Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. Raigorodskii, Еще об одной “олимпиадной” задаче про графы, или Еще одна задача о раскраске,
Kvant, 2023, Number 3, 14–19

https://www.mathnet.ru/eng/kvant4102

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
January 21, 2026, 19:51:24

Еще об одной «олимпиадной» задаче про графы, или Еще одна задача о раскраске

А.РАЙГОРОДСКИЙ

Была недавно такая задачка...

В 2022 году я в очередной раз руководил командой, которая составляла вариант Московской математической олимпиады для 10 класса. И придумал я задачку, которая попала на шестую позицию. Сейчас я ее здесь сформулирую и сразу же решу. Но это будет только началом большой истории, которая выведет нас буквально на передний край современной комбинаторики и теории графов. Формулировку и решение я привожу дословно по тексту из брошюры [1].

Формулировка. Андрей Михайлович выписал на доску все возможные последовательности длины 2022, состоящие из 1011 нулей и 1011 единиц. Назовем две последовательности *совместимыми*, если они совпадают ровно в 4 позициях. Докажите, что Андрей Михайлович может разбить все последовательности на 20 групп так, чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу.

Решение. Понятно, что совместимые последовательности в двух позициях совпадают по единицам, а в двух – по нулям. Рассмотрим первые пять позиций. Существует $C_5^3 = 10$ способов поставить три единицы на эти пять позиций. Для каждого из этих десяти способов Андрей Михайлович выделяет группу написанных на доске последовательностей, первые три единицы которых стоят на соответствующих трех позициях. Таким образом, Андрей Михайлович разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три единицы. Кроме того, любые две последовательности из одной группы совпадают по единицам хотя бы в трех позициях, следовательно, не являются совместимыми. Аналогично, Андрей Михайлович разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три нуля. А поскольку у каждой последовательности на первых пяти позициях встречаются или три нуля, или три единицы, Андрей Михайлович разбил все последовательности на 20 групп.

Из решения видно, что число 2022 в формулировке выбрано исключительно из соображений «стиля». Подойдет любое четное число n, а в последовательностях тогда будет по $n/2$ единиц и нулей. Ответ 20 при сохранении метода решения не изменится. Несложно придумать и еще одно обобщение. А именно, пусть n – четное число, снова выписаны все последовательности из $n/2$ единиц и $n/2$ нулей, но теперь две последовательности *совместимы*, если они совпадают ровно в $2s$ позициях, где s – любое целое неотрицательное число, меньшее $n/2$. Данное нами решение воспроизводится практически дословно, и число групп получается равным $2C_{2s+1}^{s+1} = 2C_{2s+1}^{s}$. Любопытно, что, поставь мы задачу сразу в таком виде, вряд ли бы она заняла шестую позицию в варианте: биномиальный коэффициент дает намек на то, как нужно действовать.

Скоро мы узнаем, что все, о чем мы до сих пор говорили, лишь верхушка айсбер-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20230302

га. Для этого мы в следующем разделе переведем задачу на язык теории графов.

На языке графов

В этом разделе мы предполагаем, что читатель знаком с понятием графа как математического объекта, а не аристократического титула. Название раздела не должно приводить читателя в ступор: «А что, графы говорят на особом языке? Князья их не поймут?»

Перейдем от шуток к делу и прежде всего договоримся, что всюду далее мы будем встречаться только с обыкновенными (простыми) графами, т.е. графами, у которых нет кратных ребер, нет ориентации и нет петель. Желая подчеркнуть, что данный граф G имеет множество вершин V и множество ребер E, мы будем писать, как это принято, что $G=(V,E)$.

Теперь напомним одну очень важную характеристику графа – его *хроматическое число*. Для данного графа $G=(V,E)$ хроматическое число – это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины из множества V, чтобы концы каждого ребра из множества E имели разные цвета. Обозначается хроматическое число $\chi(G)$. Например, если C_n – это простой цикл на n вершинах (рис. 1), то $\chi(C_n)=2$ при четных n и $\chi(C_n)=3$ при нечетных n. А если T_n – дерево с $n\geq 2$ вершинами, то $\chi(T_n)=2$ (рис. 2). Если же, скажем, K_n – это полный граф на n вершинах, т.е. граф, в котором проведены все возможные $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ ребер, то $\chi(K_n)\quad n$.

