси, следовательно, задача $2'$ равносильна задаче об экстремальном разбиении верхней полуплоскости. При $m=2$ задача 2 равносильна задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих односвязных областей в единичном круге и решение задачи в этом случае впервые получено П.П.Куфаревым (см. [4, с.233]). Как показано в [9], при $m\geqslant 2$ каждая экстремальная система областей задачи $2'$ образуется круговыми областями для квадратичного дифференциала вида (5), в расположении полюсов которого имеется указанная выше симметрия. Замыкание вещественной оси принадлежит множеству $\bar{\Phi}$ для ассоциированного квадратичного дифференциала и содержит нули этого дифференциала только четного порядка.

Трудность решения задач I, 2, $2'$ при достаточно больших n в известной мере связана с наличием различных допустимых конфигураций, удовлетворяющих указанным выше необходимым условиям, но не реализующих искомого максимума. Поэтому представляет интерес установление дополнительных условий, которым должны удовлетворять экстремальные конфигурации.

2^0. Геометрическим свойством экстремальных конфигураций задачи I посвящена предыдущая работа автора [10]. В [10] была установлена следующая связь между задачей I и задачей о максимуме функционала

$$\left|\left\{-\log f'+q\log\frac{f}{\zeta}\right\}_\nu\right|$$

в классе $\sum^{(1)}$, q - фиксированное число (задача 3). Здесь и далее под $\{F(\zeta)\}_\nu$ понимается коэффициент при $\zeta^{-\nu}$ в разложении функции $F(\zeta)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

ЛЕММА I. Пусть E - экстремальный континуум задачи I, $c_1,\ldots,c_n$- точки Фекете на E, (4) - ассоциированный квадратичный дифференциал. Для того, чтобы точка z_0 была нулем порядка m ($m\geqslant 1$) или регулярной точкой ($m=0$) дифференциала (4), необходимо, чтобы функция $k_{m+2}(\zeta)$ была экстремальной в задаче 3 при $\nu=m+2$, где $q=0$ если z_0 не является точкой Фекете на

E, и $q=2$, если z_0 совпадает с одной из точек $c_1,\dots,c_n$.

Доказательство леммы I дано в [10, с.103-106]. Отметим, что вместо класса $\Sigma^{(1)}$ в [10] рассматривался класс Σ', однако ограничение $b_0=0$ при доказательстве в работе [10] не используется.

При помощи леммы I было показано [10, теорема I], что дифференциал (4) не имеет нулей порядка m, где m - четное или $m=3$. Было также показано [10, теорема 2], что каждая точка Фекете на E не может быть регулярной точкой дифференциала (4).

В настоящей работе устанавливается окончательный результат в данном вопросе. Именно, доказывается

ТЕОРЕМА I. Квадратичный дифференциал (4), определяющий экстремальный континуум E задачи I, не имеет нулей порядка >1. Каждая из точек Фекете на E является простым полюсом дифференциала (4).

Геометрически эта теорема означает, что экстремальный континуум E задачи I не может содержать более трех дуг, выходящих из одной точки, и каждая из точек Фекете на E является концом только одной из дуг, образующих E.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во время подготовки данной работы к публикации автору стала известна только что вышедшая из печати работа Ю.Льюнга [11], в которой приводится сформулированная выше теорема I. При этом в [11] приводится доказательство лишь одного из вспомогательных утверждений и указывается, что основная часть доказательства сформулированной теоремы появится в совместной работе Ю.Льюнга и Г.Шобера, которая будет опубликована в J.Anal.Math.

Для задач 2 и 2$'$ имеют место леммы, аналогичные лемме I.

ЛЕММА 2. Пусть (5) - квадратичный дифференциал, ассоциированный с задачей 2. Для существования у этого дифференциала нуля порядка $m\geq 1$ необходимо, чтобы функция $k_{m+2}(z)$ являлась экстремальной в задаче 3 при $\nu=m+2$ и $q=0$.

Задачу о максимуме функционала $\operatorname{Re}\{-\log f'\}_\nu$ в классе Σ_R назовем задачей 3$'$.

ЛЕММА 3. Пусть (5) - квадратичный дифференциал, ассоциированный с задачей 2. Для существования у этого дифференциала нуля порядка $2m$, $m\geq 1$, на замыкании вещественной оси необходимо, чтобы функция $k_{2m+2}(\zeta)$ являлась экстремальной в задаче 3$'$ при $\nu=2m+2$.

Геометрическая характеристика экстремальных систем областей задач 2 и 2 дается следующими теоремами.

