S. V. Kislyakov, Vladimir V. Pelier. Hankel operators and their applications. Springer Monographs in Mathematics, Springer- Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 2003, p.p. VIII+784,
Algebra i Analiz, 2003, Volume 15, Issue 6, 216–221

https://www.mathnet.ru/eng/aa830

Алгебра и анализ
Том 15 (2003), вып. 6

РЕЦЕНЗИИ

VLADIMIR V. PELLER. HANKEL OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS. SPRINGER MONOGRAPHS IN MATHEMATICS, SPRINGER-VERLAG, NEW YORK-BERLIN-HEIDELBERG, 2003, p.p. VIII+784

Ганкелевы операторы возникают естественным образом в на удивление многочисленных вопросах анализа, а их изучение вызывает к жизни впечатляющую комбинацию идей и методов разной природы — операторной и теоретико-функциональной. Любопытно, что 50 лет назад оснований произнести ровно такие слова было несравнимо меньше, хотя понятие *матрицы Ганкеля* гораздо старше — его можно отнести к XIX веку. В событиях, происшедших в теории ганкелевых операторов за последние десятилетия, автор рецензируемой монографии был одним из главных действующих лиц. Книга посвящена результатам исследований, в которых ее автор участвовал сам, а также содержит весьма обширный сопутствующий материал, начиная с элементарных сведений о ганкелевых операторах. В монографической литературе эти темы затрагивались и ранее (см., например, [3, 4, 5]), однако далеко не с той полнотой и обстоятельностью. Поэтому появление тщательного и систематического изложения в одном томе очень полезно и своевременно, особенно если учесть, что некоторые доказательства упрощены в сравнении с изначальными публикациями, детали отшлифованы, а дело доведено до самого недавнего прошлого.

Всеобъемлющей энциклопедией по ганкелевым операторам, однако, книга не является — одного тома для этого бы не хватило. Вот цитата из Введения, описывающая, чего читателю не следует ждать.

„В последние 20 лет были получены многочисленные интересные результаты о различных обобщениях ганкелевых операторов (о коммутаторах оператора умножения и оператора Кальдерона–Зигмунда, паракоммутаторах, операторах Ганкеля на пространствах Бергмана, на пространствах функций в полидиске, в комплексном n-шаре, в классических областях и т.д.). Однако осветить еще и эти обобщения в рамках одной книги невозможно физически, и мы будем иметь дело лишь с классическими ганкелевыми операторами.

Но и при таком ограничении едва ли мыслимо описать все, что известно. Например, в книге не затронуты приложения теории операторов Ганкеля к некоммутативной геометрии, теории возмущений или асимптотике тёплицевых определителей.“

Что же в книге есть? Я хотел бы уклониться от последовательного описания содержания по главам, а вместо этого наметить основные сюжеты. Больших тем можно насчитать как минимум три: „спектральная теория функций“ и аппроксимация; теория управления и обратная спектральная задача; векторнозначные версии.

Классические ганкелевы операторы обычно выступают в двух стандартных представлениях: либо как операторы, имеющие матрицу вида $\{a_{i+j}\}_{j,j=1}^{\infty}$ в некотором ортонормированном базисе, либо как операторы

$$H_\varphi : H^2 \to H^2_-; \quad H_\varphi(f) = \mathbb{P}_-(f\varphi), \quad f \in H^2. \tag{1}$$

Здесь $H^2 = \overline{\operatorname{span}}_{L^2(\mathbb{T})}\{z^n\}_{n\geq 0}$ и $H^2_- = \overline{\operatorname{span}}_{L^2(\mathbb{T})}\{z^n\}_{n<0}$ — (граничные) гильбертовы класса Харди на окружности $\mathbb{T}$, φ — некоторая функция на $\mathbb{T}$ (*символ* ганкелева оператора), а $\mathbb{P}_-$ — ортогональный проектор пространства $L^2(\mathbb{T})$ на H^2_-. Связь между этими представлениями проста: если выбрать в H^2 и H^2_- тригонометрические базисы $\{z^n\}_{n\geq 0}$ и $\{z^n\}_{n<0}$ соответственно, то оператор H_φ обретет матрицу

$$\begin{pmatrix} \hat\varphi(-1) & \hat\varphi(-2) & \hat\varphi(-3) \\ \hat\varphi(-2) & \hat\varphi(-3) & \\ \hat\varphi(-3) & & \end{pmatrix}.$$

Выясняется, что свойства функции φ и оператора H_φ тесно связаны и что комбинирование теоретико-функциональных и операторных идей в этой ситуации очень эффективно (одно из проявлений того, что иногда называют „спектральной теорией функций“). Отметим, что в освещении этих аспектов теории имеются некоторые пересечения с монографиями [4, 5]. Мы остановимся здесь кратко лишь на аппроксимационных задачах, не касаясь иных вопросов.