В целом, хроматические числа графов устроены крайне непросто. Легко лишь проверить, что граф с хотя бы одним ребром тогда и только тогда имеет хроматическое число 2 (красится в 2 цвета или, как еще говорят, *двудолен*), когда в нем нет простых циклов C_n с нечетным n. Доказательство утверждения в одну сторону («необходимость») очевидно (см. предыдущий абзац), а доказательство в другую сторону («достаточность») посложнее, но читатель, который ранее не знал этого факта, может найти его в литературе или даже самостоятельно доказать. Уже проверка существования раскраски графа в 3 цвета – алгоритмически трудная проблема.

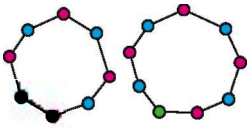

Рис. 1

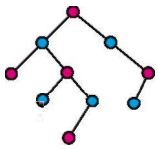

Рис. 2

Мы не будем много времени тратить здесь на обсуждение различных вопросов, которые возникают в связи с понятием хроматического числа, хотя они безумно интересны. Наша цель – олимпиадная задача и ее обобщение из первого раздела. Причем же здесь хроматические числа?

Пусть n – четное число, а s – неотрицательное целое число, строго меньшее $n/2$. Обозначим $J(n,s)$ граф, вершинами которого служат все возможные последовательности из $n/2$ единиц и $n/2$ нулей, а ребрами соединены все пары вершин, отвечающих совместимым последовательностям, т.е. последовательностям, совпадающим ровно в $2s$ позициях. Что значит покрасить вершины этого графа согласно условиям из определения хроматического числа: концы каждого ребра должны иметь разные цвета? Это то же самое, что так разбить множество вершин (последовательностей) на группы (цвета), чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу. Таким образом, результат первого раздела – это утверждение о том, что независимо от величины n справедливо неравенство $\chi(J(n,s))\leq 2C_{2s+1}^{s}$. Здесь именно неравенство, так как мы лишь предложили способ покраски, но отнюдь не доказали, что он оптимален, т.е. дает *минимальное* количество цветов, как это требуется в определении хроматического числа.

Раз мы не знаем, оптимальна ли «олимпиадная» оценка, значит, нужно бы подумать о нижних оценках величины $\chi(J(n,s))$. Оказывается, что все сколько-нибудь нетривиальные результаты здесь

являются следствиями из большой и очень глубокой науки о так называемых *кнезеровских графах*. О них рассказывалось в статьях [2–4], и в рамках этой статьи не станем вдаваться в довольно сложные подробности. Скажем лишь, что в итоге получается неравенство $\chi\left(J\left(n,s\right)\right) \geq s+2$, которое пока никто не умеет усиливать.

Итак, сейчас мы знаем, что

$$s+2 \leq \chi\left(J\left(n,s\right)\right) \leq 2C_{2s+1}^{s}.$$

А насколько велик разрыв между оценками? Как растет «олимпиадная» величина $2C_{2s+1}^{s}$? Давайте ее тоже оценим. Хорошо известно тождество

$$C_{2s+1}^{0}+C_{2s+1}^{1}+\ldots+C_{2s+1}^{s}+C_{2s+1}^{s+1}+\ldots$$
$$\ldots+C_{2s+1}^{2s+1}=2^{2s+1}.$$

Более того, слагаемые сначала растут, а потом убывают. Наша величина – одна из двух наибольших в сумме. Значит,

$$C_{2s+1}^{s} \geq \frac{2^{2s+1}}{2s+2}.$$

Таким образом, известная нам сейчас верхняя оценка растет примерно как экспонента, в то время как нижняя оценка линейна. Это чудовищный зазор! Но его можно очень мощно сократить, улучшив... верхнюю оценку. В следующем разделе мы свяжем нашу задачу с еще одним очень красивым разделом комбинаторики раскрасок. Это позволит нам показать, что олимпиадная оценка невероятно завышена и вместо нее справедлива оценка порядка s^2, которая уже совсем не так ужасно смотрится при сравнении с нижней оценкой $s+2$.

В завершение раздела дадим еще один равносильный вариант определения графа $J\left(n,s\right)$, с которым нам будет удобно работать. В этом варианте вершинами графа служат все возможные $n/2$-элементные подмножества множества $\mathcal{R}_n=\{1,\ldots,n\}$, а ребрами две вершины соединяются тогда и только тогда, когда соответствующие подмножества имеют ровно s общих элементов. На рисунке 3 показано, почему исходное определение эквивалентно приведенному только что.

