А. И. Кибзун, В. Л. Мирошкин, Об одной математической модели движения КА в декартовых координатах, *Матем. моделирование*, 2009, том 21, номер 6, 17–27

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2009 г., том 21, номер 6, стр.17-27

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

© *2009 г.* ***А.И. Кибзун, В.Л. Мирошкин***

Московский авиационный институт (Государственный технический университет) 125993, г.Москва, Волоколамское ш., д.4

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-08-00369

В статье приводится математическая модель движения КА с колеблющимися в баках КА жидкими компонентами топлива. Для моделирования колебаний жидких компонентов топлива в баках использован "механический аналог" колебаний жидкости – колебания сферических маятников. Все дифференциальные уравнения записаны в векторной форме в декартовых координатах. Обсуждаются отличия приведенной модели от известных. Обсуждается применение приведенной модели для имитационного моделирования движения КА.

ABOUT THE MATHEMATICAL MODEL OF SPACE VEHICLE MOTION

A.I. Kibzun, V.L. Miroshkin

Moscow Aviation Institute

Mathematical model of space vehicle motion is described in the article. In the mathematical model the space vehicle is considered as a rigid body with internal material moving points (a mechanical analog of hydrodynamics). The spherical pendulums are used for modelling of material moving points. All differential equations are written in cartesian coordinates. The differences the mathematical model and other mathematical models of space vehicle motion are discussed in the article.

1. Введение

В статье приводится математическая модель движения КА для моделирования на ЭВМ динамики КА с колеблющимися в баках жидкими компонентами топлива.

Традиционный подход к математическому моделированию движения КА с жидкостью в баках включает в себя разделение движения КА на невозмущенное и возмущенное. Под невозмущенным движением понимают программное движение, реализующееся при упрощающих предположениях, характерных для постановки задачи внешней баллистики (движение материальной точки переменной массы), при номинальных параметрах объекта и отсутствии возмущающих сил и моментов. Отметим, что значения параметров программного движения определяются до пуска и не подлежат какому–либо изменению или уточнению в процессе движения КА. Под возмущенным движением понимают движение, характеризующееся разностями между обобщенными координатами истинного и невозмущенного движений. Предполагается, что эти разности — малые величины в том смысле, что можно пренебречь их квадратами и более высокими степенями, а также квадратами и более высокими степенями соответствующих производных по времени [1]. Уравнения для возмущенного движения с колебаниями жидкости записываются относительно метацентров в предположении "плавающей крышки" (уравнения Рабиновича) или относительно центра масс в предположении "жесткой крышки" (уравнения Нариманова) [1, 2]. Связь между этими уравнениями приведена, например, в [2]. Колебания жидкости в этих моделях возмущенного движения описываются уравнениями колебаний математических маятников. Обоснование применимости математических маятников для моделирования колебаний жидкости содержится, например, в [1]. Следует отметить, что в большей части литературы, посвященной математическим моделям возмущенного движения, модель колебаний жидкости в виде колебаний математических маятников принимается без обсуждения (как данность) с приведением соответствующих ссылок.

Рассмотренный выше подход используется для моделирования возмущенного движения КА на активных участках полета при использовании программного управления. Кроме того, одной из причин раздельного моделирования невозмущенного и возмущенного движения является относительная “слабость” вычислительной техники на заре создания космической техники.

Разрабатываемые в настоящее время РН и РБ имеют существенное отличие от предшественников. Это отличие заключается в том, что их наведение является кусочно программным. При таком наведении в процессе движения КА в заранее (до пуска) определенные моменты времени рассчитываются новые значения параметров программного движения КА. Это означает, что значения параметров программного движения КА зависят от истинного движения КА. Следовательно, для математического моделирования движения РБ и РН необходимо использование математических моделей движения КА, наиболее точно описывающих истинное движение КА. Одним из подходов к этой задаче является объединение моделей невозмущенного и возмущенного движения.

В настоящее время повышаются требования по точности терминальных параметров динамики РН и КА. Это требует использования более точных моделей динамики РН и КА. В [3] предложена нелинейная модель возмущенного движения симметричного КА как движения твердого тела с подвешенным в нем сферическим маятником. Однако дифференциальные уравнения динамики РН в этой модели не разрешены относительно старших производных по времени, а дифференциальные уравнения относительного движения сферических маятников записаны в скалярной форме. Такая форма записи модели неудобна для применения численных методов решения СДУ на ЭВМ.