ТЕОРЕМА 2. Квадратичный дифференциал (5), определяющий экстремальную систему областей задачи 2, не имеет нулей порядка >1.

ТЕОРЕМА 3. Квадратичный дифференциал (5), определяющий экстремальную систему областей задачи $2'$, не имеет нулей порядка >2 на замыкании вещественной оси.

Эти теоремы показывают, что каждая точка на $\overline{\mathbb{C}}$ не может быть граничной для более чем трех областей экстремальной системы задачи 2, а каждая точка на замыкании вещественной оси не может быть граничной для более чем четырех областей экстремальной системы задачи $2'$.

Теоремы I – 3 непосредственно вытекают из лемм I–3 и следующей леммы.

ЛЕММА 4. Функция $k_n(\zeta)$ не является экстремальной в задаче 3, где $\nu = n$, при всех $n \geqslant 4$, а также при $n = 2,3$ и $q \neq 0$. Функция $k_n(\zeta)$ не является экстремальной в задаче $3'$, где $\nu = n$, при всех $n \geqslant 5$, а также при $n = 3,4$ и $q \neq 0$.

Доказательство лемм 2–4 приводится в § 2.

Отметим, что на возможность доказательства теоремы 2 на данном пути исследования было указано С.И.Федоровым.

В § 3 рассматриваются две коэффициентные задачи, связанные с предположением Г.Спрингера для функций, обратных к функциям класса Σ_0, и исследуется вопрос об экстремальности функции $k_n(\zeta)$ в этих задачах.

§ 4 посвящен исследованию геометрических характеристик опорных функций класса Σ, начатому в работах [I2 –I4, II] и связанному с предположением Г.Шобера о нулях квадратичных дифференциалов, ассоциированных с линейными экстремальными задачами в классе Σ.

Заметим, что функции сравнения, используемые в настоящей работе, появляются, в отличие от работ [I3, I4, II], в результате рассмотрения двухпараметрических семейств вполне элементарных функций, что приводит к более простым доказательствам соответствующих неравенств.

§ 2. Доказательство теорем I – 3

I^0. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 2 И 3. Основные моменты доказательства леммы 2 и леммы I, данного в [I0], совпадают. Поэтому ограничимся кратким изложением доказательства леммы 2, отсылая за деталями к работе [I0].

При $n = 2$ утверждение леммы 2 тривиально и решение задачи 2 хорошо известно. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 3$. Пусть $C_1, \ldots, C_n$ – экстремальная система точек, а $D_1, \ldots, D_n$ – экстремальная система областей задачи 2. Пусть точка z_0 является нулем порядка m дифференциала (5). В силу инвариантности функционала (3) относительно группы дробно-линейных преобразований, можно считать, что $z_0 = 0$ и

$$\tilde{S}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i^{-1} = 0 . \tag{6}$$

Наличие у дифференциала (5) нуля порядка m в начале координат приводит к условиям:

$$P_2 = P_3 = \ldots = P_{m+1} = 0 , \; P_{m+2} \neq 0 . \tag{7}$$

где P_k, $k = 2, \ldots, m+2$, - симметрические многочлены степени k от переменных $c_1^{-1}, \ldots, c_n^{-1}$. Пусть

$$P_k = \lambda_k \tilde{S}_k + \ldots , \quad k = 2, \ldots, m+2 ,$$

- представление многочлена P_k через элементарные симметрические многочлены $\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_{m+2}$ от переменных $c_1^{-1}, \ldots, c_n^{-1}$.

Нетрудно проверить, что $\lambda_k \neq 0$, $k = 2, 3, \ldots$. Отсюда и из условий (6) и (7) получаем

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2 = \ldots = \tilde{S}_{m+1} = 0 , \quad \tilde{S}_{m+2} \neq 0 . \tag{8}$$

Пусть $E = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} D_k$, $U_\delta = \{ z : |z| < \delta \}$, $\delta > 0$, $E_\delta = U_\delta \cap E$. Используя тот факт, что начало координат является нулем порядка m дифференциала (5), для произвольной функции $z = g(\zeta)$ класса $\Sigma^{(1)}$ с разложением (I) построим варьированную функцию

$$f_\varepsilon(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\delta) \varepsilon^{k+1} z^{-k} ,$$