Символ φ определяется по оператору H_φ неоднозначно — очевидно, оператор зависит лишь от функции $\mathbb{P}_-\varphi$. Оператор H_φ ограничен тогда и только тогда, когда среди его символов есть функция из $L^\infty(\mathbb{T})$, и компактен тогда и только тогда, когда среди его символов есть непрерывная функция (иначе эти условия переписываются так: $\mathbb{P} - \varphi \in \mathrm{BMO}$ и $\mathbb{P} - \varphi \in \mathrm{VMO}$).

Более того, справедливы формулы

$$\|H_\varphi\| = \operatorname{dist}(\varphi, H^\infty), \quad \|H_\varphi\|_e = \operatorname{dist}(\varphi, H^\infty + C(\mathbb{T}))$$

($\|\cdot\|_e$ — существенная норма, расстояние до множества компактных операторов). Этот операторно-функциональный дуализм в действительности простирается гораздо дальше: выясняется, что рациональна аппроксимация функций в пространстве BMO и поведение s-чисел операторов Ганкеля — это, в сущности, один и тот же предмет. В самом деле, расстояние от ганкелева оператора до операторов ранга m реализуется на ганкелевом операторе ранга m (Адамян–Аров–Крейн), а оператор Γ_φ имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда функция $\mathbb{P}_-\varphi$ рациональна (этот результат, видимо, можно считать первым во всей теории: он был доказан в 1881 г. Кронекером).

Не вдаваясь в детали, отметим, что с помощью этих соображений в свое врем автором книги были найдены первые случаи совпадения „прямых" и „обратных" теорем рациональной аппроксимации — на основе результатов, о которых говорится в следующем абзаце.

В 80-х годах XX в. было понято (автор книги сыграл здесь ключевую роль), что ганкелевы операторы класса S_p Шаттена–фон Неймана допускают прозрачное описание в терминах символа:

$$H_\varphi \in S_p \iff \mathbb{P}_-\varphi \in B_p^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Здесь $B_p^{1/p}$ — одно из пространств шкалы Бесова. Подробному изложению этого результата и сопутствующего материала посвящена гл. 6.

Логика развития темы подсказывает, что после всего описанного надо взглянуть пристальней на (нелинейный) оператор наилучшего приближения аналитическими функциями в метрике пространства $L^\infty(\mathbb{T})$. Этому (а также родственным операторам, в определении которых участвуют еще и рациональные функции) посвящена глава 7. Установлено, в частности, что оператор наилучшего приближения переводит в себя многие классические функциональные пространства X на окружности. Решается „задача восстановления": пусть функция u унимодулярна; при каких условиях из того, что $\mathbb{P}u \in X$, следует, что $u \in X$?

Результаты главы 7 очень красивы сами по себе, однако кульминацией сюжета является то, что они позволяют явно описать различные условия регулярности стационарных гауссовых процессов в терминах спектральной функции (гл. 9).

Вторая большая тема книги связана с так называемой обратной спектральной задачей для ганкелевых операторов. Кстати, эта задача тоже имеет отношение к теории стационарных гауссовых процессов — см. §8.6.

А. В. Мегрецкий, В. В. Пеллер и С. Р. Треиль выяснили (1993 г.), что операторы, унитарно эквивалентные ганкелевым самосопряженным, допускают совершенно обозримое описание во внутренних терминах. Доказательство этого результата представляет собой небольшой технический подвиг и изложено в главе 12. Оно непрямое и основано на том, что ганкелевы операторы естественно возникают в теории управления, так что вместо оператора вида (1), унитарно эквивалентного заданному, можно построить соответствующую динамическую систему, а это проще. Как именно ганкелевы операторы связаны с теорией управления и какие задачи они позволяют там решить, объясняются в предыдущей главе 11.

Третий сюжет (пронизывающий всю книгу) можно резюмировать следующим образом: большинство изложенных результатов имеют векторнозначные аналоги, и часто они полезны. Под векторнозначностью понимается следующее: пространства Харди в формуле (1) заменяются соответствующими классами функций со значениями в гильбертовом пространстве. Функция φ тогда становится операторно-значной (так что ее коэффициенты Фурье $\widehat{\varphi}(-n)$ — операторы). Одной из кульминаций этой темы является глава 14, в которой объясняется, что если значения функции φ — матрицы, то вместо наилучшего приближения аналитическими функциями естественно рассматривать *супероптимальное* приближение (последовательно минимизируются s-числа), и обсуждаются многочисленные задачи, возникающие в такой ситуации.