Предлагаемая в статье модель динамики РН с учетом колебаний жидких компонентов топлива в баках также использует модель колебаний жидких компонентов топлива в баках в виде колебаний сферических маятников. Однако в предлагаемой модели уравнения относительного движения сферических маятников записаны в декартовых координатах. Это позволило записать все дифференциальные уравнения в матричной форме и исключить старшие производные координат сферического маятника из дифференциальных уравнений динамики РН. В разделе РН рассматривается как твердое тело. В статье используются следующие обозначения:

o– начало инерциальной системы координат (ИСК);

p– полюс связанной с КА системы координат (ССК);

c– центр масс системы твердое тело – сферические маятники;

d_i– точка подвеса i-го сферического маятника;

a_i– i-я материальная точка (i– сферический маятник);

e– точка, в которой находится центр масс твердого тела без маятников;

r_{ab}– вектор с началом в точке a и концом в точке b в ИСК;

ρ_{ab}– вектор с началом в точке a и концом в точке b в ССК;

ω– угловая скорость твердого тела (ССК) в ИСК;

ω'– угловая скорость твердого тела (ССК) в ССК;

e_j – j-й орт ССК в ИСК;

e'_j – j-й орт ИСК в ССК;

$\dfrac{dr_{ab}}{dt}$– абсолютная производная по времени вектора r_{ab};

$\dot{r}_{ab}$– относительная производная по времени вектора r_{ab};

m_{a_i}– масса i-й материальной точки;

m_e– масса твердого тела без сферических маятников;

M– масса твердого тела со сферическими маятниками;

J_p– тензор инерции твердого тела с "замороженными" сферическими маятниками;

F_p- равнодействующая внешних сил, действующих на систему твердое тело – сферические маятники в точке p;

T_p- момент внешних сил, действующих на систему твердое тело – сферические маятники в точке p;

$g(r_{oa})-$ сила тяжести в точке a;

$r_1 r_2-$ скалярное произведение векторов r_1 и r_2;

$r_1 \times r_2-$ векторное произведение векторов r_1 и r_2;

$S(\cdot) : S(r_1)r_2 \ = \ r_1 \times r_2-$ матрица, определяющая векторное произведение векторов r_1 и r_2.

Матрица $S(\cdot)$ записывается следующим образом:

$$S(r_1) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $S(\cdot)$ обладает следующими свойствами:

$$r_1(\times r_2(\times r_3(\times \ldots \times (r_{n-1} \times r_n)))) \ = \ S(r_1)S(r_2)S(r_3)\ldots S(r_{n-1})r_n,$$

$$S^2(r_1) \ = \ \begin{pmatrix} -y_1^2 - z_1^2 & x_1 y_1 & z_1 x_1 \\ x_1 y_1 & -x_1^2 - z_1^2 & z_1 y_1 \\ z_1 x_1 & z_1 y_1 & -x_1^2 - y_1^2 \end{pmatrix}.$$

Абсолютная и относительная производные вектора по времени связаны следующими соотношениями: $\dfrac{dr}{dt} \ = \ \dot{r} + \omega \times r \ = \ \dot{r} + S(\omega)r.$

1.1. Уравнения движения КА в декартовой системе координат. Во введенных выше обозначениях система дифференциальных уравнений, описывающая динамику твердого тела с подвешенными внутри сферическими маятниками относительно ИСК, имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l}
\big[MI_3 + \sum\limits_i m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} S^2(r_{d_i a_i})\big] \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} - \big[MS(r_{pc}) - \sum\limits_i m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) S(r_{pa_i})\big] \dfrac{d\omega}{dt} \ = \\
= \ F_p + \sum\limits_i m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) g(r_{oa}) - MS^2(\omega) r_{pc} \ - \sum\limits_i m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) S^2(\omega) r_{pa_i} - \\
- \sum\limits_i 2m_{a_i}(r_{d_i a_i}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) + I_3) S(\omega) \dot{r}_{pa_i} + \sum m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} \dot{r}_{d_i a_i}^2 r_{d_i a_i} \,, \\
\big[MS(r_{pc}) + \sum\limits_i m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} S(r_{pa_i}) S^2(r_{d_i a_i})\big] \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} + \\
+ \big[J_p - \sum\limits_i m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} S(r_{pa_i}) S^2(r_{d_i a_i}) S(r_{pa_i})\big] \dfrac{d\omega}{dt} = \\
= \ T_p + \sum\limits_i m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} S(r_{pa_i}) S^2(r_{d_i a_i}) g(r_{oa}) - \omega \times (J_p \omega) - \\
- \sum\limits_i m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} S(r_{pa_i}) S^2(r_{d_i a_i}) S^2(\omega) r_{pa_i} - \\
- \sum\limits_i 2m_{a_i} S(r_{pa_i})(r_{d_i a_i}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) + I_3) S(\omega) \dot{r}_{pa_i} + \\
+ \sum m_{a_i} r_{d_i a_i}^{-2} \dot{r}_{d_i a_i}^2 S(r_{pa_i}) r_{d_i a_i} \,, \\
\ddot{r}_{pa_i} \ = r_{da}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} \ \ + r_{da}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) S(r_{pa_i}) \dfrac{d\omega}{dt} - \\
- r_{da}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) g(r_{oa}) + r_{da}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) S^2(\omega) r_{pa_i} + \\
+ 2r_{da}^{-2} S^2(r_{d_i a_i}) S(\omega) \dot{r}_{pa_i} - r_{da}^{-2} r_{d_i a_i} \dot{r}_{pa_i}^2 \,, \\
\dfrac{de_j}{dt} \ = \ S(\omega) e_j.
\end{array}\right. \qquad (1)$$

