А. Ф. Заусаев, А. А. Заусаев, А. Г. Ольхин, Оценка точности метода Эверхарта при решении уравнений движения больших планет на интервале времени 10 000 лет, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 108–113

DOI: 10.14498/vsgtu315

Численные методы

УДК 521.1, 521.4

А. Ф. Заусаев, А. А. Заусаев, А. Г. Ольхин

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ЭВЕРХАРТА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ НА ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ 10 000 ЛЕТ

Исследована возможность применения метода Эверхарта для решения уравнений движения планет на интервале времени 10 000 *лет. Оценка точности метода была проведена на основе алгоритма численного интегрирования* 23 *порядка с шагом* 3 *дня.*

Целью данной работы является решение двух задач: а) исследование точности метода Эверхарта при интегрировании уравнений движения больших планет (Меркурий-Плутон) на интервале времени порядка 10 000 лет, путем решения задачи n тел; б) разработка аппроксимирующих формул высокого порядка.

Создаваемые ранее базы данных координат больших планет охватывали период телескопических наблюдений, начиная с 1660 г. [1]. Для исследования эволюции орбит малых тел Солнечной системы этот интервал времени мал, так как период изменения угловых элементов орбит составляет десятки и сотни тысяч лет.

Применяемые явные многошаговые методы Коуэлла не позволяли увеличить интервал интегрирования более чем на 500 лет, из-за быстрых накоплений ошибок округления [2]. Разработанный Эверхартом метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений относится к числу неявных одношаговых методов [3].

Основным достоинством одношаговых методов является то обстоятельство, что для них разработаны надежные оценки локальной погрешности дискретизации. Существуют три основных метода для оценки полной погрешности: экстраполяция, вложенные методы, многошаговые оценки погрешности [4]. Экстраполяция и вложенные методы являются наиболее распространенными для оценок полной погрешности метода интегрирования. Экстраполяция основана на следующей идее: интегрирование производится дважды, с шагом h и $h/2$. Тогда погрешность при шаге $h/2$ приблизительно равна разности решений с шагом h и $h/2$, умноженной на 2^{-p} [4].

Для оценки погрешности вложенным методом, интегрирование также выполняется дважды и по разности полученных решений дается оценка полной погрешности на конце интервала интегрирования.

Известно, что точность метода численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений можно повысить двумя способами: путем уменьшения длины шага интегрирования либо увеличением порядка аппроксимирующей формулы. Уменьшение шага интегрирования на больших интервалах времени может привести к увеличению ошибки округления. Увеличение порядка аппроксимирующей формулы при условии, что задача Коши не является жесткой, и производные высших порядков не претерпевают разрывов, увеличивает точность метода при постоянном шаге. Кроме того, для алгоритмов Рунге-Кутты область абсолютной устойчивости метода увеличивается с увеличением его порядка [5].

Вследствие того, что повышение порядка аппроксимирующей формулы, в большинстве случаев, улучшает основные свойства методов, разработка методов Эверхарта более высокого порядка является актуальной задачей не только с целью исследования полной погрешности вложенных методов, но и с точки зрения создания более эффективного алгоритма численного интегрирования. С этой целью нами разработаны алгоритмы для метода Эверхарта до 33 порядка включительно.

1. Метод Эверхарта. Метод Эверхарта является одной из разновидностей методов Рунге-Кутты. Он относится к неявным одношаговым методам, что обеспечивает его сходимость и устойчивость [3, 6]. Рассмотрим основную идею построения метода Эверхарта на примере решения уравнения вида

$$\ddot{x} = F(x,t). \tag{1}$$

Представим правую часть (1) в виде временного ряда

$$\ddot{x} = F(x,t) = F_1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_n t^n. \tag{2}$$

Интегрируя (2), получим выражения для определения координат и скоростей:

$$x = x_1 + \dot{x}_1 t + F_1 \frac{t^2}{2} + A_1 \frac{t^3}{6} + \ldots + A_n \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \tag{3}$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + F_1 t + A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 \frac{t^3}{6} + \ldots + A_n \frac{t^{n+1}}{n+1}. \tag{4}$$