мероморфную и однолистную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E_\delta$ (см. [IO , § I, п.I°]). Пусть $c_k^* = f_\varepsilon(c_k)$, $D_k^* = f_\varepsilon(D_k)$, $k = 1, \ldots, n$, - системы варьированных точек и областей. Сравнивая значения функционала (3) для экстремальных и варьированных систем точек и областей, в обозначениях работы [IO] получаем условие

$$\operatorname{Re}\left\{ \sum_{i=1}^{n} \log f_\varepsilon'(c_i) - \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} \log\left(\frac{f_\varepsilon(c_i) - f_\varepsilon(c_j)}{c_i - c_j} \right) \right\} =$$

$$= -\operatorname{Re}\left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(u_1(\delta), \ldots, u_\nu(\delta)) \varepsilon^{\nu+1} \left[\sum_{i=1}^{n} c_i^{-(\nu+1)} \right] - \right. \tag{9}$$

$$-\frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}A_{\mu,\nu-\mu}\Big[\sum_{i\neq j}c_i^{-\mu}c_j^{-(\nu-\mu)}\Big]\Big\}\leqslant 0\,.$$

Суммы, стоящие в квадратных скобках в (9), являются симметрическими многочленами от переменных $c_1^{-1},\dots,c_n^{-1}$. Выражая их через элементарные симметрические многочлены $\tilde S_1,\tilde S_2,\dots,$ и учитывая (8), а также равенства (I3) и (I4) работы [I0], находим

$$\operatorname{Re}\{(-1)^m(m+2)\tilde S_{m+2}B_{m+1}(u_1,\dots,u_{m+1})-$$

$$-(-1)^m\frac{m+2}{n-1}\tilde S_{m+2}\sum_{\mu=1}^{m+1}A_{\mu,m+2-\mu}+o(\varepsilon^{m+2})\}=$$

$$\operatorname{Re}\{(-1)^m(m+2)\frac{n-2}{n-1}\tilde S_{m+2}\,\varepsilon^{m+2}\Big[\frac{2(m+1)}{m+2}+$$

$$+B_{m+1}(b_1,\dots,b_{m+1})\Big]+o(\varepsilon^{m+2})\}\leqslant 0\,.$$

Отсюда, как и в [I0], получаем неравенство

$$|B_{m+1}(b_1,\dots,b_{m+1})|=\big|\{-\log f'\}_{m+2}\big|\leqslant\frac{2(m+1)}{m+2}\,.$$

Это неравенство справедливо для любой функции $f\in\Sigma^{(1)}$ следовательно, k_n- экстремальная функция в задаче 3 при $\nu=m+2$ и $q=0$.

Заменяя в предыдущих рассуждениях функцию класса $\Sigma^{(1)}$ функцией класса Σ_R, получаем утверждение леммы 3. Этим леммы 2 и 3 доказаны.

2°. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Пусть m и n - целые положительные числа, $n\geqslant 3$, $2m<n$, $-1<\lambda<1$. Тогда все корни многочлена $\zeta^n+\lambda\zeta^{n-m}+\lambda\zeta^m+1$ различны и лежат на единичной окружности. Поэтому функция

$$f_\lambda(\zeta)=\zeta(1+\lambda\zeta^{-m}+\lambda\zeta^{-n+m}+\zeta^{-n})^{2/n}$$

однолистно отображает Δ на дополнение к объединению n отрезков, выходящих из начала координат под равными углами друг к другу. Пусть $\varepsilon>0$ и достаточно мало. Тогда

$$\varphi_\varepsilon^{(m)}(z)=\varepsilon k_m k_n^{-1}\Big(\frac{z}{\varepsilon}\Big)=z+\frac{2\varepsilon^m}{m}z^{-(m-1)}+\dots\in\Sigma_R^{(1)}\,,$$

а суперпозиция

$$\tilde{f} = \tilde{f}^{(m)}_{\varepsilon,\lambda}(\zeta) = \varphi^{(m)}_{\varepsilon}(f_\lambda(\zeta))$$

принадлежит классу $\Sigma^{(1)}$. Имеем

$$\{-\log \tilde{f}' + q \log \frac{\tilde{f}}{\zeta}\}_n =$$

$$= \{-\log k_n' + q \log \frac{k_n}{\zeta}\}_n - \frac{4}{n}(m+q-1)\varepsilon^m \lambda + O(\lambda^2 + |\lambda| \varepsilon^{2m} + \varepsilon^n).$$