а относительно ССК имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{op} \;=\; \dot{\rho}_{op} - S(\omega')\rho_{op}\,, \\ \big[MI_3 + \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})\big]\ddot{\rho}_{op} - \big[MS(\rho_{pc}) - \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})S(\rho_{pa_i})\big]\dot{\omega}' \;= \\ =\; F_p + \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})g(\rho_{oa}) - MS^2(\omega')\rho_{pc} \;\; - \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})S^2(\omega')\rho_{pa_i} - \\ \;\; - \sum\limits_i 2m_{a_i}(\rho_{d_ia_i}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i}) + I_3)S(\omega')\dot{\rho}_{pa_i} + \sum m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}\dot{\rho}_{d_ia_i}^2\rho_{d_ia_i} - \\ \;\; - \big[MI_3 + \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})\big]S(\omega')\dot{\rho}_{op}\,, \\ \big[MS(\rho_{pc}) + \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S(\rho_{pa_i})S^2(\rho_{d_ia_i})\big]\ddot{\rho}_{op} + \\ + \big[J_p - \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S(\rho_{pa_i})S^2(\rho_{d_ia_i})S(\rho_{pa_i})\big]\dot{\omega}' = \\ =\; T_p + \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S(\rho_{pa_i})S^2(\rho_{d_ia_i})g(\rho_{oa}) - \omega' \times (J_p\omega') - \\ \;\; - \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S(\rho_{pa_i})S^2(\rho_{d_ia_i})S^2(\omega')\rho_{pa_i} - \\ \;\; - \sum\limits_i 2m_{a_i}S(\rho_{pa_i})(\rho_{d_ia_i}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i}) + I_3)S(\omega')\dot{\rho}_{pa_i} \;\; + \sum m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}\dot{\rho}_{d_ia_i}^2 S(\rho_{pa_i})\rho_{d_ia_i} - \\ \;\; - \big[MS(\rho_{pc}) + \sum\limits_i m_{a_i}\rho_{d_ia_i}^{-2}S(\rho_{pa_i})S^2(\rho_{d_ia_i})\big]S(\omega')\dot{\rho}_{op}\,, \\ \ddot{\rho}_{pa_i} \;= \rho_{da}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})\ddot{\rho}_{op} \;\; + \rho_{da}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})S(\rho_{pa_i})\dfrac{d\omega'}{dt} - \\ \;\; - \rho_{da}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})g(\rho_{oa}) + \rho_{da}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})S^2(\omega')\rho_{pa_i} + \\ \;\; + \rho_{da}^{-2}S^2(\rho_{d_ia_i})S(\omega')(2\dot{\rho}_{pa_i} + \upsilon_{op}) - \rho_{da}^{-2}\rho_{d_ia_i}\dot{\rho}_{pa_i}^2\,, \\ \dot{e}_j' \;=\; -S(\omega)e_j'. \end{cases} \tag{2}$$

Вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику твердого тела с подвешенными внутри сферическими маятниками, приведен в приложении.

Отметим ряд особенностей предложенной в статье математической модели.

1. Для применения численных методов интегрирования система дифференциальных уравнений должна быть записана в форме Коши. В отличие от системы дифференциальных уравнений из [3], системы дифференциальных уравнений (1) и (2) могут быть легко приведены к форме Коши. Матрицы, являющиеся блоками матрицы левой части системы дифференциальных уравнений, записаны в скобках при производных по времени.

2. Предложенная математическая модель предназначена для имитационного моделирования на ЭВМ движения КА с большими продольными ускорениями. В [5] предложена математическая модель движения КА с малыми продольными ускорениями. Система дифференциальных уравнений из [5] может быть легко приведена к виду, аналогичному (1) или (2) (отличия только в правой части и в слагаемых в скобках при производных по времени). Это позволяет при проведении имитационного моделирования на ЭВМ реализовать достаточно простой алгоритм переключения между математической моделью для больших ускорений и математической моделью для малых ускорений. Для математических моделей из [3] и [5] это сделать сложно.

3. На практике [1–3] считается, что $\dot{r}_{d_ia_i} = 0$, поэтому в уравнениях слагаемые, содержащие $\dot{r}_{d_ia_i}$ можно исключить.

4. Применение сферических маятников позволяет для баков цилиндрической формы учитывать “немалые” колебания жидкости, а математических маятников - только “малые”. Подробно об этом написано в [3]. “Немалые” колебания жидких компонентов топлива в баках возникают в моменты переключения программного управления в системах управления с кусочно-программным наведением.

2. Приложение

2.1. Вывод уравнений движения КА как твердого тела переменной массы с движущимися материальными точками. Пусть твердое тело переменной массы состоит из n материальных точек переменной массы. Для материальной точки переменной массы известно уравнение Мещерского

$$\frac{d(m_i v_i)}{dt} = F_i^{(e)} + F_i^{(i)} + \frac{dm_i}{dt} u_i.$$

Здесь $F_i^{(e)}$– равнодействующая внешних сил, $F_i^{(i)}$–равнодействующая внутренних сил, u_i– абсолютная скорость i-й материальной точки.