Полиномы (3) и (4) не являются рядами Тейлора, а коэффициенты A_i вычисляются из условия наилучшего приближения x и $\dot{x}$ с помощью конечных разложений (3) и (4). Для связи A-значений с F-значениями воспользуемся вспомогательным выражением

$$F = F_1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t - t_2) + \alpha_3 t(t - t_2)(t - t_3) + \ldots \tag{5}$$

Уравнение (5) усечено по времени t_n. В каждый фиксированный момент времени t_i имеем

$$\begin{aligned} &F_2 = F_1 + \alpha_1 t_2, \\ &F_3 = F_1 + \alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_3 (t_3 - t_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \tag{6}$$

Принимая $t_{nj} = t_n - t_j$, найдем α_i через разделенные разности:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = (F_2 - F_1)/t_2, \\ &\alpha_2 = ((F_3 - F_1)/t_3 - \alpha_1)/t_{32}, \\ &\alpha_3 = (((F_4 - F_1)/t_4 - \alpha_1)/t_{42} - \alpha_2)/t_{43}, \\ &\alpha_4 = ((((F_5 - F_1)/t_5 - \alpha_1)/t_{52} - \alpha_2)/t_{53} - \alpha_3)/t_{54}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \tag{7}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в уравнениях (2) и (5), выразим коэффициенты A_i через α_i:

$$\begin{aligned} &A_1 = \alpha_1 + (-t_2)\alpha_2 + (t_2 t_3)\alpha_3 + \ldots = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3 + \ldots, \\ &A_2 = \alpha_2 + (-t_2 - t_3)\alpha_3 + \ldots = c_{22}\alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + \ldots, \\ &A_3 = \alpha_3 + \ldots = c_{33}\alpha_3 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \tag{8}$$

Коэффициенты c_{ij} определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} &c_{ij} = 1, && i = j, \\ &c_{i1} = -t_i c_{i-1,1}, && i > 1, \\ &c_{ij} = c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j} && 1 < j < i. \end{aligned} \tag{9}$$

Для алгоритма интегрирования пятого порядка имеем:

$$c_{41} = -t_2 t_3 t_4,\ c_{42} = t_2 t_3 + t_3 t_4,\ c_{43} = -t_2 - t_3 - t_4, \tag{10}$$

где t_2, t_3, t_4 являются корнями кубического уравнения

$$(-t_2 t_3 t_4) + (t_2 t_3 + t_3 t_4 + t_4 t_2)t + (-t_2 - t_3 - t_4)t^2 + (1)t^3 = 0. \tag{11}$$

Таким образом, нахождение решения уравнения (1) сводится к нахождению узлов разбиения t_i шага h.

2. Нахождение узлов разбиения шага интегрирования. Нахождение узлов разбиения шага h=[$0,T$] рассмотрим на примере алгоритма интегрирования пятого порядка.

В начальный момент времени $t_1 = 0$ известны $x_1, \dot{x}_1, F_1$. Значения x в моменты времени t_2, t_3, t_4 определяются с помощью трех предсказывающих уравнений:

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 t_2 + F_1 t_2^2 / 2 + [A_1 t_2^3 / 6 + A_2 t_2^4 / 12 + A_3 t_2^5 / 20]; \quad (12)$$

$$x_3 = x_1 + \dot{x}_1 t_3 + F_1 t_3^2 / 2 + A_1 t_3^3 / 6 + [A_2 t_3^4 / 12 + A_3 t_3^5 / 20]; \quad (13)$$

$$x_4 = x_1 + \dot{x}_1 t_4 + F_1 t_4^2 / 2 + A_1 t_4^3 / 6 + A_2 t_4^4 / 12 + [A_3 t_4^5 / 20]; \quad (14)$$

и двух исправляющих уравнений для нахождения положения и скорости на конце шага h:

$$x(T) = x_1 + \dot{x}_1 T + F_1 T^2 / 2 + A_1 T^3 / 6 + A_2 T^4 / 12 + A_3 T^5 / 20; \quad (15)$$

$$\dot{x}(T) = \dot{x}_1 + F_1 T + A_1 T^2 / 2 + A_2 T^3 / 3 + A_3 T^4 / 4. \quad (16)$$

Эта схема является неявной, так как коэффициенты, стоящие в квадратных скобках (12-14), неизвестны при первой итерации.

