АПРЕЛЬ 1994 г., ТОМ 30, № 4

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.93

А. Ю. АЛЕКСАНДРОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ РЕКУРРЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Опираясь на введенное в [1] понятие асимптотического колебания, в работах [2, 3] показано, что в системах дифференциальных уравнений под действием рекуррентных возмущений могут возникать асимптотические рекуррентные колебания, т. е. могут существовать рекуррентные функции, не являющиеся, вообще говоря, решениями этих уравнений, к которым при неограниченном возрастании времени стремятся решения исследуемых систем.

В настоящей работе рассматриваются динамические системы, заданные в n-мерном евклидовом пространстве E_n [1, 4]. Пусть $X(t, X_0)$ — движение, проходящее при $t=0$ через точку X_0. Покажем, что для движений автономных динамических систем также могут существовать предельные рекуррентные функции.

Определение. Будем говорить, что векторная функция $F(t)$, заданная и непрерывная при $t\in(-\infty, +\infty)$, обладает свойством A, если для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое $L>0$, что для сколь угодно большого положительного числа D найдется $T>0$ такое, что для каждого $\theta\geqslant T$ и любого $\alpha\geqslant T-\theta$ в интервале $(\alpha, \alpha+L)$ существует число τ, для которого при всех $t\in[\theta, \theta+D]$ выполняется неравенство $\|F(t+\tau)-F(t)\|<\varepsilon$.

Пусть R — множество рекуррентных функций, обладающих свойством A. В [3] доказано, что множеству R принадлежат рекуррентные функции из эргодических классов $H^N(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$ (см. [1, с. 105]), если функции $\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)$, на основе которых построены данные классы, непрерывно дифференцируемы, по крайней мере начиная с достаточно больших по модулю значений t, и их производные при $|t|\to\infty$ стремятся к некоторым конечным пределам.

Теорема 1. *Если функция $F(t)$ обладает свойством A, то для нее существует*

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt.$$

Доказательство. Задаем некоторое $\varepsilon>0$. Для этого числа и функции $F(t)$ по свойству A существует $L>0$. Пусть $D=LM/\varepsilon$, где $M=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|F(t)\|$. Находим T, соответствующее выбранному значению D. Тогда для любых a и b, таких, что $a\geqslant T$, $b\geqslant T$, и при всех $s\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\left\|\int_a^{a+s} F(t)\,dt-\int_b^{b+s} F(t)\,dt\right\|\leqslant 3\varepsilon s+2ML.$$

Используя полученную оценку, дальнейшее доказательство проводим аналогично доказательству теоремы о существовании среднего значения для почти периодической функции (см. [5, с. 379—382]).

Рассмотрим динамическую систему, заданную в пространстве E_3 системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=-\sin^3 x,\quad \dot{y}=-z(1+x),\quad \dot{z}=y(1+x). \tag{1}$$

Исследуем решение системы (1), проходящее при $t=0$ через точку $(x, y, z)^*=(1, 1, 0)^*$ (звездочка означает транспонирование). Это решение имеет вид

$$x=h(t),\quad y=\cos\Big(t+\int_0^t h(s)\,ds\Big),\qquad z=\sin\Big(t+\int_0^t h(s)\,ds\Big), \tag{2}$$

где $h(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ и $\int\limits_0^t h(s)\,ds\to+\infty$ при $t\to+\infty$, так как

$$\int\limits_0^t h(s)\,ds=\int\limits_{h(t)}^1 \frac{x\,dx}{\sin^3 x}$$

и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sin^3 x}$ расходится.

Введем векторную функцию $\Psi(t)$. Пусть $\Psi(t)=\left(0,\ \cos\left(t+\int\limits_0^t h(s)\,ds\right),\ \sin\left(t+\int\limits_0^t h(s)\,ds\right)\right)^*$ при $t\geqslant 0$ и $\Psi(t)=\Psi(-t)$ при $t<0$. Данная функция является рекуррентной и обладает свойством A, причем решение (2) стремится к $\Psi(t)$ при $t\to+\infty$.

Из результатов, полученных в работе [6], следует, что если движение динамической системы при $t\to+\infty$ стремится к почти периодической функции, то эта предельная функция также является движением динамической системы. Для рекуррентных функций это свойство может не выполняться. Движение (2) стремится к рекуррентной функции $\Psi(t)$, но не существует рекуррентного решения системы (1), к которому бы при $t\to+\infty$ стремилось исследуемое движение.