Пусть точка p– полюс связанной с твердым телом переменной массы системы координат. Тогда для твердого тела переменной массы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(m_i v_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} F_i^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt} u_i \tag{3}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} r_{p_i} \times \frac{d(m_i v_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} r_{p_i} \times F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} r_{p_i} \times F_i^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} r_{p_i} \times \frac{dm_i}{dt} u_i. \tag{4}$$

Для твердого тела, согласно третьему закону Ньютона, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^{(i)} = 0 \tag{5}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times F_i^{(i)} = 0. \tag{6}$$

Преобразуем вначале (3), учитывая, что $u_i = v_{op} + \omega \times r_{pi} + \Delta u_i$ и (5):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d(m_i(v_{op} + \omega \times r_{pi}))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt}(v_{op} + \omega \times r_{pi} + \Delta u_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt}(v_{op} + \omega \times r_{pi}) + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d(v_{op} + \omega \times r_{pi})}{dt} = \\ = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt}(v_{op} + \omega \times r_{pi}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt} \Delta u_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d(v_{op} + \omega \times r_{pi})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt} \Delta u_i.$$

В итоге (3) принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dv_{op}}{dt} + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\omega}{dt} \times r_{pi} = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt} \Delta u_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \omega \times (\omega \times r_{pi}). \tag{7}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} F^{(e)} &= \sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)}, \\ R &= \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i}{dt} \Delta u_i. \end{aligned} \tag{8}$$

В (8) $F^{(e)}-$ равнодействующая всех внешних сил, а $R-$ реактивная сила. Подставляя (8) в (7), получим

$$M_d \frac{d^2 r_{op}}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} \times M_d r_{pd} = F^{(e)} + R - \omega \times (\omega \times M_d r_{pd}). \tag{9}$$

Теперь преобразуем (4), учитывая, что $u_i = v_{op} + \omega \times r_{pi} + \Delta u_i$ и (6):

$$\sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times \frac{d(m_i(v_{op} + \omega \times r_{pi}))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times \frac{dm_i}{dt}(v_{op} + \omega \times r_{pi} + \Delta u_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times \frac{dm_i}{dt}(v_{op} + \omega \times r_{pi}) + \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times m_i \frac{d(v_{op} + \omega \times r_{pi})}{dt} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times \frac{dm_i}{dt}(v_{op} + \omega \times r_{pi}) + \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times \frac{dm_i}{dt}\Delta u_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times m_i \frac{d(v_{op} + \omega \times r_{pi})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times \frac{dm_i}{dt}\Delta u_i.$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times m_i \frac{dv_{op}}{dt} + \sum_{i=1}^{n} m_i r_{pi} \times (\frac{d\omega}{dt} \times r_{pi}) + \sum_{i=1}^{n} m_i r_{pi} \times (\omega \times (\omega \times r_{pi})) = \\ = \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{n} r_{pi} \times \frac{dm_i}{dt}\Delta u_i.\end{gathered} \tag{10}$$

Обозначим

$$T_p^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} r_{p_i} \times F_i^{(e)}, \qquad T_p^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} r_{p_i} \times \frac{dm_i}{dt}\Delta u_i. \tag{11}$$

В (11) $T_p^{(e)}-$ момент всех внешних сил в полюсе p, а $T_p^{(R)}-$ момент реактивных сил в полюсе p. Подставляя (11) в (10), получим

$$M_d r_{pd} \times \frac{d^2 r_{op}}{dt^2} + J_p^{(d)} \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (J_p^{(d)} \omega) = T_p^{(e)} + T_p^{(R)}.$$

В итоге (4) принимает следующий вид:

$$M_d r_{pd} \times \frac{d^2 r_{op}}{dt^2} + J_p^{(d)} \frac{d\omega}{dt} = T_p^{(e)} + T_p^{(R)} - \omega \times (J_p^{(d)} \omega). \tag{12}$$

Объединяя (9) и (12) в систему, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику твердого тела переменной массы.

$$\begin{cases} M_d \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} - M_d r_{pd} \times \dfrac{d\omega}{dt} = F^{(e)} + R - \omega \times (\omega \times M_d r_{pd}), \\ M_d r_{pd} \times \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} + J_p^{(d)} \dfrac{d\omega}{dt} = T_p^{(e)} + T_p^{(R)} - \omega \times (J_p^{(d)} \omega). \end{cases} \tag{13}$$

В системе (13) первое уравнение описывает поступательное движение полюса p, а второе уравнение описывает вращение твердого тела переменной массы вокруг поступательно движущейся точки p.

В предлагаемой модели внутри твердого тела движутся материальные точки a_i переменной массы m_{a_i}. Для точек m_{a_i} можно записать уравнение движения в следующем виде:

$$m_{a_i} \frac{d^2 r_{oa_i}}{dt^2} = (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i}) + N_{a_i}. \tag{14}$$

В (14) N_{a_i} есть реакция со стороны твердого тела переменной массы на движение материальной точки a_i переменной массы m_{a_i}. В силу третьего закона Ньютона, на твердое тело переменной массы также действует реакция N со стороны материальных точек m_{a_i}, причем имеет место равенства

$$\begin{aligned} & N = -\sum_{i=1}^{n} N_{a_i}, \\ & T_p^{(N)} = -\sum_{i=1}^{n} r_{pa_i} \times N_{a_i}. \end{aligned} \tag{15}$$

В (15) $T_p^{(N)}$– момент реакции относительно полюса p, а b_i– точка приложения реакции N_{a_i}.