Уравнения (12)-(16) обеспечивают пятый порядок точности относительно t. Можно увеличить порядок точности в вычислении x и $\dot{x}$ до седьмого порядка путем специального выбора подшагов t_2, t_3, t_4. С этой целью увеличим количество разбиений интервала интегрирования, добавив два дополнительных времени t_5, t_6. Затем вычислим для t_5 и t_6 значения α_4 и α_5, а также новые значения A_4', A_5' и A_1', A_2', A_3'.

Из уравнения (15) можно найти поправки Δx, улучшающие значения координат:

$$\Delta x = (A_1' - A_1) T^3 / 6 + (A_2' - A_2) T^4 / 12 + (A_3' - A_3) T^5 / 20 + A_4' T^6 / 30 + A_5' T^7 / 42. \quad (17)$$

Выражая в уравнении (9) $c_{51}, ..., c_{54}$ через c_{41}, c_{42}, c_{43}, а также полагая

$$h_2 = t_2 / T, \quad h_3 = t_3 / T \quad \text{и} \quad h_4 = t_4 / T, \quad (18)$$

формула (17) может быть записана в виде

$$\Delta x = (\alpha_4 - t_5 \alpha_5) T^6 [c_{41}' / 6 + c_{42}' / 12 + c_{43}' / 20 + 1/30] + \alpha_5 T^7 [c_{41}' / 12 + c_{42}' / 30 + 1/42].$$

Значение Δx в последнем выражении можно обратить в ноль при выполнении следующих условий:

$$\begin{gathered} c_{41}' / 6 + c_{42}' / 12 + c_{43}' / 20 + 1/30 = 0, \\ c_{41}' / 12 + c_{42}' / 20 + c_{43}' / 30 + 1/42 = 0. \end{gathered} \quad (19)$$

Проводя подобные рассуждения для скорости, приравнивая к нулю $\Delta \dot{x}$, получим третье условие для определения c_{41}', c_{42}', c_{43}'. Тогда соответствующие данным разбиениям коэффициенты c_{ij}' будут определяться из системы алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} c_{41}' / 2 + c_{42}' / 3 + c_{43}' / 4 + 1/5 = 0, \\ c_{41}' / 3 + c_{42}' / 4 + c_{43}' / 5 + 1/6 = 0, \\ c_{41}' / 4 + c_{42}' / 5 + c_{43}' / 6 + 1/7 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из решения этой системы

$$c_{41}' = -4/35 = -h_2 h_3 h_4; \; c_{42}' = 6/7 = h_2 h_3 + h_3 h_4 + h_2 h_4; \; c_{43}' = -12/7 = -h_2 - h_3 - h_4 \quad (21)$$

следует, что значения величин h_2, h_3, h_4 являются корнями следующего полинома третьей степени:

$$h^3 + (-12/7) h^2 + (6/7) h - 4/35 = 0. \quad (22)$$

которые имеют следующие значения:

$$h_2 = t_2 / T = 0.212340538239...; \; h_3 = t_3 / T = 0.590533135559...;$$

$$h_4 = t_4 / T = 0.91141240488... \quad (23)$$

Использование этих узлов позволяет получить решение уравнения (1) с точностью до седьмого порядка для обеих компонент x и $\dot{x}$. Полученные по формуле (22) узлы разбиения h совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса-Радо. Область изменения h заключена в пределах $0 \le h \le 1$.

Таким образом, порядок метода, определяющий точность интегрирования, зависит от количества разбиений основного шага h на подшаги h_i.

На данный метод Э. Эверхартом разработаны алгоритмы и программа на языке Фортран. Программа Эверхарта адаптирована на ЭВМ БЭСМ-6 С.В. Тарасевием в Институте теоретической астрономии АН СССР.

В работе Э. Эверхарта [3] приведены узлы разбиения основного шага интегрирования на подшаги, обеспечивающие точность до 15 порядка включительно.

В табл. 1 приведены узлы разбиения отрезка [*0, 1*] на подшаги $h_i = \frac{t_i}{T}$ для 19 и 23 порядков метода.

Известно, что положение небесного объекта в заданной системе координат определяется шестью элементами орбит: $M, a, e, \omega, \Omega, i$, где M - средняя аномалия, a -большая полуось, e - эксцентриситет, ω -аргумент перигелия, Ω -долгота восходящего узла, i -наклонение.