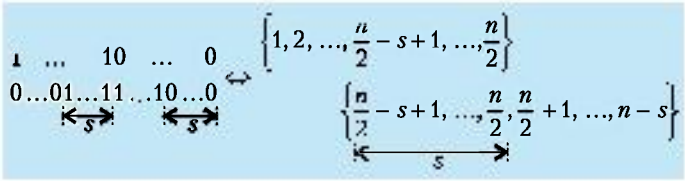

Рис. 3

Задача об уклонении и значительное уточнение олимпиадной оценки

Гиперграфы и их раскраски

Классическое понятие графа допускает очень естественное обобщение. По сути, что такое граф? Это множество объектов, на которых введены парные отношения (скажем, множество людей и отношение знакомства или множество последовательностей и отношение совместимости). Но ведь на множестве можно и более сложные соотношения рассматривать. Например, есть 30 школьников, из которых пятеро очень любят комбинаторику, еще пятеро очень любят геометрию, еще четверо – теорию графов, шестеро – теорию чисел и т.д. Множества любителей могут и пересекаться. Получается объект, который называется *гиперграфом*. У него, как и у графа, есть вершины (в данном примере это 30 школьников) и есть ребра (в данном примере это подмножества множества вершин, имеющие мощности 5, 5, 4, 6 и т.д.). В общем случае пишут прямо так же, как и в теории графов: $H=(V,E)$. Только теперь E – это совокупность некоторых подмножеств множества V, и эти подмножества не обязательно двухэлементные и даже не обязательно одинаковой мощности. Для дальнейшего удобства мы будем считать, что одноэлементными или пустыми ребра все-таки не бывают. При этом, как и раньше, мы считаем, что в гиперграфе нет кратных ребер, у ребер нет ориентации (т.е. они являются сочетаниями) и нет совпадающих вершин (это сочетания без повторений). Отметим, что отсутствие кратных ребер – это удобное нам сейчас

соглашение, хотя в примере со школьниками вполне могли быть и совпадающие множества.

Конечно, графы имеют неоспоримое преимущество перед гиперграфами: их гораздо удобнее рисовать. Типичный «портрет» гиперграфа изображен на рисунке 4. Ребра напоминают эдакие сардельки, и я постоянно упоминаю в лекциях этот аппетитный факт. Смотреть приятно, но понимать, что там за варево, труднее.

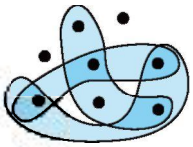

Рис. 4

Гиперграфы тоже можно красить. Давайте, как и прежде, красить вершины, причем только в два цвета. Условно назовем эти цвета красным и синим. Какая раскраска «лучше»? Ну, например, та, в которой в каждом ребре примерно поровну красных и синих вершин. Разумеется, далеко не всегда такого удается добиться. Очень красивая и нетривиальная теорема звучит следующим образом.

Теорема 1. *Для любого натурального k существует $m \in [k;8k]$ и существует гиперграф $H = (V, E)$, обладающий следующими свойствами: (1) $|V| = |E| = m$ (здесь и далее модуль множества – это его мощность, т.е. количество элементов в нем), (2) при любой раскраске множества V в красный и синий цвета найдется ребро $e \in E$, в котором разность чисел красных и синих вершин по модулю не меньше $\frac{\sqrt{m}}{2}$.*

Теорема говорит о том, что для произвольного гиперграфа не только не получится добиться того, чтобы в каждом ребре было поровну (или почти поровну) вершин красного и синего цветов, но и не получится сделать так, чтобы в каждом ребре числа вершин разного цвета отличались меньше, чем на величину порядка корня от количества вершин и ребер. Иными словами, бывают гиперграфы, на которых *уклонение* любой раскраски от разбиения каждого ребра на две почти равные части весьма велико.

Доказательство теоремы 1 и множество других интересных сведений про *задачу об уклонении* можно найти в брошюрах [5], [6], в книге [7], а также в статье [8]. В частности, там доказано, что в некотором смысле теорема 1 неулучшаема. Еще была очень близкая по теме статья [9], но там до задач об уклонении дело не дошло.

Катарсис[1]

Олимпиадная оценка допускает следующее феерическое усиление.

Теорема 2. *Пусть $32(s+1)^2 \le n$. Тогда $\chi(J(n,s)) \le 64(s+1)^2$.*

Это действительно очень мощный ход. Вместо экспоненциальной оценки получаем квадратичную! Конечно, зазор между $s+2$ (нижняя оценка) и $64(s+1)^2$ выглядит намного приличнее, чем зазор между $s+2$ и $2C_{2s+1}^{s}$. Однако зазор по-прежнему есть, и, как я обещал в начале статьи, мы выходим здесь на передний край науки: устранение этого зазора – открытая проблема! Сомножитель 64 не оптимален. Его можно уменьшить. Но это и все, что мы сейчас умеем. Придумали эту оценку Д.Черкашин, С.Киселев и Й.Балог примерно в 2018 году. Их рассуждение – это обобщение идеи из решения олимпиадной задачи. Ну, скоро все увидим.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, заметим еще, что в ней есть ограничение на s, которое отсутствует в случае олимпиадной оценки. На самом деле, при бóльших значениях s есть еще