Если положить $\lambda = \pm \varepsilon^{(m+1/2)}$, то старшим по порядку членом в правой части этого равенства будет член, содержащий $\varepsilon^m \lambda$. Если k_n - экстремальная функция при $\nu = n$ в задаче 3 или задаче 3$'$, то указанный член должен равняться нулю при всех целых m таких, что $1 \leqslant m < n/2$. Следовательно, при всех $n \geqslant 5$ и произвольных q, а также при $n = 3,4$ и $q \neq 0$ функция k_n не является экстремальной в задачах 3 и 3$'$ при $\nu = n$. Остальные утверждения леммы для $n = 2,4$ следуют из того факта, что при вещественном λ

$$\max_{f \in \Sigma^{(\ell)}_{R}} | b_{2\ell-1} + \lambda b^2_{\ell-1} | = 1/\ell$$

только в том случае, когда $\lambda = (\ell-1)/2$ (см., например, [15]).

Итак, леммы 2-4 доказаны. Тем самым доказаны и теоремы I-3.

§ 3. О коэффициентах обратных функций в классе Σ_0

I$^{\circ}$. Пусть $f(\zeta) \in \Sigma_0$ и пусть

$$f^{-1}(z) = z + \sum_{N=1}^{\infty} B_N z^{-N}$$

- функция, обратная к $z = f(\zeta)$. Рассмотрим задачу о максимуме $|B_N|$ в классе Σ_0 (з а д а ч а 4). Г.Спрингером [16] было высказано предположение, что экстремальной в этой задаче является функция k_n, где n - наименьший простой делитель числа $N+1$. Для $N = 1,2$ это очевидно. Известно также [17], что предположение Спрингера справедливо при нечетных N, $3 \leqslant N \leqslant 15$. В [2] рассматривалась задача о максимуме функционала $\mathrm{Re}\,\{f^N\}_\nu$ в классе Σ_0 (з а д а ч а 5) и было показано, что если k_n - экстремальная функция в задаче 5 и $n \geqslant 4$, то либо $\nu \geqslant N$ и $2N/n = 2, 3, \ldots$, либо "

$$\frac{n^2-13}{6(n-3)} \leqslant N \leqslant \frac{5n^2-26}{12(n-3)} \quad . \tag{10}$$

При помощи этого утверждения в [2] было доказано, что предположение Спрингера неверно при всех $n \geqslant 4$, за возможным исключением случая $n=5$, $N=4$. Следующая лемма дополняет приведенные выше результаты.

ЛЕММА 5. Функция k_n не является экстремальной в задаче 5 при всех $n \geqslant 6$ и произвольных N, а также при $n=5$ и $N \neq 2$. Функция k_n не является экстремальной в задаче 4 при всех $n \geqslant 4$ и произвольных N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k_n — экстремальная функция в задаче 4. Тогда, очевидно, $\nu = pn - N$, $p = 1, 2, \ldots$. Пусть $\tilde{f} = \tilde{f}^{(m)}_{\varepsilon,\lambda}(z)$ вариация функции k_n, построенная в § 2. Имеем

$$\{\tilde{f}^N\}_{pn-N} - \{k_n^N\}_{pn-N} =$$

$$= \frac{2N_p}{m}\varepsilon^m\lambda\frac{\tau(\tau-1)\cdot\ldots\cdot(\tau-p+1)}{p!} + O(\lambda^2 + |\lambda|\varepsilon^{2m} + \varepsilon^n), \tag{11}$$

где $\tau = 2(N-m)/n$. Рассуждая далее так же, как и в § 2 п.2°, приходим к заключению, что либо $n \leqslant 4$, либо $n = 5, 6$ и $2N = n\ell + 4$, $\ell = 0, 1, \ldots, p-1$. Но при $n \geqslant 5$ число $\ell + 4/n = 2N/n$ целым быть не может и поэтому должно выполняться неравенство (10), из которого при $n = 5, 6$ получаем $N = 2$. Сравнение с функциями класса $\Sigma^{(3)}$ (см., например, [15]), как и в § 2, п.2°, позволяет исключить случай $n=6$, $N=2$. Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение леммы теперь следует из равенства $\{f^N\}_1 = -NB_N$ и указанного выше результата в [2].

2°. Остановимся отдельно на случае $N=1$. Полагая в (11) $N=p=1$, $n=2m+1$, $m \geqslant 3$ при надлежащих λ и $\varepsilon > 0$ получим функцию $\tilde{f}_0^{(m)} = \tilde{f}^{(m)}_{\varepsilon,\lambda}$ коэффициенты разложения (1) которой удовлетворяют условиям

$$b_1 = \ldots = b_{m-2} = 0, \quad b_{2m} > \frac{2}{2m+1} \quad .$$

Дж.Дженкинсом была доказана следующая теорема [15].

