В. М. Садовский, О. В. Садовская, Е. А. Ефимов, Одномерные разностные схемы для реализации метода расщепления осесимметричных уравнений динамики упругой среды,
Выч. мет. программирование, 2021, том 22, выпуск 1, 47–66

https://www.mathnet.ru/vmp1026

УДК 519.63, 539.37 doi 10.26089/NumMet.v22r104

ОДНОМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ СРЕДЫ

В. М. Садовский[1], О. В. Садовская[2], Е. А. Ефимов[3]

Строятся экономичные разностные схемы сквозного счета для решения прямых задач сейсмики в осесимметричной постановке. При распараллеливании алгоритмов, реализующих схемы на многопроцессорных вычислительных системах, применяется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным. Одномерные системы уравнений на этапах расщепления решаются на основе явных сеточно-характеристических схем и неявной разностной схемы типа "предиктор–корректор" с контролируемой искусственной диссипацией энергии. Верификация алгоритмов и программ выполнена на точных решениях одномерных задач типа бегущих монохроматических волн. Сравнение результатов показало неоспоримые преимущества схемы с контролируемой диссипацией энергии по точности расчета гладких решений и целесообразность применения явных монотонных схем при расчете разрывов.

Ключевые слова: упругая среда, прямая задача сейсмики, цилиндрические волны, разностная схема, метод расщепления, монотонность, диссипативность, параллельная реализация.

1. Введение. При численном моделировании процессов распространения сейсмических волн в плоскослоистых грунтовых массивах под действием локализованных импульсных или периодических возмущений целесообразно применять методы, учитывающие осевую симметрию задач. По сравнению с трехмерной, пространственной постановкой это позволяет с незначительной потерей точности моделирования из-за неоднородности коэффициентов определяющих уравнений (зависимости коэффициентов от радиуса) существенно сократить вычислительные затраты. В случае комбинированного воздействия несколькими источниками возмущений, синхронными или с определенным запаздыванием по времени срабатывания, искомые волновые поля можно строить путем суперпозиции осесимметричных полей, генерируемых отдельными источниками. Такой подход применяется нами в ходе работ по математическому моделированию электромагнитного импульсного сейсмоисточника "Енисей" [1–3].

Основная проблема разработки вычислительных алгоритмов для решения осесимметричных задач состоит в выборе адекватных способов аппроксимации младших членов в уравнениях динамической теории упругости, записанных относительно цилиндрической системы координат, из-за которых происходит вырождение уравнений на оси симметрии. Нашей целью является выбор такого способа, оставаясь в рамках технологии построения консервативной схемы распада разрыва Годунова [4, 5], которая хорошо зарекомендовала себя при решении плоских и пространственных задач динамической теории упругости, при моделировании разного сопротивления растяжению и сжатию сыпучих и пористых материалов [6–9], распространения волн и трещинообразования в блочных средах [10–13] и других нелинейных процессов.

Ранее методы решения осесимметричных уравнений динамики упругой среды разрабатывались и применялись многими авторами. В [14] был реализован метод характеристик для анализа одномерных движений с цилиндрическими волнами. Сеточно-характеристические методы для решения пространственных задач разработаны в [15–17]. Разностные схемы для решения уравнений плоской задачи и пространственных уравнений на основе характеристического метода, позволяющие рассчитывать разрывы скоростей и напряжений, предложены в [18–20]. В работах [21–23] такие методы применялись к анализу волновых

[1] Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок 50/44, 660036, Красноярск; директор, e-mail: sadov@icm.krasn.ru

[2] Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок 50/44, 660036, Красноярск; старший научный сотрудник, e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru

[3] Сибирский федеральный университет, Институт математики и фундаментальной информатики, просп. Свободный 79, 660041, Красноярск; аспирант, e-mail: eugene6467@mail.ru

процессов в линейно упругих, вязкоупругих и упругопластических средах. Методы, основанные на осесимметричных уравнениях, использовались при численном моделировании динамики пластин и оболочек вращения в [24–28].

2. Уравнения осесимметричных движений. Уравнения динамической теории упругости с осевой симметрией в скоростях и напряжениях записываются в виде системы:

$$\begin{aligned}
&\rho\, r\, \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial (r\, \sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r\, \sigma_{rz})}{\partial z} - \sigma_\varphi\,, \quad && \rho\, r\, \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial (r\, \sigma_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{\partial (r\, \sigma_{\varphi z})}{\partial z} + \sigma_{r\varphi}\,, && \\
&\rho\, r\, \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial (r\, \sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial (r\, \sigma_z)}{\partial z}\,, && \frac{1}{E}\,\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - \frac{\nu}{E}\,\frac{\partial}{\partial t}\big(\sigma_\varphi + \sigma_z\big) = \frac{\partial v_r}{\partial r}\,, && \\
&\frac{1}{E}\,\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} - \frac{\nu}{E}\,\frac{\partial}{\partial t}\big(\sigma_z + \sigma_r\big) = \frac{v_r}{r}\,, && \frac{1}{E}\,\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} - \frac{\nu}{E}\,\frac{\partial}{\partial t}\big(\sigma_r + \sigma_\varphi\big) = \frac{\partial v_z}{\partial z}\,, && \\
&\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\,, && \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\,, && \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial t} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность среды, $E = 2\,\mu\,(1+\nu)$ — модуль Юнга, μ и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона; оси r и z цилиндрической системы координат направлены по радиусу и по оси симметрии, соответственно. Такая форма записи удобна тем, что на ее основе легко получить уравнение баланса энергии. Для этого необходимо умножить уравнения движения на v_r, v_φ, v_z, а определяющие уравнения на $r\,\sigma_r$, $r\,\sigma_\varphi$, $r\,\sigma_z$, $r\,\sigma_{r\varphi}$, $r\,\sigma_{rz}$, $r\,\sigma_{\varphi z}$, соответственно, и после этого сложить правые и левые части уравнений. Получится следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\, r\, \frac{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}{2} + r\, W\right) = \frac{\partial}{\partial r}\Big(r\, v_r\, \sigma_r + r\, v_\varphi\, \sigma_{r\varphi} + r\, v_z\, \sigma_{rz}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(r\, v_r\, \sigma_{rz} + r\, v_\varphi\, \sigma_{\varphi z} + r\, v_z\, \sigma_z\Big)\,, \tag{2}$$

где W — упругий потенциал, представляющий собой квадратичную форму относительно напряжений:

$$4\,\mu\, W = \sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 + 2\,\sigma_{r\varphi}^2 + 2\,\sigma_{rz}^2 + 2\,\sigma_{\varphi z}^2 - \frac{\nu}{1+\nu}\big(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z\big)^2\,.$$

Система (1) относится к гиперболическом типу. Она распадается на две независимые подсистемы, первая из которых (уравнения с порядковыми номерами 1, 3, 4, 5, 6 и 8) описывает движения в плоскости, а вторая (уравнения 2, 7 и 9) — крутильные движения. Плоские движения представляют собой суперпозицию продольных и поперечных волн, распространяющихся со скоростями

$$c_p = \sqrt{\frac{2\,\mu}{\rho}\,\frac{1-\nu}{1-2\,\nu}}\,, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,,$$

соответственно. Крутильные волны движутся со скоростью c_s.