В дальнейшем, для ясности, будем рассматривать реакцию N вне равнодействующей внешних сил F_p^e (хотя формально реакция входит в равнодействующую внешних сил).

Объединяя (13), (14) и (15), получим

$$\begin{cases} M_d \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} - M_d r_{pd} \times \dfrac{d\omega}{dt} = F^{(e)} + R - \omega \times (\omega \times M_d r_{pd}) - \sum\limits_{i=1}^{n} N_{a_i}, \\ M_d r_{pd} \times \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} + J_p^{(d)} \dfrac{d\omega}{dt} = T_p^{(e)} + T_p^{(R)} - \omega \times (J_p^{(d)} \omega) - \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pb_i} \times N_{a_i}, \\ m_{a_i} \dfrac{d^2 r_{oa_i}}{dt^2} = (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i}) + N_{a_i}. \end{cases} \tag{16}$$

Выразим из последнего уравнения системы (16) N_{a_i} и подставим его в первые два уравнения системы (16), получим

$$\begin{cases} M_d \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} - M_d r_{pd} \times \dfrac{d\omega}{dt} = \\ \quad = F^{(e)} + R - \omega \times (\omega \times M_d r_{pd}) - \sum\limits_{i=1}^{n} (m_{a_i} \dfrac{d^2 r_{oa_i}}{dt^2} - (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i})), \\ M_d r_{pd} \times \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} + J_p^{(d)} \dfrac{d\omega}{dt} = \\ \quad = T_p^{(e)} + T_p^{(R)} - \omega \times (J_p^{(d)} \omega) - \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pa_i} \times (m_{a_i} \dfrac{d^2 r_{oa_i}}{dt^2} - (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i})), \\ m_{a_i} \dfrac{d^2 r_{oa_i}}{dt^2} = (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i}) + N_{a_i}. \end{cases} \tag{17}$$

Из (17) получаем

$$\begin{cases} M_d \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} - M_d r_{pd} \times \dfrac{d\omega}{dt} = F^{(e)} + R - \omega \times (\omega \times M_d r_{pd}) - \\ \quad - \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i} \dfrac{d^2 (r_{op} + r_{pa_i})}{dt^2} + \sum\limits_{i=1}^{n} (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i}), \\ M_d r_{pd} \times \dfrac{d^2 r_{op}}{dt^2} + J_p^{(d)} \dfrac{d\omega}{dt} = T_p^{(e)} + T_p^{(R)} - \omega \times (J_p^{(d)} \omega) - \\ \quad - \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pb_i} \times m_{a_i} \dfrac{d^2 (r_{op} + r_{pa_i})}{dt^2} + \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pb_i} \times (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i})), \\ m_{a_i} \dfrac{d^2 r_{oa_i}}{dt^2} = (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i}) + N_{a_i}. \end{cases} \tag{18}$$

Далее из (18) получаем

$$\begin{cases} M_d\dfrac{d^2r_{op}}{dt^2} - M_d r_{pd}\times\dfrac{d\omega}{dt} = F^{(e)} + R - \omega\times(\omega\times M_d r_{pd}) - \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i}\dfrac{d^2r_{op}}{dt^2} - \\ - \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i}(\ddot r_{pa_i} + 2\omega\times\dot r_{pa_i} - r_{pa_i}\times\dfrac{d\omega}{dt} + \omega\times(\omega\times r_{pa_i})) + \sum\limits_{i=1}^{n}(F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i})\,, \\ M_d r_{pd}\times\dfrac{d^2r_{op}}{dt^2} + J_p^{(d)}\dfrac{d\omega}{dt} = T_p^{(e)} + T_p^{(R)} - \omega\times(J_p^{(d)}\omega) - \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pa_i}\times m_{a_i}\dfrac{d^2r_{op}}{dt^2} - \\ \quad - \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pb_i}\times m_{a_i}(\ddot r_{pa_i} + 2\omega\times\dot r_{pa_i} - r_{pa_i}\times\dfrac{d\omega}{dt} + \omega\times(\omega\times r_{pa_i})) + \\ \quad + \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pb_i}\times(F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i}))\,, \\ m_{a_i}\dfrac{d^2r_{oa_i}}{dt^2} = (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i}) + N_{a_i}. \end{cases} \tag{19}$$

В системе уравнений (19) все слагаемые, содержащие абсолютные производные по времени перенесем в левую часть уравнений, а все слагаемые, содержащие относительные производные по времени или вообще не содержащие производных по времени, перенесем в правую часть уравнений. Сгруппировав слагаемые, получим