Если коэффициенты разложения (1) функции $f \in \Sigma$ удовлетворяют условиям

$$b_\mu = 0\ ,\quad 1 \leqslant \mu \leqslant \frac{n-2}{2}\ , \tag{12}$$

то имеет место неравенство

$$|b_{n-1}| \leqslant \frac{2}{n}\ ,$$

равенство в котором реализуется только для функции K_n и ее вращений.

Известно (см., например, [15]), что при четных n условие (12) в этой теореме не может быть ослаблено. Пример построенной выше функции $\tilde{f}_0^{(m)}$ показывает, что это условие не может быть ослаблено и при нечетных n.

§ 4. О геометрических свойствах опорных функций класса Σ

I°. Пусть f - опорная функция класса Σ, L - соответствующий линейный непрерывный функционал. Множество $\Gamma = \overline{\mathbb{C}} \setminus f(\Delta)$, где $f \in \Sigma$, будем называть выпускаемым множеством функции f. Известно [18], что выпускаемое множество Γ опорной функции $f \in \Sigma$ лежит на траекториях квадратичного дифференциала

$$L\left(\frac{1}{f-z}\right) dz^2\ , \tag{13}$$

регулярного на Γ. Поэтому точки неаналитичности континуума Γ являются нулями дифференциала (13). Г.Шобер [12] высказал предположение, что дифференциал (13) на выпускаемом множестве Γ опорной функции $f \in \Sigma$ не может иметь нулей порядка $n \geqslant 2$. Пусть $\tilde{\Sigma}$ - класс мероморфных и однолистных во внешности отрезка $[0,4]$ функций с разложением в окрестности $\zeta = \infty$ вида

$$F(\zeta) = \zeta + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \zeta^{-\nu}\ .$$

В [12] доказано, что для существования нуля n-го порядка у дифференциала (13) на Γ необходимо, чтобы в классе $\tilde{\Sigma}$ выполнялось неравенство

$$\mathrm{Re}\{F(\zeta)\}_{n+1} \leqslant 0\ .$$

Ниже показывается, что предположение Шобера справедливо при всех $n \geqslant 3$. Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 6. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда существует функция $F(\zeta) \in \tilde{\Sigma}$

такая, что

$$\operatorname{Re}\{F(z)\}_{n+1} > 0 .$$

Случай $n=2$ остается открытым. В работах [13, 14] показано, что из нуля порядка $n=2$ дифференциала (13) не может выходить более одной аналитической дуги, принадлежащей континууму Γ. Лемма 6, в сочетании с уже упоминавшимися результатами работ [12 - 14], приводит к следующей геометрической характеристике опорных функций: выпускаемое множество опорной функции класса Σ не может содержать более трех аналитических дуг, выходящих из одной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Пусть $-1<\lambda<1$, $\ell(\lambda)$ - длина каждого из двух отрезков, образующих выпускаемое множество функции

$$f(\zeta)=\zeta(1-\zeta^{-1})^{1-\lambda}(1+\zeta^{-1})^{1+\lambda} .$$

Пусть $\alpha=(1+\lambda)\pi/2$,

$$f_\lambda(\zeta)=e^{i\alpha}f(e^{-i\alpha}\zeta)+\ell(\lambda) .$$

Несложные вычисления показывают, что $\ell(\lambda)=2+O(\lambda^2)$,

$$f_\lambda(\zeta)=k_1(\zeta)+i\lambda\left[\pi\zeta^{-1}+2(\zeta+\zeta^{-1})\operatorname{arctg}\zeta^{-1}\right]+O(\lambda^2) ,$$

где остаточный член в последней формуле оценивается равномерно в некоторой окрестности точки $\zeta=\infty$. Пусть

$$\Phi(z)= z-2+\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^{-\nu} , \quad c_1=-1 ,$$

функция обратная к $z=k_1(\zeta)$, θ - вещественное число, $\varepsilon>0$, $\rho=\varepsilon e^{i\theta}$,

$$\varphi_\rho(z)=\rho k_2(e^{-i\theta}(\Phi(\tfrac{z}{\varepsilon}))+2\varepsilon=z+(1-e^{2i\theta})\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\varepsilon^{\nu+1}z^{-\nu} .$$