Теорема 2. *Если движение динамической системы $X(t, X_0)$ обладает свойством A, то множество ω-предельных точек данного движения является минимальным множеством почти периодических движений.*

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно сначала показать, что из выполнения для движения $X(t, X_0)$ свойства A следует, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для сколь угодно большого числа $D>0$ можно указать $T>0$, для которого при любых $t_1, t_2\geqslant T$, таких, что $\|X(t_1, X_0)-X(t_2, X_0)\|<\delta$, при всех $t\in[0, D]$ имеет место неравенство $\|X(t_1+t, X_0)-X(t_2+t, X_0)\|<\varepsilon$, а затем воспользоваться критерием Маркова, определяющим почти периодический характер движения (см. [4, с. 317—319]).

Таким образом, в динамических системах не существует рекуррентных движений, принадлежащих множеству R и не являющихся почти периодическими. Однако из рассмотренного примера вытекает, что движения могут иметь предельные рекуррентные функции из множества R. Для таких движений множества ω-предельных точек состоят из траекторий почти периодических движений.

Используя свойство интегральной непрерывности движений динамических систем (см. [4, с. 266]), можно показать, что имеет место

Теорема 3. *Если множество ω-предельных точек устойчивого по Лагранжу в положительном направлении движения $X(t, X_0)$ является минимальным множеством почти периодических движений, то функция $X(t, X_0)$ обладает свойством A.*

Определение [1]. Рекуррентная функция $f(t)$ называется эргодической, если существует среднее значение

$$M(f)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)\,dt. \tag{3}$$

А. А. Марков показал, что существуют неэргодические рекуррентные колебания динамических систем, т. е. колебания, не имеющие среднего значения [4, с. 435—440]. В работах [1, с. 34—35; 7] приведены примеры неэргодических рекуррентных функций.

Теорема 4. *Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям:*

1) функция $\varphi(t)$ почти периодическая и

$$\sup_{t\in(-\infty,+\infty)}\varphi(t)-\inf_{t\in(-\infty,+\infty)}\varphi(t)\geqslant 2\pi;$$

2) $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \exp(i\varphi(t))\,dt=b$, *причем* $b\neq 0$;

3) функция $\psi(t)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема при $t\in[0,+\infty)$, $\psi(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} t\psi'(t)=a>0$.

Тогда функция $f(t)$ такая, что $f(t)=\exp(i(\varphi(t)+\psi(t)))$ при $t\geqslant 0$ и $f(t)=f(-t)$ при $t<0$, является рекуррентной и неэргодической.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $f(t)$ является рекуррентной и справедливо равенство

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt=\frac{b\exp(i\psi(T))}{1+ai}+g(T),$$

где $g(T)\to 0$ при $T\to+\infty$. Но $\psi(T)\to+\infty$ при $T\to+\infty$, поэтому не существует

$\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$. А так как $f(t)$ — четная функция, то не существует и предела (3).

Определение. Будем говорить, что векторная функция $F(t)$, заданная и непрерывная при $t\in(-\infty, +\infty)$, обладает свойством B, если для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое $L>0$, что для любого $\alpha\in(-\infty, +\infty)$ в интервале $(\alpha, \alpha+L)$ существует число τ такое, что для сколь угодно большого числа $D>0$ найдется $\theta>0$, для которого при всех $t\in[\theta, \theta+D]$ выполняется неравенство $\|F(t+\tau)-F(t)\|<\varepsilon$.

Очевидно, что неэргодические рекуррентные функции, построенные рассмотренным выше способом, а также функции из примеров, приведенных в [1, с. 34—35; 7], обладают свойством B.

Теорема 5. *Движение динамической системы не может при $t\to+\infty$ стремиться к рекуррентной функции $\Psi(t)$, обладающей свойством B, для которой не существует*

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \Psi(t)\,dt. \tag{4}$$

Доказательство. Если движение $X(t, X_0)$ стремится к рекуррентной функции, обладающей свойством B, то множество его ω-предельных точек является минимальным множеством почти периодических движений. По теореме 3 получаем, что функция $X(t, X_0)$ обладает свойством A. Тогда и $\Psi(t)$ также обладает свойством A и из теоремы 1 следует существование предела (4).

Литература

1. Зубов В. И. Колебания и волны. Л., 1989.
2. Александров А. Ю.// Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 902—903.
3. Александров А. Ю.// Дифференциальные уравнения с частными производными: Межвуз. сб. науч. трудов. Л., 1989. С. 37—40.
4. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1947.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
6. Щербаков Б. А., Чебан Д. Н. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 5. С. 898—906.
7. Зубов В. И. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1061—1063.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 21 июня 1992 г.