$$\begin{cases} (M_d + \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i})\dfrac{d^2r_{op}}{dt^2} - (M_d r_{pd} + \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i}r_{pa_i})\times\dfrac{d\omega}{dt} = (F^{(e)} + \sum\limits_{i=1}^{n}(F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)})) + \\ \quad + (R + \sum\limits_{i=1}^{n} R_{a_i}) - \omega\times(\omega\times(M_d r_{pd} + \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i}r_{pa_i})) - \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i}(\ddot r_{pa_i} + 2\omega\times\dot r_{pa_i})\,, \\ (M_d r_{pd} + \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i}r_{pa_i})\times\dfrac{d^2r_{op}}{dt^2} + (J_p^{(d)} - \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i}S(r_{pa_i})S(r_{pa_i}))\dfrac{d\omega}{dt} = \\ \quad = (T_p^{(e)} + \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pa_i}\times(F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)})) + (T_p^{(R)} + \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pa_i}\times R_{a_i}) - \\ \quad - \omega\times((J_p^{(d)} - \sum\limits_{i=1}^{n} m_{a_i}S(r_{pa_i})S(r_{pa_i}))\omega) - \sum\limits_{i=1}^{n} r_{pa_i}\times m_{a_i}(\ddot r_{pa_i} + 2\omega\times\dot r_{pa_i})\,, \\ m_{a_i}\dfrac{d^2r_{oa_i}}{dt^2} = (F_{a_i}^{(e)} + F_{a_i}^{(i)} + R_{a_i}) + N_{a_i}. \end{cases} \tag{20}$$

В системе (20) первые два дифференциальных уравнения описывают динамику твердого тела переменной массы, содержащего внутри себя движущиеся материальные точки переменной массы. Эти уравнения содержат относительное ускорение $\ddot r_{pa_i}$ материальных точек переменной массы a_i. Следовательно, необходимо получить уравнение для относительного ускорения $\ddot r_{pa_i}$, используя третье уравнение системы (20) и принятую модель движения материальной точки переменного состава.

2.2. Вывод уравнения относительного движения сферического маятника переменной длины. Пусть сферический маятник массы m_a в момент времени t находится в точке a. Пусть точка $d-$ точка подвеса (центр кривизны) сферического маятника. При выводе уравнения относительного движения сферического маятника будем предполагать, что при движении сферического маятника отсутствует трение. Следовательно, реакция связи N направлена строго вдоль направления da. Уравнения относительного движения сферического маятника будем получать при помощи теоремы об изменении количества движения.

$$\frac{d^2r_{oa}}{dt^2} = g(r_{oa}) + \frac{N}{m}, \qquad \frac{d^2(r_{op}+r_{pa})}{dt^2} = g(r_{oa}) + \frac{N}{m},$$

$$\frac{d^2(r_{pa})}{dt^2} = g(r_{oa}) - \frac{d^2(r_{op})}{dt^2} + \frac{N}{m}, \qquad r_{da}\times\frac{d^2r_{pa}}{dt^2} = r_{da}\times\left(g(r_{oa}) - \frac{d^2r_{op}}{dt^2}\right),$$

$$r_{da}\times(\ddot r_{pa} + 2\omega\times\dot r_{pa} + \dot\omega\times r_{pa} + \omega\times(\omega\times r_{pa})) = r_{da}\times\left(g(r_{oa}) - \frac{d^2r_{op}}{dt^2}\right),$$

$$r_{da} \times \ddot{r}_{pa} \;=\; r_{da} \times \left(g(r_{oa}) - \frac{d^2 r_{op}}{dt^2} - 2\omega \times \dot{r}_{pa} - \dot{\omega} \times r_{pa} - (\omega \times r_{pa}) \right),$$

$$S(r_{da})\ddot{r}_{pa} \;=\; S(r_{da}) \left(g(r_{oa}) - \frac{d^2 r_{op}}{dt^2} - 2\omega \times \dot{r}_{pa} - \dot{\omega} \times r_{pa} - (\omega \times r_{pa}) \right). \qquad (21)$$

.

Так как $\det S(r_{da}) \;=\; 0$, то из уравнения (21) нельзя выразить $\ddot{r}_{pa}$. Воспользуемся кинематическими связями в движении сферического маятника. Пусть $l(t)$– длина нити, на которой подвешен сферический маятник. Пусть известны $\dfrac{dl(t)}{dt} = \dot{l}(t)$ и $\dfrac{d^2 l(t)}{dt^2} = \ddot{l}(t)$. Тогда

$$r_{da}^2 = l^2(t). \qquad (22)$$

Возьмем производную от правой и левой частей равенства (22) по времени

$$\frac{d}{dt}(r_{da}^2) = 2r_{da}(\omega \times r_{da} + \dot{r}_{da}) \;=\; 2l(t)\dot{l}(t).$$

Следовательно,

$$r_{da}\dot{r}_{da} \;=\; l(t)\dot{l}(t). \qquad (23)$$

Возьмем производную от правой и левой частей равенства (23) по времени

$$\frac{d}{dt}(r_{da}\dot{r}_{da}) = \frac{d}{dt} r_{da}\dot{r}_{da} + r_{da}\frac{d}{dt}\dot{r}_{da} = (\omega \times r_{da} + \dot{r}_{da})\dot{r}_{da} + r_{da}(\omega \times \dot{r}_{da} + \ddot{r}_{da}) =$$
$$= \dot{r}_{da}^2 + \ddot{r}_{da} + (\omega \times r_{da})\dot{r}_{da} + r_{da}(\omega \times \dot{r}_{da}) \;=\; \dot{l}^2(t)l(t) + \ddot{l}(t).$$