При исследовании задач сейсмики к решению системы уравнений (1) нами применяется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным, в котором на разных этапах в параллельном режиме решаются серии одномерных задач. Преимущество метода двуциклического расщепления по сравнению с обычным расщеплением (методом суммарной аппроксимации) состоит в том, что он сохраняет второй порядок точности при использовании разностных схем второго порядка для решения одномерных систем [29]. Численная реализация этапов метода расщепления в направлении оси симметрии z не вызывает затруднений, так как после сокращения соответствующих одномерных уравнений на r получается система с постоянными коэффициентами, которая, в свою очередь, распадается на подсистемы плоских продольных и поперечных упругих волн. К их решению применяется схема распада разрыва Годунова [4] или основанная на этой же идее сеточно-характеристическая разностная схема с предельной реконструкцией инвариантов Римана [30].

Одномерная система уравнений в направлении радиальной оси r распадается на три подсистемы — продольных, поперечных и крутильных волн. Непосредственное применение к ним стандартных разностных схем, основанных на аппроксимации уравнений плоской задачи теории упругости с добавлением слагаемых без производных, приводит к нежелательным эффектам типа асимптотической неустойчивости с накоплением ошибок округления при расчете на большое число шагов по времени, дисбаланса импульса и энергии. Это ставит под сомнение надежность получаемых численных результатов.

Универсальный способ борьбы с такими эффектами состоит в использовании полностью консервативных разностных схем [31, 32] в сочетании с методом искусственной вязкости [33], сглаживающим осцилляции численного решения при расчете разрывов за счет схемной диссипации энергии. Для уравнений динамической теории упругости общий подход к построению консервативных численных методов с контролируемой диссипацией энергии развит Ивановым [34, 35]. Применим этот подход к подсистемам уравнений одномерных движений упругой среды с продольными, поперечными и крутильными цилиндрическими волнами.

3. Продольные цилиндрические волны. Уравнения продольных волн могут быть записаны в эквивалентной форме через параметры упругости Ламе $\lambda = 2\,\mu\,\nu/(1-2\,\nu)$ и μ:

$$\begin{aligned} &\rho\, r\, \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial (r\,\sigma_r)}{\partial r} - \sigma_\varphi\,, \qquad &&\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda\,\frac{v_r}{r}\,,\\ &\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{v_r}{r}\,, &&\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение (2) баланса энергии для этой системы принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\, r\,\frac{v_r^2}{2} + r\,W\right) = \frac{\partial (r\,v_r\,\sigma_r)}{\partial r}\,.$$

Интегрирование (3) по ячейкам пространственно-временной прямоугольной сетки приводит к дискретным уравнениям шага “корректор”:

$$\begin{aligned} &\rho\, r^0\,\frac{\hat v_r - v_r}{\tau} = \frac{r^+\sigma_r^+ - r^-\sigma_r^-}{h} - \sigma_\varphi^0\,, \qquad &&\frac{\hat\sigma_r - \sigma_r}{\tau} = (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{v_r^+ - v_r^-}{h} + \lambda\,\frac{v_r^0}{r^0}\,,\\ &\frac{\hat\sigma_\varphi - \sigma_\varphi}{\tau} = \lambda\,\frac{v_r^+ - v_r^-}{h} + (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{v_r^0}{r^0}\,, &&\frac{\hat\sigma_z - \sigma_z}{\tau} = \lambda\,\frac{v_r^+ - v_r^-}{h} + \lambda\,\frac{v_r^0}{r^0}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь и далее величины с крышкой относятся к серединам ячеек верхнего временнóго слоя, без крышки — к серединам ячеек нижнего слоя; величины с индексами “$\pm$” относятся к правой и левой границам ячеек; $r^0 = (r^+ + r^-)/2$. Входящие сюда скорость v_r^0 и напряжение σ_φ^0, а также величины $\sigma_r^\pm$ и $v_r^\pm$ определяются на шаге “предиктор”.

Разностный аналог уравнения баланса энергии (2) для продольных волн получается путем умножения уравнений (4) на $(\hat v_r + v_r)/2$ и $r^0(\hat\sigma_r + \sigma_r)/2$, $r^0(\hat\sigma_\varphi + \sigma_\varphi)/2$, $r^0(\hat\sigma_z + \sigma_z)/2$, соответственно:

$$\begin{aligned} &\rho\, r^0\,\frac{\hat v_r^2 - v_r^2}{2\,\tau} + r^0\,\frac{\hat W - W}{\tau} = \frac{r^+ v_r^+\sigma_r^+ - r^- v_r^-\sigma_r^-}{h} - D\,,\\ &D = \frac{r^+\sigma_r^+ - r^-\sigma_r^-}{h}\left(\frac{v_r^+ + v_r^-}{2} - \frac{\hat v_r + v_r}{2}\right) +\\ &\qquad + \frac{v_r^+ - v_r^-}{h}\left(\frac{r^+\sigma_r^+ + r^-\sigma_r^-}{2} - r^0\,\frac{\hat\sigma_r + \sigma_r}{2}\right) + \sigma_\varphi^0\,\frac{\hat v_r + v_r}{2} - v_r^0\,\frac{\hat\sigma_\varphi + \sigma_\varphi}{2}\,. \end{aligned}$$

Идея контролируемой диссипации энергии [34] состоит в том, что выражение для D задается явно в виде положительно определенной квадратичной формы. Эта форма может быть тождественно равной нулю. Тогда получается бездиссипативная (полностью консервативная) схема.

Зададим квадратичную форму в виде $D = \gamma\,(v_r^+ - v_r^-)^2/h^2$ со свободным параметром $\gamma \geqslant 0$, полагая

$$v_r^0 = \frac{\hat v_r + v_r}{2} = \frac{\hat v_r^+ + v_r^-}{2}\,, \quad \sigma_\varphi^0 = \frac{\hat\sigma_\varphi + \sigma_\varphi}{2} = \frac{\sigma_\varphi^+ + \sigma_\varphi^-}{2}\,, \quad \frac{r^+\sigma_r^+ + r^-\sigma_r^-}{2} - r^0\,\frac{\hat\sigma_r + \sigma_r}{2} = \gamma\,\frac{v_r^+ - v_r^-}{h}\,. \tag{5}$$

В этом случае искусственная диссипация энергии неотрицательна, что автоматически обеспечивает устойчивость счета, убывает с измельчением сетки и зависит только от скорости деформации среды. При $\gamma = 0$ схема полностью консервативна, в ней на дискретном уровне выполняется закон сохранения энергии. Но на практике она оказывается непригодной для расчета разрывных решений и решений с большими градиентами из-за немонотонности.