[1] Катарсис – это слово, которое я часто употребляю в лекциях, имея в виду восторг, который после долгого и, казалось бы, трудного доказательства должен испытать слушатель, неожиданно осознавший в конце, что же случилось. Ударение правильно ставить на любую из букв «а», хотя считается, что на первую – лучше. Лично я почему-то люблю говорить «катáрсис». Читаем в словаре литературоведческих терминов: «катарсис (др.-греч. – возвышение, очищение, оздоровление) – ...очищение, просветление человеческой души под влиянием сопереживания, сострадания, потрясения, вызванного соприкосновением человека с произведением искусства». А математика – это искусство!

нетривиальные подходы (совсем другие!), которые также позволяют значительно уточнить олимпиадное неравенство. Но это уже выходит за рамки данной статьи.

Доказательство теоремы 2. Теорема 1 верна для любого k. Рассмотрим $k = 4(s+1)^2$, возьмем соответствующее $m \in \left[4(s+1)^2; 32(s+1)^2\right]$ и соответствующий гиперграф $H = (V, E)$. Поскольку $32(s+1)^2 \le n$, то $m \le n$. У нас есть множество $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$, из которого формируются вершины графа $J(n,s)$. Давайте отождествим вершины гиперграфа H с первыми m числами из множества $\mathcal{R}_n$ (фактически просто занумеруем вершины гиперграфа). Тогда $V = \mathcal{R}_m$ и каждое ребро $e \in E$ – подмножество в $\mathcal{R}_m \subset \mathcal{R}_n$. При этом каждая вершина A графа $J(n,s)$ – это тоже подмножество в $\mathcal{R}_n$ мощности $n/2$. Таким образом, мы вполне можем пересекать между собою ребра гиперграфа и вершины графа. Забавно?

Зафиксируем произвольное ребро $e \in E$. Если вершина A графа $J(n,s)$ такова, что $|A \cap e| \ge \frac{|e| + s + 1}{2}$, то красим вершину A в цвет, который обозначим $\chi_1(e)$. Пусть $\overline{A} = \mathcal{R}_n \setminus A$. Если вершина A графа $J(n,s)$ такова, что $\left|\overline{A} \cap e\right| \ge \frac{|e| + s + 1}{2}$, то красим вершину A в цвет, который обозначим $\chi_2(e)$. Конечно, никакая вершина не может оказаться покрашенной сразу в оба цвета $\chi_1(e)$ и $\chi_2(e)$, ведь иначе получилось бы, что ребро e пересекает и вершину A, и ее дополнение $\overline{A}$ по строго более чем половине своих элементов, что, очевидно, невозможно. Однако остаются еще три вопроса, ответы на которые завершат доказательство теоремы. Приведем эти вопросы.

Вопрос 1. Все-таки одна и та же вершина может оказаться покрашенной сразу в несколько цветов. Только эти цвета будут соответствовать разным ребрам гиперграфа, т.е. вполне может случиться так, что вершина A покрашена в цвета $\chi_1(e_1)$ и $\chi_2(e_2)$ или в цвета $\chi_1(e_1)$ и $\chi_1(e_2)$. Что делать?

Вопрос 2. Вполне может случиться так, что какая-то вершина A вовсе не покрашена. Так будет, если для каждого $e \in E$ одновременно выполнены неравенства

$$|A \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2},$$

$$\left|\overline{A} \cap e\right| < \frac{|e| + s + 1}{2}.$$

Но так ли это?

Вопрос 3. Если все-таки две разные вершины покрашены в один и тот же цвет, то почему между ними нет ребра?

Давайте снимем вопросы. Сначала ответим на вопрос 1, потом – на вопрос 3, а в самом конце – на вопрос 2.

Ответ на вопрос 1. Тут все совсем просто. Если какая-то вершина покрашена в несколько цветов, то выберем любой один из них.

Ответ на вопрос 3. Понятно, что если какие-то две вершины A, B покрашены в один и тот же цвет $\chi_1(e)$, то уже внутри ребра e они пересекаются по, как минимум, $s+1$ элементам (рис. 5), а значит, ребра в $J(n,s)$ между A и B нет. Таким образом, покраска в цвет $\chi_1(e)$ корректна. Если же A и B покрашены в цвет $\chi_2(e)$, то аналогично получаем, что $\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| \ge s+1$. Но

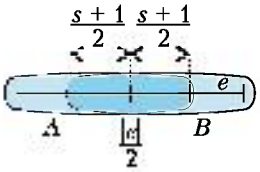

Рис. 5

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = n - |A \cup B| = n - |A| - |B| + |A \cap B| =$$

$$= n - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + |A \cap B| = |A \cap B|,$$

так что $|A \cap B| \ge s+1$, и снова покраска корректна.