Разумеется, этими тремя сюжетами содержание книги не исчерпывается. Спектральные соображения в рассуждениях часто формулируются или применяются в терминах операторов Тёплица $T_\varphi : H^2 \to H^2$, $T_\varphi f = \varphi f - H_\varphi f$, основам теории которых посвящена отдельная глава. В другой главе, среди прочего, вычислен существенный спектр ганкелева оператора и построен пример квазинильпотентного ганкелева оператора. Не стоит и говорить, что классические темы — будь то матрица Гильберта, факторизация Винера–Хопфа или задача Неванлинны–Пика, — разобраны с необходимой полнотой. Не стремясь дать исчерпывающий список, я отмечу еще только, что в последней главе 15 изложен контрпример Пизье (1996) к задаче Халмоша (полиномиально ограниченный оператор, не подобный сжатию). Задача очень долго не поддавалась решению, и в этой истории операторы Ганкеля (в особенности векторнозначные) тоже сыграли выдающуюся роль.

Для столь значительного объема книга содержит на удивление мало редакционных погрешностей, но среди них есть досадные. Так, глава 12 начинается с заявления, что в ней решается задача из §8.5, и то же повторяется чуть далее, на с. 492. Между тем в §8.5 никаких задач не ставится вовсе, имеется в виду §8.6. На с. 306 автор сначала выбирает термин „пространство Кёте“ (имеется определение), а потом вдруг безо всяких пояснений сбивается на (почти синонимичный — но об этом не говорится ни слова) термин „идеальное пространство“ (3 строка снизу).

Самый неприятный из замеченных мной редакционных промахов порожден проблемой „докучливых мелочей“, с которой сталкивается любой автор при изложении мало-мальски обширной теории. Докучливые мелочи — это утверждения, почти превратившиеся в расхожие истины. По этой причине их естественно не обсуждать подробно — ради экономии места и чтобы не отвлекаться; однако что-то говорить о них обычно приходится из-за наречия „почти“ в предыдущей фразе. В рецензируемой книге такие „мелочи“ — математические факты довольно высокого уровня. Например, к ним относятся стандартная информация о пространстве BMO, так что у читателя предполагается солидное аналитическое образование. Однако практически нигде автор не оставляет читателя наедине с этими „мелочами“: даны ссылки или минимальные пояснения, или и то, и другое. Исключение составляет доказательство теоремы 1.7 на с. 10, где неявно используется следующее утверждение: если существенная норма оператора в гильбертовом пространстве строго меньше его обычной нормы, то последняя достигается в некоторой точке единичного шара. Нельзя сказать, чтобы это утверждение (известное довольно широко, но все же не всем) было трудным, однако некоторой сосредоточенности его доказательство требует, так что формулировка и ссылка были бы весьма уместны. Дело еще несколько усугубляется тем, что встречающийся там же символ $\|\cdot\|_e$ определен лишь 15 страницами позднее (здесь, впрочем, помогает стандартное лекарство — заглянуть в Добавления в конце книги).

Кстати, в самой старой книге из списка литературы к этой рецензии — монографии [1] — „докучливой мелочью“ было отнюдь не пространство BMO (разумеется!), а ... лебегово разложение монотонных функций (это может навести на приятные мысли о прогрессе вообще). Книга [1] долгое время была основным источником по асимптотике тёплицевых определителей и, пожалуй, не утратила актуальности до сих пор; более новая информация содержится в [2].

Несколько слов о стиле изложения в рецензируемой монографии. Он ясный и четкий, но довольно сухой. Неформальные комментарии встречаются, но автор явно предпочитает, чтобы результаты говорили сами за себя. Так по большей части и происходит, однако несколько очевидных возможностей оживить изложение (кстати, без увеличения объема) явно упущены. Например, результаты главы 7 (об операторе наилучшего приближения) изящны и в особых мотивировках не нуждаются. Было бы, тем не менее, еще лучше, если бы читателю сказали заранее, что через главу они будут востребованы в теории стационарных гауссовых процессов. Во введении к главе 7 — очень хорошем — об этом нет ни слова; забавно, что в общем введении к книге глава 7 (единственная из всех!) не упоминается вовсе.

Все мои замечания, однако, говорят лишь о том, как можно было бы еще несколько усовершенствовать и без того хорошую вещь. В целом, немногочисленные редакционные недочеты и редкие опечатки не мешают чтению. Книге найдется достойное место в любой математической библиотеке. Специалисты могут использовать ее как справочник, а профессионалы, желающие овладеть предметом (в том числе и аспиранты при надлежащем руководстве), — как учебник.

Список литературы

[1] Гренандер У., Сегё Г., *Тёплицевы формы и их приложения*, ИЛ, М., 1961.

[2] Böttcher A., Silbermann B., *Analysis of Toeplitz operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] Power S. C., *Hankel operators on Hilbert space*, Res. Notes in Math., vol. 64, Pitman, Boston, MA–London, 1982.

[4] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980; Пер. на англ. яз., *Treatise on the shift operator. Spectral function theory*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 273, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1986.

[5] N. K. Nikol'skiĭ, *Operators, functions, and systems: an easy reading*. Vol. I. *Hardy, Hankel, and Toeplitz*, Math. Surveys Monographs, vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

Поступило 1 сентября 2003 г.

С. В. Кисляков