С учетом уравнений (4) замыкающие уравнения схемы с контролируемой диссипацией энергии, используемые для вычисления величин с индексами “$\pm$” на шаге “предиктор”, приводятся к системе:

$$r^+\sigma_r^+ - r^-\sigma_r^- = a_{j-1/2}\,v_r^+ + b_{j-1/2}\,v_r^- + f_{j-1/2}\,, \quad r^+\sigma_r^+ + r^-\sigma_r^- = c_{j-1/2}\,v_r^+ + d_{j-1/2}\,v_r^- + g_{j-1/2}\,,$$

где $a_{j-1/2}$, $b_{j-1/2}$, $c_{j-1/2}$, $d_{j-1/2}$, $f_{j-1/2}$ и $g_{j-1/2}$ — коэффициенты, зависящие от номера ячейки $j = 1, 2, \dots, n$ (дробные индексы относятся к центрам ячеек), которые вычисляются по формулам

$$a_{j-1/2} = \frac{\rho\, h\, r^0}{\tau} + (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\tau\, h}{4\, r^0} + \lambda\,\frac{\tau}{2}\,, \quad b_{j-1/2} = \frac{\rho\, h\, r^0}{\tau} + (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\tau\, h}{4\, r^0} - \lambda\,\frac{\tau}{2}\,, \quad f_{j-1/2} = h\,\sigma_\varphi - 2\,h\,r^0\,\frac{\rho\, v_r}{\tau}\,,$$

$$c_{j-1/2} = \lambda\,\frac{\tau}{2} + (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\tau\, r^0}{h} + \frac{2\,\gamma}{h}\,, \qquad d_{j-1/2} = \lambda\,\frac{\tau}{2} - (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{\tau\, r^0}{h} - \frac{2\,\gamma}{h}\,, \qquad g_{j-1/2} = 2\,r^0\sigma_r\,.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 2\,r^+\sigma_r^+ &= \big(a_{j-1/2} + c_{j-1/2}\big)\,v_r^+ + \big(b_{j-1/2} + d_{j-1/2}\big)\,v_r^- + f_{j-1/2} + g_{j-1/2}\,, \\ 2\,r^-\sigma_r^- &= \big(c_{j-1/2} - a_{j-1/2}\big)\,v_r^+ + \big(d_{j-1/2} - b_{j-1/2}\big)\,v_r^- + g_{j-1/2} - f_{j-1/2}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Приравнивая эти выражения после сдвига по индексу j, получаем трехдиагональную систему уравнений для определения скоростей $v_r^+ = v_r^j$ и $v_r^- = v_r^{j-1}$ на границах ячеек:

$$A_j\,v_r^{j+1} + C_j\,v_r^j + B_j\,v_r^{j-1} = F_j \tag{7}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_j &= c_{j+1/2} - a_{j+1/2}\,, \qquad C_j = d_{j+1/2} - b_{j+1/2} - a_{j-1/2} - c_{j-1/2}\,, \\ B_j &= -\,b_{j-1/2} - d_{j-1/2}\,, \quad F_j = f_{j+1/2} + f_{j-1/2} - g_{j+1/2} + g_{j-1/2}\,. \end{aligned}$$

К системе уравнений для внутренних узлов (7) добавляются граничное условие $v_r^0 = 0$ на оси симметрии и граничное условие $v_r^n = v$, если на правой границе $r = R$ задана скорость v движения частиц, или вытекающее из (6) условие

$$\big(a_{n-1/2} + c_{n-1/2}\big)\,v_r^n + \big(b_{n-1/2} + d_{n-1/2}\big)\,v_r^{n-1} + f_{n-1/2} + g_{n-1/2} = 2\,R\sigma,$$

если на границе задано внешнее напряжение σ. В обоих случаях система уравнений с граничными условиями решается методом трехточечной прогонки.

Таким образом, алгоритм перехода на новый временно́й слой при численной реализации схемы начинается с вычисления величин $v_r^\pm$ и $\sigma_r^\pm$ с помощью уравнений (6), (7) шага "предиктор", затем по формулам (5) определяются v_r^0 и σ_φ^0. Заключительные вычисления $\hat v_r$, $\hat\sigma_r$, $\hat\sigma_\varphi$ и $\hat\sigma_z$ проводятся на основе уравнений (4) шага "корректор".

Для сопоставления рассмотрим три варианта явных разностных схем, основанных на решении задачи о распаде произвольного разрыва. Схемы строятся путем аппроксимации первого уравнения системы (3), записанного в эквивалентной (неконсервативной) форме:

$$\rho\,\frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}\,.$$

Схема "предиктор–корректор" с явной аппроксимацией младших членов

$$\begin{aligned} &\rho\,\frac{\hat v_r - v_r}{\tau} = \frac{\sigma_r^+ - \sigma_r^-}{h} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r^0}\,, && \frac{\hat\sigma_r - \sigma_r}{\tau} = (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{v_r^+ - v_r^-}{h} + \lambda\,\frac{v_r}{r^0}\,, \\ &\frac{\hat\sigma_\varphi - \sigma_\varphi}{\tau} = \lambda\,\frac{v_r^+ - v_r^-}{h} + (\lambda + 2\,\mu)\,\frac{v_r}{r^0}\,, && \frac{\hat\sigma_z - \sigma_z}{\tau} = \lambda\left(\frac{v_r^+ - v_r^-}{h} + \frac{v_r}{r^0}\right), \\ &v_r^+ - \frac{\sigma_r^+}{\rho\, c_p} = v_r - \frac{\sigma_r}{\rho\, c_p}\,, && v_r^- + \frac{\sigma_r^-}{\rho\, c_p} = v_z + \frac{\sigma_r}{\rho\, c_p} \end{aligned}$$

пригодна для расчетов, только если параметр Куранта $K_p = c_p\,\tau/h$ лежит в диапазоне от 0 до 0.8. При значениях больше 0.8 проявляются паразитные осцилляции вблизи оси симметрии. Амплитуда осцилляций неограниченно растет с увеличением K_p от 0.9 до 1, что приводит к искажению решения. При малых значениях K_p схемная вязкость сильно сглаживает решение. По этим двум причинам данную схему использовать в расчетах не целесообразно.

Схема с неявной аппроксимацией младших членов получается заменой напряжений σ_r, σ_φ и скорости v_r в младших членах на $\hat\sigma_r$, $\hat\sigma_\varphi$ и $\hat v_r$. Такая схема устойчива и монотонна во всем диапазоне $0 < K_p \leqslant 1$, но также обладает чрезмерным сглаживанием за счет схемной вязкости при достаточно малых значениях параметра Куранта.