При $0<\varepsilon<1/2$ суперпозиция

$$F_{\rho,\lambda}(z)=\varphi_\rho(f_\lambda(\Phi(z)))=$$

$$=f_\lambda(\Phi(z))-(1-e^{2i\theta})\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\varepsilon^{\nu+1}(f_\lambda(\Phi(z)))^{-\nu}$$

мероморфна и однолистна во внешности отрезка $[0,4]$. Пусть ν, n - целые числа, $n\geqslant 3$. Имеем

$$\{(f_\lambda(\Phi(z)))^{-\nu}\}_{n+1} =$$

$$=\{z^{-\nu}[1-i\lambda\nu z^{-1}(\pi\Phi^{-1}+2(\Phi+\Phi^{-1})\,\mathrm{arctg}\,(\Phi^{-1}))]\}_{n+1}+O(\lambda^2) =$$

$$= \begin{cases} -i\nu s_\nu\lambda + O(\lambda^2) & \text{при} \quad \nu \leqslant n\,, \\ 1-i\nu s_\nu\lambda + O(\lambda^2) & \text{при} \quad \nu = n+1\,, \end{cases}$$

где

$$s_\nu = \{\pi\Phi^{-1}+2(\Phi+\Phi^{-1})\,\mathrm{arctg}\,(\Phi^{-1})\}_{n-\nu}\,.$$

Далее $s_1 = -\pi c_{n-1} + t$, где

$$t = 2\{(\Phi+\Phi^{-1})\,\mathrm{arctg}\,(\Phi^{-1})\}_{n-1}\,.$$

Числа c_{n-1} и t, очевидно, рациональны, $c_{n-1} \neq 0$, следовательно, $s_1 \neq 0$. Имеем

$$\mathrm{Re}\{F_{\rho,\lambda}(z) = -s_1\lambda\varepsilon^2\,\mathrm{Re}\{ie^{2i\theta}\} + O(\lambda^2+\varepsilon^5)\,.$$

При $0<\theta<\pi/2$, $\lambda = \mathrm{sign}\,(s_1)\,\varepsilon^{5/2}$ и достаточно малом ε получаем

$$\mathrm{Re}\{F_{\rho,\lambda}(z)\} > 0\,,$$

что и доказывает лемму 6.

Литература

I. S c h i f f e r M. On the coefficient problem for univalent functions.-Trans.Amer.Math.Soc., 1968, vol.134, p.95-101.

2. C h a n g A., S c h i f f e r M.M., S c h o b e t G. On the second variation for univalent functions. - J.Anal.Math., 1981, vol.40, p.203-238.

3. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд.2-е. М., 1966.

4. Л е б е д е в Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М., 1975.

5. К у з ь м и н а Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1980, т.139, 240 с.

6. Б а х т и н а Г.П. Вариационные методы и квадратичные диффе-

ренциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. канд. дисс., Киев, 1975. 12 с.

7. Ф е д о р о в С.И. О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1981, т.112, с.172-183.

8. К у з ь м и н а Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций.3. Зап.науч. семин.ЛОМИ, 1980, т.100, с.131-145.

9. К у з ь м и н а Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций.5. Зап.науч.семин. ЛОМИ, 1983, т.125, с.99-113.

10. К у з н е ц о в В.О. К задаче о максимуме N-го диаметра. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 7. Зап. науч.семин.ЛОМИ, 1986, т.154, с.101-109.

11. L e u n g Y.J. On the Nth diameter problem in the class Σ. - Complex Variables, 1987, vol.9, N 2-3, p.227-239.

12. S c h o b e r G. Some conjectures for the class Σ. - Contemp.Math., 1985, vol.38, p.13-21.

13. L e u n g Y.J., S c h o b e r G. Low order coefficient estimates in the class Σ. - Ann. Acad.Sci.Fenn. Ser. A.I. Math., 1986, vol.11, p.39-61.

14. L e u n g Y.J., S c h o b e r G. On the structure of support points in the class Σ. - J.Anal.Math., 1986, vol. 46, p.176-193.

15. J e n k i n s J.A. On certain coefficients on univalent functions. II. - Trans.Amer.Math.Soc., 1960, vol.96, N 3, p.534-545.

16. S p r i n g e r G. The coefficient problem for schlicht mappings of the exterior of the unit circle. - Trans.Amer. Math.Soc., 1951, vol.70, p.421-450.

17. S c h o b e r G. Coefficients of inverses of univalent functions with quasi-conformal extensions. - Kōdai Math.J., 1979. vol.2, N 3, p.411-419.

18. S c h o b e r G. Univalent functions - selected topics. Lect.Notes Math., 1975, N 478, 200 p.