Учитывая, что $(\omega \times r_{da})\dot{r}_{da} + r_{da}(\omega \times \dot{r}_{da}) = 0$, получаем

$$\dot{r}_{da}^2 + r_{da}\ddot{r}_{da} \;=\; \dot{l}^2(t) + l(t)\ddot{l}(t).$$

Так как $r_{da} = (x_{da}, y_{da}, z_{da})^T$, то

$$\dot{r}_{da}^2 + r_{da}\ddot{r}_{da} = \dot{x}_{da}^2 + \dot{y}_{da}^2 + \dot{z}_{da}^2 + x_{da}\ddot{x}_{da} + y_{da}\ddot{y}_{da} + z_{da}\ddot{z}_{da} = \dot{l}^2(t) + l(t)\ddot{l}(t). \qquad (24)$$

В дальнейших рассуждениях необходимо предположить, что одна из компонент вектора r_{da} отлична от нуля.

Пусть $x_{da} \neq 0$, тогда из (24) получаем

$$\ddot{x}_{da} + \frac{y_{da}}{x_{da}}\ddot{y}_{da} + \frac{z_{da}}{x_{da}}\ddot{z}_{da} = -\frac{1}{x_{da}}(\dot{r}_{da}^2 - \dot{l}^2(t) - l(t)\ddot{l}(t)).$$

Обозначим

$$S_{1x}(r_{da}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{y_{da}}{x_{da}} & \dfrac{z_{da}}{x_{da}} \\ z_{da} & 0 & -x_{da} \\ -y_{da} & x_{da} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{2x}(r_{da}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z_{da} & 0 & -x_{da} \\ -y_{da} & x_{da} & 0 \end{pmatrix},$$

$n_{x_{da}} = (1, 0, 0)^T$.

Подставив $S_{1x}(r_{da}), S_{2x}(r_{da}), n_{x_{da}}$ в уравнения относительного движения сферического маятника, получим

$$S_{1x}(r_{da})\ddot{r}_{pa} \;= S_{2x}(r_{da})\frac{d^2 r_{op}}{dt^2} + S_{2x}(r_{da})S(r_{pa})\frac{d\omega}{dt} + S_{2x}(r_{da})(g(r_{oa}) -$$
$$-\omega \times (\omega \times r_{pa}) - 2\omega \times \dot{r}_{pa}) - \frac{1}{x_{da}}(\dot{r}_{da}^2 - \dot{l}^2(t)l(t) - \ddot{l}(t))n_{x_{da}}.$$

По определению матрицы $S_{1x}(r_{da})$, существует ее определитель $\det S_{1x}(r_{da}) = r_{da}^2 \neq 0$ и, следовательно, существует обратная матрица $S_{1x}^{-1}(r_{da})$:

$$S_{1x}^{-1}(r_{da}) \;=\; \frac{1}{r_{da}^2}\begin{pmatrix} x_{da}^2 & z_{da} & -y_{da} \\ x_{da}y_{da} & \dfrac{z_{da}y_{da}}{x_{da}} & \dfrac{x_{da}^2+z_{da}^2}{x_{da}} \\ z_{da}x_{da} & -\dfrac{x_{da}^2+y_{da}^2}{x_{da}} & -\dfrac{z_{da}y_{da}}{x_{da}} \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение относительного движения сферического маятника можно записать в виде

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{pa} &= S_{1x}^{-1}(r_{da})S_{2x}(r_{da})\frac{d^2r_{op}}{dt^2} + S_{1x}^{-1}(r_{da})S_{2x}(r_{da})S(r_{pa})\frac{d\omega}{dt}+ \\ &+S_{1x}^{-1}(r_{da})S_{2x}(r_{da})(g(r_{oa}) - \omega\times(\omega\times r_{pa}) - 2\omega\times\dot{r}_{pa})- \\ &-\frac{1}{x_{da}}S_{1x}^{-1}(r_{da})(\dot{r}_{da}^2 - \dot{l}^2(t) - l(t)\ddot{l}(t))n_{x_{da}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Умножая матрицы $S_{1x}^{-1}(r_{da}), S_{2x}(r_{da})$, получим

$$S_{1x}^{-1}(r_{da})S_{2x}(r_{da}) \;=\; \frac{1}{r_{da}^2}\begin{pmatrix} z_{da}^2+y_{da}^2 & -x_{da}y_{da} & -z_{da}x_{da} \\ -x_{da}y_{da} & x_{da}^2+z_{da}^2 & -z_{da}y_{da} \\ -z_{da}x_{da} & -z_{da}y_{da} & x_{da}^2+y_{da}^2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая свойства $S(r)$, получаем

$$S_{1x}^{-1}(r_{da})S_{2x}(r_{da}) \;=\; -\frac{1}{r_{da}^2}S^2(r_{da}).$$

Теперь преобразуем последнее слагаемое в уравнении относительного движения сферического маятника, учитывая, что точка d подвеса маятника в твердом теле неподвижна в связанной с телом системе координат

$$\frac{1}{x_{da}}S_{1x}^{-1}(r_{da})(\dot{r}_{da}^2 + \dot{l}^2(t) - l(t)\dot{l}^2(t) - l(t)\ddot{l}(t))n_{x_{da}} = \frac{\dot{r}_{da}^2}{r_{da}^2}r_{da} = \frac{\dot{r}_{da}^2 - \dot{l}^2(t) - l(t)\ddot{l}(t)}{r_{da}^2}r_{da}.$$