Схема с неявной аппроксимацией по методу Кранка–Николсон с заменой σ_r, σ_φ и v_r на

$$\frac{\hat{\sigma}_r + \sigma_r}{2}, \quad \frac{\hat{\sigma}_\varphi + \sigma_\varphi}{2}, \quad \frac{\hat{v}_r + v_r}{2}$$

по точности численного решения обладает преимуществами перед явной и неявной схемами.

Верификация вычислительных алгоритмов, реализующих схемы, проводилась путем сравнения результатов расчета с точным решением, описывающим монохроматические волны заданной частоты ω, которое может быть получено методом разделения переменных:

$$v_r = \frac{\sigma_0}{\rho\, c_p} \sin\omega t\, J_1(\xi_p)\,, \qquad \sigma_r = \frac{\sigma_0}{\lambda + 2\,\mu} \cos\omega t\left((\lambda + 2\,\mu)\, J_2(\xi_p) - \frac{2\,(\lambda + \mu)}{\xi_p}\, J_1(\xi_p)\right),$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_0}{\lambda + 2\,\mu} \cos\omega t\left(\lambda\, J_2(\xi_p) - \frac{2\,(\lambda + \mu)}{\xi_p}\, J_1(\xi_p)\right), \qquad \sigma_z = \frac{\lambda\,\sigma_0}{\lambda + 2\,\mu} \cos\omega t\left(J_2(\xi_p) - \frac{2}{\xi}\, J_1(\xi_p)\right),$$

где $\xi_p = \omega\, r/c_p$ — безразмерная переменная. Здесь и ниже используются стандартные обозначения для функций Бесселя $J_k(x)$ целого порядка k.

В табл. 1–4 представлены относительные погрешности схем для разных частот в зависимости от параметра Куранта. В расчетах безразмерная частота $\bar{\omega} = \omega\, R/c_s$, где R — радиус расчетной области,

Таблица 1

Относительные погрешности для бездиссипативной схемы: $\gamma = 0$ (продольные волны)

K_p \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.00023	0.00110	0.00837	0.01408	0.03500
0.75	0.00009	0.00045	0.00405	0.00701	0.01818
1	0.00019	0.00081	0.00201	0.00349	0.00563
1.25	0.00049	0.00210	0.00977	0.01621	0.03527
1.5	0.00085	0.00372	0.01920	0.03209	0.07125

Таблица 2

Относительные погрешности для схемы с явной аппроксимацией младших членов (продольные волны)

K_p \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.04334	0.09600	0.37513	0.40646	0.63148
0.75	0.02148	0.05053	0.19970	0.25226	0.39363

Таблица 3

Относительные погрешности для схемы с неявной аппроксимацией младших членов (продольные волны)

K_p \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.04802	0.10547	0.39297	0.41076	0.65137
0.75	0.02860	0.06545	0.23341	0.26373	0.44424
1	0.01025	0.02666	0.03320	0.04613	0.05591

Таблица 4

Относительные погрешности для схемы с аппроксимацией Кранка–Николсон (продольные волны)

K_p \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.03824	0.09015	0.36576	0.40030	0.62509
0.75	0.01350	0.04288	0.18149	0.23903	0.37536
0.97	0.00912	0.02940	0.02788	0.05726	0.04975
1	0.01220	0.03379	0.05646	0.06663	0.12026

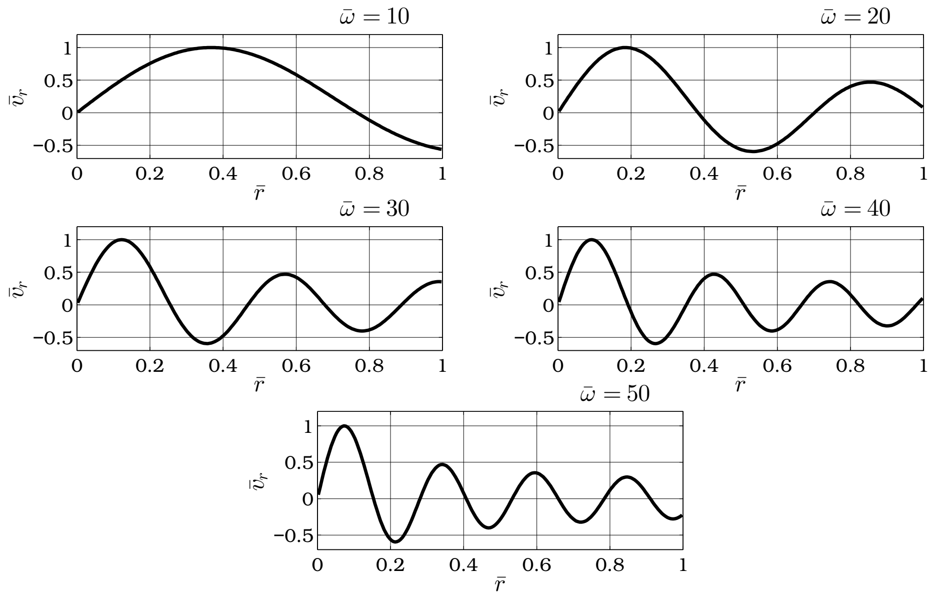

Рис. 1. Точное решение с продольными цилиндрическими волнами для безразмерной скорости

менялась от 10 до 50. При таких частотах число полуволн в расчетной области варьируется от полутора до семи с половиной (рис. 1).

Погрешности численных решений вычислялись относительно дискретного аналога нормы пространства $L_\infty\big(0,T;L_2(0,R)\big)$:

$$\big\|\big(v_r,\sigma_r,\sigma_\varphi,\sigma_z\big)\big\| = \sup_{0<t<T}\sqrt{\pi\int\limits_0^R\left(\rho\,\frac{v_r^2}{2}+W\right)dr^2}\,.$$

Время T задавалось так, чтобы в интервале $(0,T)$ продольная цилиндрическая волна проходила расстояние $2R$ с однократным отражением от оси симметрии.

Расчеты проводились на разностной сетке в 200 ячеек. Анализ данных в таблицах показывает, что точность численного решения по схемам с неявной аппроксимацией младших членов и с аппроксимацией Кранка–Николсон теряется, если на одну полуволну приходится менее 60–70 ячеек сетки. Бездиссипативная схема работает безупречно на всех частотах из рассматриваемого диапазона.

На рис. 2 и 3 показаны профили скорости за фронтом сильного разрыва, вызванного внезапным приложением постоянного напряжения на границе области. Результаты на рис. 2 получены по схеме с аппроксимацией Кранка–Николсон, на рис. 3 — по бездиссипативной схеме. В случае бездиссипативной схемы профили скоростей и напряжений оказываются монотонными только при $K_p = 1$, но уже при $K_p = 0.9$ появляются паразитные осцилляции перед фронтом волны, которые сильно нарастают с отклонением параметра Куранта от единицы. Осцилляции сглаживаются за счет введения искусственной диссипации энергии подбором определенного значения параметра $\gamma > 0$ или за счет сглаживания эпюры резкого приложения напряжения на границе монотонным нарастанием напряжения от нуля до заданного постоянного значения не менее чем за 10 шагов сетки по времени.