Положение планеты на орбите определяется двумя величинами: радиус-вектором r и истинной аномалией V. Средняя аномалия представляет собой дугу круга, которую описывала бы планета за время $(t - t_0)$, если бы она двигалась равномерно по окружности радиуса a со средней угловой скоростью n. Связь средней аномалии с эксцентрической определяется уравнением Кеплера

$$E - e\sin E = n(t - T) = M\ .$$

Истинная аномалия выражается через эксцентрическую с помощью формулы

$$tg\frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}\ .$$

Таким образом, зная M - среднюю аномалию, можно легко определить V - истинную аномалию.

Для оценки интервала интегрирования, на котором можно эффективно использовать метод Эверхарта для получения координат больших планет, нами проведено численное интегрирование уравнений движения больших планет [2] с шагом 0.5 дня и 1, 2, 3 дня с различным порядком точности, 19 и 23 соответственно.

Начальные данные масс, координат и скоростей планет (Меркурий-Плутон) на момент времени 2433280.5 *JED* взяты из Справочного руководства по небесной механике и астродинамике [7].

В настоящее время имеются более точные начальные данные координат и масс больших планет. В данной работе не ставилось целью получить на конце интервала интегрирования координаты и скорости планет с максимально возможной точностью. Целью исследования являлось сопоставление результатов вычислений при использовании метода с различным шагом и порядком, поэтому выбор начальных данных не может повлиять на основные выводы.

Численные результаты элементов орбит планет, полученные методом Эверхарта с различным шагом интегрирования и различным порядком, приведены в табл. 2, 3.

Данные эксперимента показывают, что на момент 2798530.5 *JED* результаты вычислений, полученные методом Эверхарта 19 и 23 порядками точности и шагом интегрирования 1 и 3 дня (соответственно) совпадают с точностью до шестого знака после запятой для всех элементов орбит, включая среднюю аномалию.

В табл. 3 приведены значения максимальной разности погрешности средней аномалии Меркурия на конце интервала интегрирования для различных вариантов метода Эверхарта.

Из сопоставления данных, приведенных в табл. 3, следует, что имеется незначительное расхождение в средней аномалии Меркурия, не превышающее 0.1 секунды дуги.

Оценка полной погрешности метода Эверхарта экстраполяционным и вложенным методами позволяет сделать следующий вывод: максимальная погрешность в средних аномалиях планет не превосходит 0.1 угловых секунд дуги.

Полученный результат позволяет применять метод Эверхарта с порядком не менее 19 и с шагом интегрирования не более 1 дня для создания банка данных координат больших планет (Меркурий-Плутон) на интервале времени порядка 10 000 лет.

Основными вопросами при создании банка данных являются вопросы эффективности, точности и устойчивости используемых методов.

Повышение точности метода можно осуществлять двумя способами: путем увеличения порядка аппроксимирующей формулы или путем уменьшения шага интегрирования. К решению этой задачи необходимо относиться с большой осторожностью, так как значительное повышение порядка может привести к потере точности, вследствие того, что производные высокого порядка, вычисленные с помощью разностной схемы, теряют всякий физический смысл. С другой стороны, уменьшение шага вдвое, как правило, удваивает время вычислений, в то время как повышение порядка метода увеличивает работу в 1.3 раза. Сопоставляя эффективность различных модификаций метода Эверхарта, следует отметить, что метод Эверхарта с использованием 23 порядка и шагом интегрирования 3 дня является более эффективным, чем метод Эверхарта 19 порядка с шагом 1 день.

Как показывают расчеты, наибольшая погрешность наблюдается в средней аномалии Меркурия. Это обстоятельство накладывает ограничение на интервал времени, на котором координаты Меркурия могут быть вычислены точно. Для остальных планет (Венера-Плутон) точные координаты с ошибкой в средней аномалии менее 1 секунды дуги могут быть вычислены методом Эверхарта на значительно большем интервале времени, чем 10 000 лет.

В связи с тем, что основной вклад в эволюционные процессы малых тел Солнечной системы вносят внешние планеты: Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, их координаты с помощью рассмотренных алгоритмов и программ можно вычислять с высокой степенью точности ($\Delta M \le 1''$) на значительно больших интервалах времени.