Проведенные рассуждения основывались на предположении $x_{da} \neq 0$. Аналогичные результаты можно получить для предположений $y_{da} \neq 0$ и $z_{da} \neq 0$. При этом в случае $y_{da} \neq 0$ матрицы $S_{1y}, S_{2y}, S_{1y}^{-1}, n_{y_{da}}$ имеют вид

$$S_{1y}(r_{da}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -z_{da} & y_{da} \\ \dfrac{x_{da}}{y_{da}} & 1 & \dfrac{z_{da}}{y_{da}} \\ -y_{da} & x_{da} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{2y}(r_{da}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -z_{da} & y_{da} \\ 0 & 0 & 0 \\ -y_{da} & x_{da} & 0 \end{pmatrix},$$

$$n_{y_{da}} = (0,1,0)^T\,,$$

$$S_{1y}^{-1}(r_{da}) \;=\; \frac{1}{r_{da}^2}\begin{pmatrix} -\dfrac{z_{da}x_{da}}{y_{da}} & y_{da}x_{da} & -\dfrac{y_{da}^2+z_{da}^2}{y_{da}} \\ -z_{da} & y_{da}^2 & x_{da} \\ \dfrac{x_{da}^2+y_{da}^2}{y_{da}} & z_{da}y_{da} & \dfrac{z_{da}x_{da}}{y_{da}} \end{pmatrix}.$$

В случае $z_{da} \neq 0$ матрицы $S_{1z}, S_{2z}, S_{1z}^{-1}, n_{z_{da}}$ имеют вид

$$S_{1z}(r_{da}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -z_{da} & y_{da} \\ z_{da} & 0 & -x_{da} \\ \dfrac{x_{da}}{z_{da}} & \dfrac{y_{da}}{z_{da}} & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_{2z}(r_{da}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -z_{da} & y_{da} \\ z_{da} & 0 & -x_{da} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$n_{z_{da}} = (0,0,1)^T,$$

$$S_{1z}^{-1}(r_{da}) \;=\; \frac{1}{r_{da}^2}\begin{pmatrix} \dfrac{x_{da}y_{da}}{z_{da}} & \dfrac{y_{da}^2+z_{da}^2}{z_{da}} & z_{da}x_{da} \\ -\dfrac{x_{da}^2+z_{da}^2}{z_{da}} & -\dfrac{x_{da}y_{da}}{z_{da}} & z_{da}y_{da} \\ y_{da} & -x_{da} & z_{da}^2 \end{pmatrix}.$$

В итоге из (25) получаем дифференциальные уравнения относительного движения сферического маятника в векторной форме

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{pa} \;&= -\frac{1}{r_{da}^2} r_{da} \times \Big[r_{da} \times [g(r_{oa}) - \frac{d^2 r_{op}}{dt^2} + r_{pa} \times \frac{d\omega}{dt} - \\ &-\omega \times (\omega \times r_{pa}) - 2\omega \times \dot{r}_{pa}]\Big] - \frac{\dot{r}_{da}^2 - \dot{l}^2(t) - l(t)\ddot{l}(t)}{r_{da}^2} r_{da} \end{aligned} \tag{26}$$

и в матричной форме

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{pa} \;&= r_{da}^{-2} S^2(r_{da}) \frac{d^2 r_{op}}{dt^2} + r_{da}^{-2} S^2(r_{da}) S(r_{pa}) \frac{d\omega}{dt} - r_{da}^{-2} S^2(r_{da}) g(r_{oa}) + \\ &+ r_{da}^{-2} S^2(r_{da}) S^2(\omega) r_{pa} + 2 r_{da}^{-2} S^2(r_{da}) S(\omega) \dot{r}_{pa} - \frac{\dot{r}_{da}^2 - \dot{l}^2(t) - l(t)\ddot{l}(t)}{r_{da}^2} r_{da}. \end{aligned} \tag{27}$$

В уравнениях (26) и (27) присутствует относительная скорость $\dot{r}_{da}$. Для задания этой скорости необходимо задать $\dot{r}_{pd}$. Укажем частные случаи, когда это легко сделать.

- Если $\dot{r}_{pd} \equiv 0$, очевидно, имеет место равенство $\dot{r}_{da} = \dot{r}_{pa}$.
- Пусть в момент времени $t = 0$ в состоянии покоя маятник находится в точке d_1, а точка подвеса (центр кривизны) в точке d_0. Тогда

  $$\dot{r}_{pd} = \dot{r}_{d_1 d}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рабинович Б.И.* Введение в динамику ракет–носителей космических аппаратов. — 2-е изд. перераб. – М.: Машиностроение, 1983.
2. *Колесников К.С.* Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1980.
3. *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977.
4. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.
5. *Владимиров А.В., Шлуинский Ю.Т., Рогова О.Р.* Математическая модель процесса отделения КА от РН с учетом колебания жидкости в баках // Информационные технологии в проектировании и производстве. – М.:ВИМИ, 1999, №4, с. 6–69.

Поступила в редакцию 24.10.2008.