Сглаженные профили скорости, полученные в расчетах внезапного нагружения по схеме с контролируемой искусственной диссипацией энергии при $\gamma = 0.0005$, приведены на рис. 4. Необходимо отметить, что максимальные амплитуды волн на графиках для фиксированных моментов времени практически не зависят от параметра Куранта. Это говорит о хорошем качестве схемы. Однако при изменении параметра Куранта положение фронта разрыва незначительно смещается.

Для распараллеливания вычислений на кластерных архитектурах при решении задач большой размерности на основе схемы с контролируемой диссипацией энергии можно применить итерационный процесс, который в численных экспериментах показал исключительно высокую скорость сходимости приближений. Как оказалось, чтобы достичь погрешностей счета, приведенных в табл. 1, достаточно выполнить всего лишь две-три итерации.

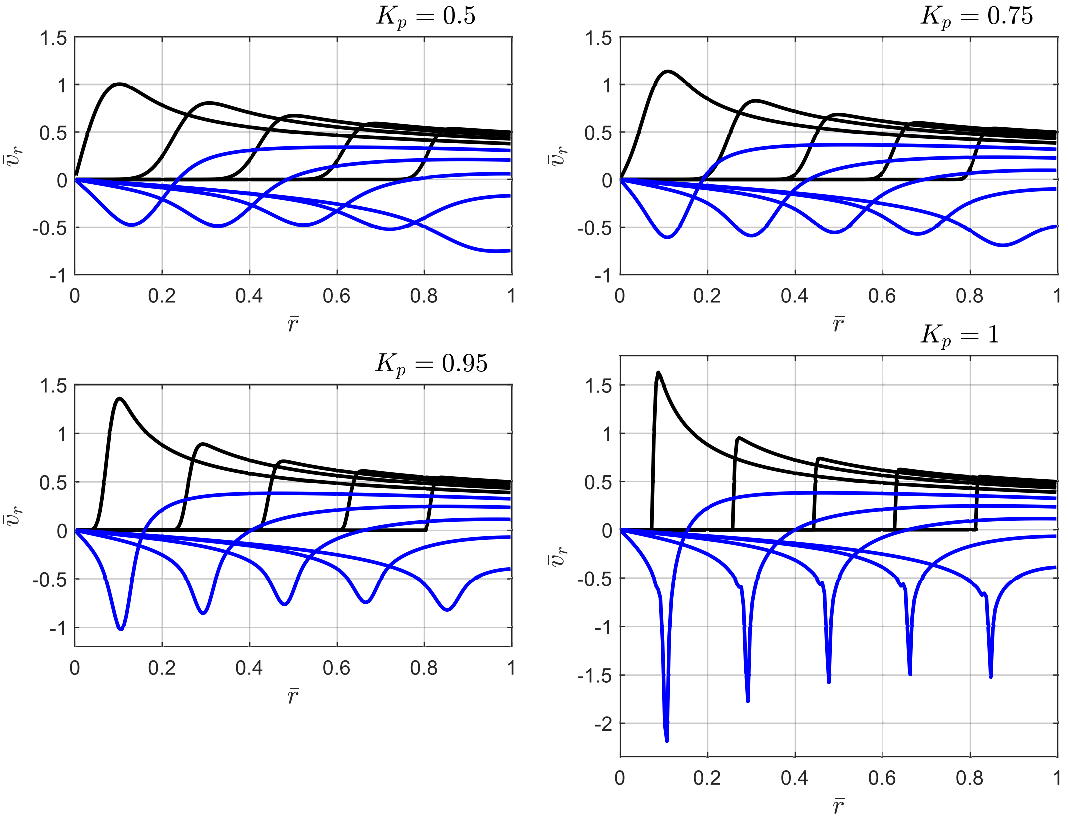

Рис. 2. Профили скорости за фронтом разрыва: схема с аппроксимацией Кранка–Николсон (продольные волны)

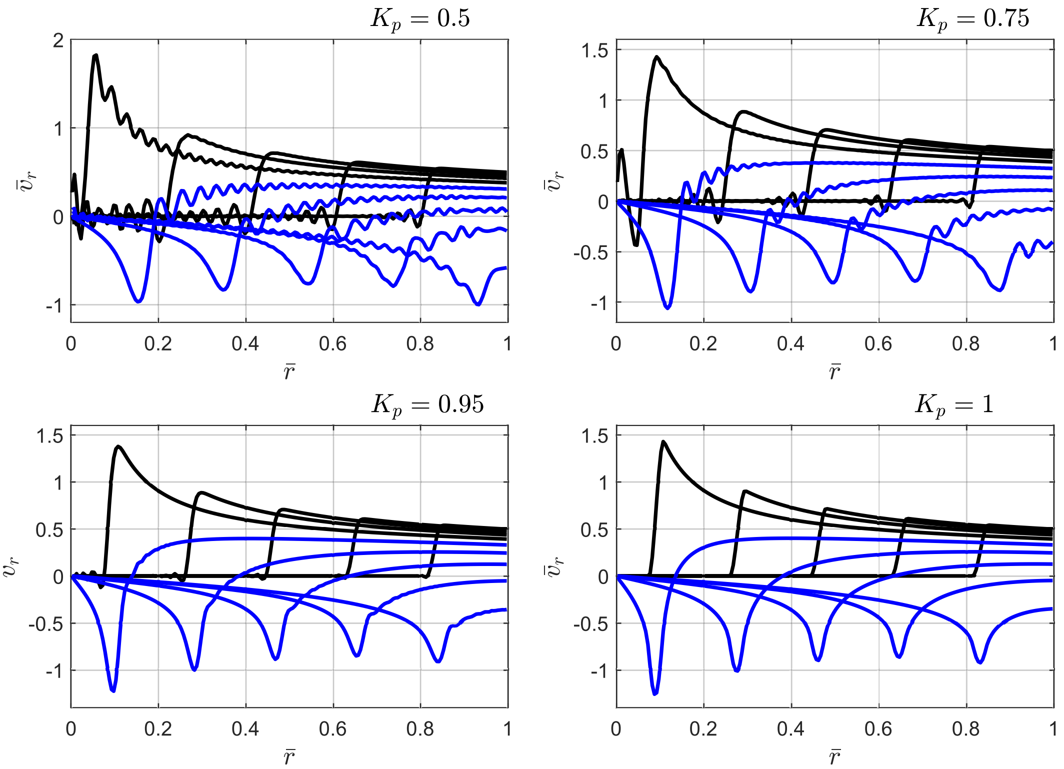

Рис. 3. Профили скорости за фронтом разрыва: бездиссипативная схема (продольные волны)