Ответ на вопрос 2. Давайте убедимся, что все вершины графа $J(n,s)$ покрашены. Пусть A – произвольная вершина. Нам нужно найти такое ребро $e \in E$, что либо $|A \cap e| \ge \frac{|e| + s + 1}{2}$, либо $\left|\overline{A} \cap e\right| \ge \frac{|e| + s + 1}{2}$.

Для этого мы покрасим... гиперграф! А именно, покрасим вершины гиперграфа H, т.е. элементы множества $\mathcal{R}_m$, в два цвета: элементы, попадающие в множество A, покрасим в синий цвет, а элементы, попадающие в $\overline{A}$, сделаем красными. Мы знаем (по теореме 1), что при любой раскраске вершин гиперграфа H найдется ребро $e \in E$ с большим уклонением, т.е.

$$\left||e \cap A| - |e \cap \overline{A}|\right| \geq \frac{\sqrt{m}}{2},$$

где $|e \cap A|$ – число синих вершин в ребре e, а $|e \cap \overline{A}|$ – число красных вершин в том же ребре. Поскольку $m \geq k = 4(s+1)^2$, имеем $\frac{\sqrt{m}}{2} \geq s+1$.

Докажем, что найденное ребро и есть то, что мы ищем. Предположим противное:

$$|A \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}, \quad |\overline{A} \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}.$$

Если мы придем к противоречию, то A будет покрашена, а стало быть, и все вершины графа $J(n,s)$ будут покрашены по аналогии. Итак, во-первых, $|A \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}$. Значит, $|\overline{A} \cap e| < \frac{|e|-s-1}{2}$, откуда

$$|A \cap e| - |\overline{A} \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2} - \frac{|e|-s-1}{2} = s+1.$$

Во-вторых, $|\overline{A} \cap e| < \frac{|e|+s+1}{2}$. Значит, $|A \cap e| < \frac{|e|-s-1}{2}$, откуда

$$|A \cap e| - |\overline{A} \cap e| > \frac{|e|-s-1}{2} - \frac{|e|+s+1}{2} = -s-1.$$

В итоге получаем, что

$$\left||A \cap e| - |\overline{A} \cap e|\right| < s+1,$$

и это противоречит неравенству

$$\left||e \cap A| - |e \cap \overline{A}|\right| \geq \frac{\sqrt{m}}{2} \geq s+1.$$

Итак, мы покрасили все вершины графа $J(n,s)$. Сколько цветов мы использовали? Точно не больше, чем $2|E| = 2m < 16k = 64(s+1)^2$. Это катарсис.

Как мы говорили выше, теорема 1 неулучшаема, разве что константу в ней можно улучшить. Поэтому трудно ожидать, что аналогичными методами удастся серьезно продвинуться в вопросе получения верхних оценок хроматического числа.

Завершая статью, скажем, что изучение графов $J(n,s)$ и их различных обобщений глубоко мотивировано вопросами теории кодирования, теории Рамсея, комбинаторной геометрии и др. Например, хроматические числа этих графов связаны со знаменитой задачей о хроматическом числе пространства (см. [10], [11]), с не менее знаменитой проблемой Борсука (см. [5], [12]) и др.

Литература

1. LXXXV Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. – М.: МЦНМО, 2022.
2. *А.М.Райгородский*. Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2011.
3. *А.Райгородский*. Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. – «Квант», 2011, №1.
4. *А.М.Райгородский*. Об одной «олимпиадной» задаче про графы. – «Квант», 2017, №2.
5. *А.М.Райгородский*. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2015.
6. *А.М.Райгородский*. Задачи о раскрасках. – М.: МЦНМО, 2020.
7. *Н.Алон, Дж.Спенсер*. Вероятностный метод. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
8. *А.М.Райгородский*. Математика раскрасок. – Математическое просвещение, сер. 3, вып.27, с. 99–127, 2021.
9. *А.Райгородский*. Одна задача о раскраске. – «Квант», 2019, №8.
10. *А.М Райгородский*. Хроматические числа. – М.: МЦНМО, 2015.
11. *А.Райгородский, В.Воронов, А.Саввате-ев*. Прорыв в задаче о раскраске плоскости. – «Квант», 2018, №11.
12. *А.М.Райгородский*. Проблема Борсука. – М.: МЦНМО, 2015.