Таблица 1

Разбиение интервала (0,1) на подшаги Гаусса-Радо

Порядок	h_n
19	0.03625781288320946094
	0.11807897878999870019
	0.23717698481496038531
	0.38188276530470597536
	0.53802959891898906511
	0.69033242007236218294
	0.82388334383700471814
	0.92561261029080395536
	0.98558759035112345137
23	0.02527362039752034919925
	0.08304161344740514574191 8
	0.16917510037718142434321 9
	0.27779671510903207234495 1
	0.40150272023286081451917 0
	0.53186238691041595580406 5
	0.65999184208533481002277 0
	0.77715939295616214324170 1
	0.87538077485555692552064 6
	0.94796454887281944709313 6
	0.98998171953831959409339 6

Таблица 2

Элементы орбит планет (Меркурий-Плутон) 2950 г. *T=2798530.5 JED*
(Метод Эверхарта 23-го порядка, шаг 1 день)

Планеты	M	a	e	Ω	ω	i
Меркурий	315.660663	0.387098	0.205833	31.668529	46.476440	6.944348
Венера	126.530241	0.723336	0.006357	57.364557	73.434882	3.382386
Земля + Луна	346.539534	1.000002	0.016276	293.225930	172.025772	0.129775
Марс	46.953004	1.523734	0.094188	293.406555	46.166782	1.766314
Юпитер	48.576655	5.207484	0.050057	274.755700	101.794149	1.290321
Сатурн	40.838023	9.568937	0.054025	347.718653	110.630736	2.508759
Уран	256.544033	19.299182	0.047036	93.079095	74.506645	0.758859
Нептун	168.376980	29.990290	0.012681	279.348638	131.213339	1.776997
Плутон	314.320135	39.614951	0.248680	113.123774	109.455772	17.119466

Окончание табл. 2

Элементы орбит планет (Меркурий-Плутон) 11950 г. *T=6085780.5 JED*
(Метод Эверхарта 23-го порядка, шаг 1 день)

Планеты	M	a	e	Ω	ω	i
Меркурий	3.503077	0.387099	0.207237	57.051115	34.190516	6.451584
Венера	308.947234	0.723330	0.003504	65.142485	46.709965	3.001259
Земля + Луна	258.963782	1.000001	0.011470	345.277957	150.643196	1.180695
Марс	35.348060	1.523668	0.101270	12.288292	5.864932	0.804450
Юпитер	288.251259	5.208511	0.059721	280.864080	116.962633	1.444807
Сатурн	153.316517	9.589330	0.015922	90.326583	87.260732	2.297616
Уран	280.651233	19.141697	0.043851	100.926398	84.783361	0.648967
Нептун	44.428658	30.030115	0.010463	267.792744	130.507739	1.799445
Плутон	63.003967	39.623867	0.246783	115.648776	108.705552	17.128889

Таблица 3

Разности в средних аномалиях для Меркурия в различных вариантах метода Эверхарта.
T=6085780.5 JED

$\Delta M\ (23^n 2^d$ и $23^n 1^d)$	$\Delta M\ (19^n 0.5^d$ и $23^n 1^d)$	$\Delta M\ (19^n 1^d$ и $23^n 1^d)$	$\Delta M\ (23^n 3^d$ и $23^n 1^d)$
$0.''0612$	$0.''036$	$0.''018$	$0.''0648$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. *Беляев Н.А.* Эволюция орбиты кометы Даниэля 1909IV за 400 лет (1660-2060 гг.). Предварительное исследование // Л.: Бюлл.ИТА. 1966. Т.10. № 10(157). С.696-710.
2. *Чеботарев Г.А.* Аналитические и численные методы небесной механики. М.-Л.: Наука, 1965. 368 с.
3. *Everhart E.* Imp1icit sing1e methods for integrating orbits. // Ce1estia1 mechanics. 1974. №.10. P.35-55.
4. *Холл Д., Уатт Д.*. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
5. *Бордовицина Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
6. *Борунов В.П., Иванов В.А., Миронов С.В.* Сравнение эффективности методов Фелберга, Дормана-Принса и Эверхарта численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение систем Mathematica и Maple в научных исследованиях. М.: ВЦ РАН, 2001, С.17-62.
7. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике. М.: Наука, 1976. 862 с.

Поступила 29.08.2004 г.