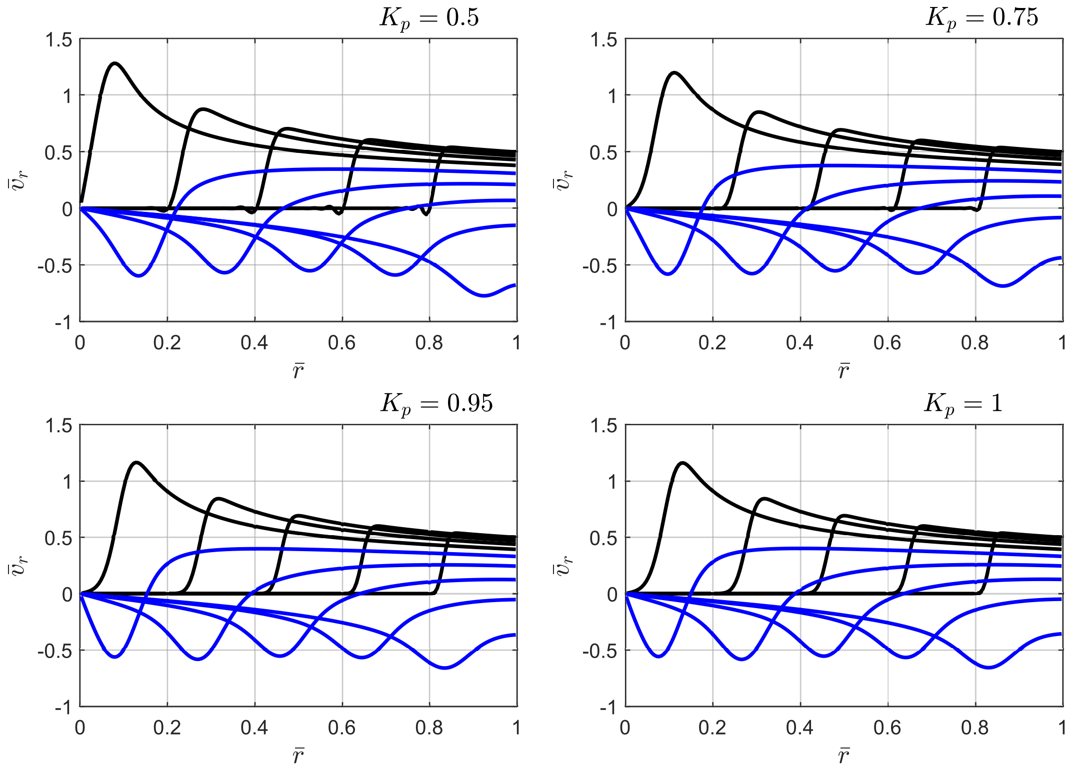

Рис. 4. Профили скорости за фронтом разрыва: схема с диссипацией (продольные волны)

Проблема заключается в распараллеливании метода прогонки на шаге “предиктор” разностной схемы. Для этого сначала система уравнений (7) “разрывается” на стыках соседних процессоров — соответствующие трехточечные уравнения системы заменяются уравнениями распада разрыва схемы Годунова:

$$v_r^j = \frac{v_{r\,j+1/2} + v_{r\,j-1/2}}{2} + \frac{\sigma_{r\,j+1/2} - \sigma_{r\,j-1/2}}{2\,\rho\,c_p}\,,$$

где дробные индексы указывают на принадлежность значений скорости и напряжения к приграничным ячейкам сетки соседних процессоров. Данная процедура позволяет реализовать прогонку на процессорах вычислительного кластера в параллельном режиме, получив первое приближение к решению. Затем производится итерационный пересчет значений скорости на стыках процессоров через полученное приближение по формуле

$$\hat{v}_r^j = \frac{F_j - A_j\,v_r^{j-1} - B_j\,v_r^{j+1}}{C_j}$$

с последующей параллельной реализацией метода прогонки. При таком алгоритме точность вычислений, достигаемая сквозной прогонкой, для уравнений продольных волн практически полностью восстанавливается после однократного применения описанного алгоритма. В рассмотренных далее задачах с поперечными волнами и с крутильными волнами для ее восстановления необходимо выполнить еще одну итерацию.

Судя по приведенным рисункам, неконсервативная разностная схема с аппроксимацией младших членов по методу Кранка–Николсон дает гораздо более надежные результаты расчета разрывных решений во всем диапазоне изменения параметра Куранта $K_p \leqslant 1$, в котором эта схема устойчива.

Заметим, что аналогичные схемы, основанные на уравнениях в консервативной форме (3), неадекватно искажают картину отражения волн от оси симметрии даже в случае гладких решений, что в конечном итоге приводит к полной потере точности.

Результаты исследований этого раздела в сокращенном варианте опубликованы в англоязычной статье авторов [36].

4. Поперечные цилиндрические волны. Одномерные движения с поперечными волнами в осесимметричном случае описываются уравнениями

$$\rho\, r\, \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial (r\,\sigma_{rz})}{\partial r}\,, \quad \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r}\,, \tag{8}$$

из которых следует уравнение баланса энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\, r\,\frac{v_z^2}{2} + r\,\frac{\sigma_{rz}^2}{2\,\mu}\right) = \frac{\partial (r\, v_z\,\sigma_{rz})}{\partial r}\,.$$

При построении разностной схемы с контролируемой диссипацией энергии уравнения (8) аппроксимируются следующими уравнениями шага "корректор":

$$\rho\, r^0\,\frac{\hat v_z - v_z}{\tau} = \frac{r^+\sigma_{rz}^+ - r^-\sigma_{rz}^-}{h}\,, \quad \frac{\hat\sigma_{rz} - \sigma_{rz}}{\mu\,\tau} = \frac{v_z^+ - v_z^-}{h}\,. \tag{9}$$

Дискретное уравнение баланса энергии принимает следующий вид:

$$\rho\, r^0\,\frac{\hat v_z^2 - v_z^2}{2\,\tau} + r^0\,\frac{\hat\sigma_{rz}^2 - \sigma_{rz}^2}{2\,\mu\,\tau} = \frac{r^+ v_z^+\sigma_{rz}^+ - r^- v_z^-\sigma_{rz}^-}{h} - D\,,$$

$$D = \frac{r^+\sigma_{rz}^+ - r^-\sigma_{rz}^-}{h}\left(\frac{v_z^+ + v_z^-}{2} - \frac{\hat v_z + v_z}{2}\right) + \frac{v_z^+ - v_z^-}{h}\left(\frac{r^+\sigma_{rz}^+ + r^-\sigma_{rz}^-}{2} - r^0\,\frac{\hat\sigma_{rz} + \sigma_{rz}}{2}\right).$$

Искусственная диссипация энергии в схеме задается как положительно определенная квадратичная форма $D = \gamma\,(v_z^+ - v_z^-)^2/h^2$ за счет замыкающих уравнений шага "предиктор":

$$\frac{\hat v_z + v_z}{2} = \frac{v_z^+ + v_z^-}{2}\,, \quad r^0\,\frac{\hat\sigma_{rz} + \sigma_{rz}}{2} = \frac{r^+\sigma_{rz}^+ + r^-\sigma_{rz}^-}{2} - \gamma\,\frac{v_z^+ - v_z^-}{h} \tag{10}$$

(γ — неотрицательный параметр схемной диссипации).

После исключения величин $\hat v_z$ и $\hat\sigma_{rz}$, выраженных из (9), уравнения (10) преобразуются к системе:

$$\frac{v_z^+ + v_z^-}{2} - \frac{\tau}{2\,\rho\, r^0}\,\frac{r^+\sigma_{rz}^+ - r^-\sigma_{rz}^-}{h} = v_z\,, \quad \frac{r^+\sigma_{rz}^+ + r^-\sigma_{rz}^-}{2} - \left(\gamma + \frac{\mu\,\tau\, r^0}{2}\right)\frac{v_z^+ - v_z^-}{h} = r^0\,\sigma_{rz}\,,$$

которая представима в виде

$$r^+\sigma_{rz}^+ - r^-\sigma_{rz}^- = a_{j-1/2}\, v_z^+ + b_{j-1/2}\, v_z^- + f_{j-1/2}\,, \quad r^+\sigma_{rz}^+ + r^-\sigma_{rz}^- = c_{j-1/2}\, v_z^+ + d_{j-1/2}\, v_z^- + g_{j-1/2}$$

с коэффициентами

$$a_{j-1/2} = \frac{\rho\, h\, r^0}{\tau}\,, \qquad b_{j-1/2} = a_{j-1/2}\,, \qquad f_{j-1/2} = -\,2\,a_{j-1/2}\, v_z\,,$$

$$c_{j-1/2} = \mu\,\frac{\tau\, r^0}{h} + \frac{2\,\gamma}{h}\,, \quad d_{j-1/2} = -\,c_{j-1/2}\,, \quad g_{j-1/2} = 2\, r^0\sigma_{rz}\,.$$

В этих обозначениях выполняется система уравнений (6) с точностью до замены радиального напряжения σ_r касательным напряжением σ_{rz}. К системе добавляется граничное условие на оси симметрии:

$$\bigl(c_{1/2} - a_{1/2}\bigr) v_z^1 + \bigl(d_{1/2} - b_{1/2}\bigr) v_z^0 = f_{1/2} - g_{1/2}\,,$$

соответствующее условию $\sigma_{rz}^0 = 0$ при $r = 0$, и граничное условие при $r = R$ для скорости: $v_z^n = v$ или для касательного напряжения:

$$\bigl(a_{n-1/2} + c_{n-1/2}\bigr) v_z^n + \bigl(b_{n-1/2} + d_{n-1/2}\bigr) v_z^{n-1} = 2\, R\,\sigma - f_{n-1/2} - g_{n-1/2}\,.$$

С граничными условиями такого вида полученная система уравнений решается методом трехточечной прогонки и соответствующий алгоритм пересчета решения на один шаг по времени повторяет алгоритм в задаче о продольных цилиндрических волнах.

Для сопоставления по точности численного решения снова рассмотрим три сеточно-характеристические схемы, основанные на эквивалентной записи системы уравнений (8) в форме

$$\rho\,\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r}\,, \quad \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

и на аппроксимации этих уравнений по методу распада разрыва Годунова.

Как показали численные эксперименты, схема "предиктор–корректор" с явной аппроксимацией младших членов

$$\begin{aligned} &\rho\,\frac{\hat v_z - v_z}{\tau} = \frac{\sigma_{rz}^{+} - \sigma_{rz}^{-}}{h} + \frac{\sigma_{rz}}{r^0}\,, && \frac{\hat\sigma_{rz} - \sigma_{rz}}{\mu\,\tau} = \frac{v_z^{+} - v_z^{-}}{h}\,, \\ &v_z^{+} - \frac{\sigma_{rz}^{+}}{\rho c_s} = v_z - \frac{\sigma_{rz}}{\rho c_s}\,, && v_z^{-} + \frac{\sigma_{rz}^{-}}{\rho\, c_s} = v_z + \frac{\sigma_{rz}}{\rho\, c_s} \end{aligned} \tag{11}$$

устойчива при выполнении условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви: $K_s \equiv c_s\,\tau/h \leqslant 1$, но при максимальном допустимом шаге по времени $\tau = h/c_s$ немонотонна (появляются паразитные осцилляции вблизи оси симметрии). При малых значениях шага схемная вязкость сильно сглаживает решение.

Схема с неявной аппроксимацией младших членов, которая получается заменой первого уравнения в (11) уравнением

$$\rho\,\frac{\hat v_z - v_z}{\tau} = \frac{\sigma_{rz}^{+} - \sigma_{rz}^{-}}{h} + \frac{\hat\sigma_{rz}}{r^0}\,,$$

устойчива во всем диапазоне $0 < K_s \leqslant 1$ и так же обладает сглаживанием при расчете разрывных решений при малых значениях параметра K_s.

Схема с неявной аппроксимацией младших членов по методу Кранка–Николсон, первое уравнение которой принимает вид

$$\rho\,\frac{\hat v_z - v_z}{\tau} = \frac{\sigma_{rz}^{+} - \sigma_{rz}^{-}}{h} + \frac{\hat\sigma_{rz} + \sigma_{rz}}{2\,r^0}\,,$$

устойчива во всем диапазоне $0 < K_s \leqslant 1$ и более точно воспроизводит состояние вблизи фронта разрыва по сравнению с явной и неявной аппроксимацией.

Сравнение результатов расчетов по этим схемам с расчетами по схеме с контролируемой диссипацией энергии дало такие же качественные выводы, как и в случае продольных цилиндрических волн. Оказалось, что неконсервативная разностная схема с аппроксимацией младших членов по методу Кранка–Николсон ввиду монотонности имеет преимущества при расчете разрывов, но существенно уступает бездиссипативной схеме по точности на гладких решениях.

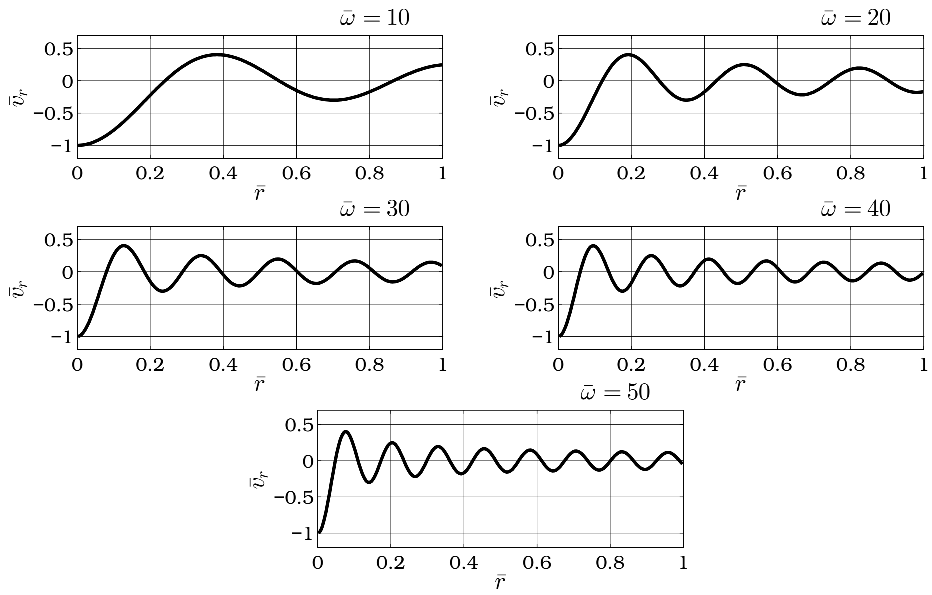

Рис. 5. Эпюры поперечной скорости при разных частотах

Для анализа погрешности счета использовалось точное решение задачи об одномерном движении цилиндрической поперечной волны:

$$v_z = \frac{\sigma_0}{\rho\, c_s} \cos\omega t \left(J_2(\xi_s) - \frac{2}{\xi_s}\, J_1(\xi_s) \right), \quad \sigma_{rz} = \sigma_0\, \sin\omega t\, J_1(\xi_s) \quad \left(\xi_s = \frac{\omega\, r}{c_s}\right).$$

Эпюры обезразмеренной скорости для этого решения в фиксированный момент времени при разных частотах приведены на рис. 5.

В табл. 5–8 представлены погрешности численного решения, анализ которых показывает, что при использовании схемы с аппроксимацией Кранка–Николсон (наилучшей среди рассматриваемых явных схем) для получения надежных результатов необходимо выбирать разностную сетку так, чтобы на одну полуволну приходилось как минимум 60–70 ячеек. Бездиссипативная схема дает надежные результаты независимо от числа полуволн, если $K_s \leqslant 1$, но ее точность падает с ростом числа полуволн, если $K_s > 1$.

Таблица 5

Относительные погрешности для бездиссипативной схемы: $\gamma = 0$ (поперечные волны)

K_s \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.00225	0.01931	0.05280	0.101125	0.24425
0.75	0.00097	0.00975	0.02758	0.05381	0.13792
1	0.00097	0.00385	0.00867	0.01589	0.02498
1.25	0.00330	0.02081	0.05215	0.10075	0.24307
1.5	0.00615	0.04155	0.10506	0.20785	0.53001

Таблица 6

Относительные погрешности для схемы с явной аппроксимацией младших членов (поперечные волны)

K_s \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.16838	0.51326	0.64188	0.72456	0.86577
0.75	0.05807	0.24316	0.37495	0.50673	0.74317
1	0.06842	0.19771	0.35433	0.45500	0.46565

Таблица 7

Относительные погрешности для схемы с неявной аппроксимацией младших членов (поперечные волны)

K_s \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.19499	0.55547	0.67563	0.73462	0.86316
0.75	0.10331	0.33726	0.47610	0.55343	0.73860
1	0.00956	0.01371	0.01687	0.01968	0.02223

Таблица 8

Относительные погрешности для схемы с аппроксимацией Кранка–Николсон (поперечные волны)

K_s \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.18180	0.53469	0.65886	0.72938	0.86436
0.75	0.08090	0.29110	0.42511	0.52797	0.73944
0.97	0.02361	0.04792	0.08386	0.14222	0.21822
1	0.03341	0.09611	0.16719	0.21048	0.21554

На рис. 6, 7 и 8 представлены характерные графики распределения скорости за скачкообразным фронтом, который движется в направлении оси симметрии и отражается от оси, полученные по схеме с аппроксимацией Кранка–Николсон, по бездиссипативной разностной схеме и по схеме с контролируемой диссипацией (при $\gamma = 0.0005$).

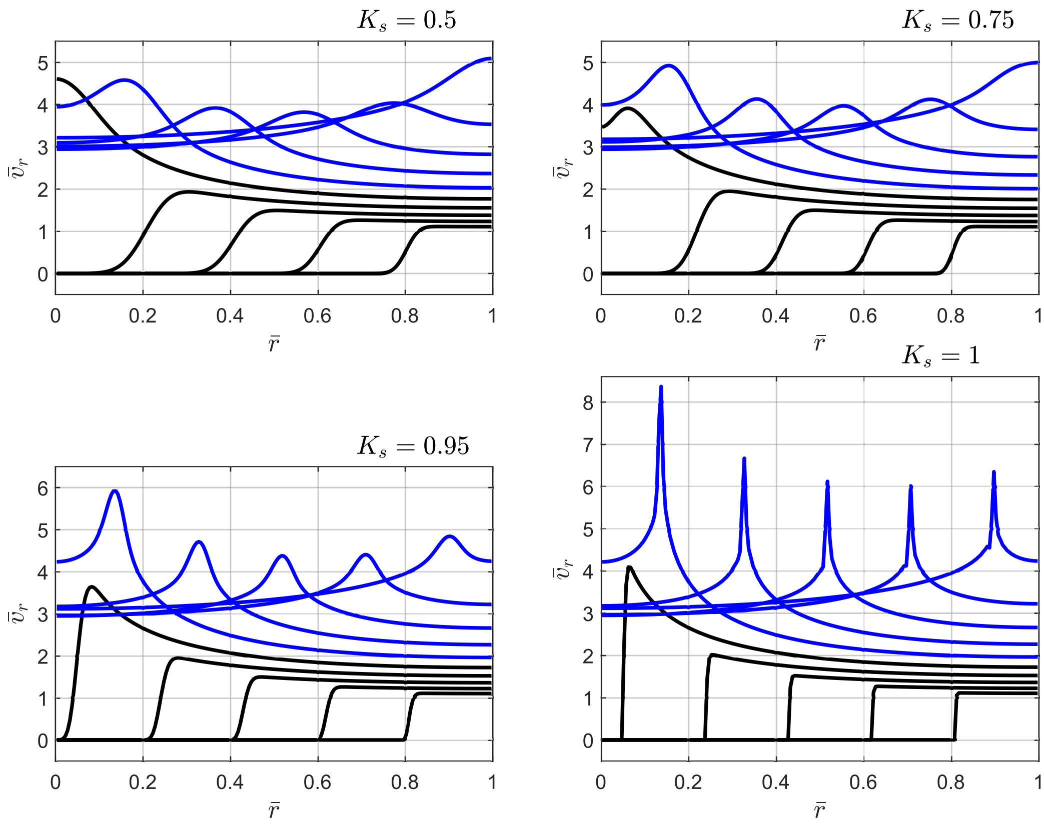

Рис. 6. Профили скорости за фронтом разрыва: схема с аппроксимацией Кранка–Николсон (поперечные волны)

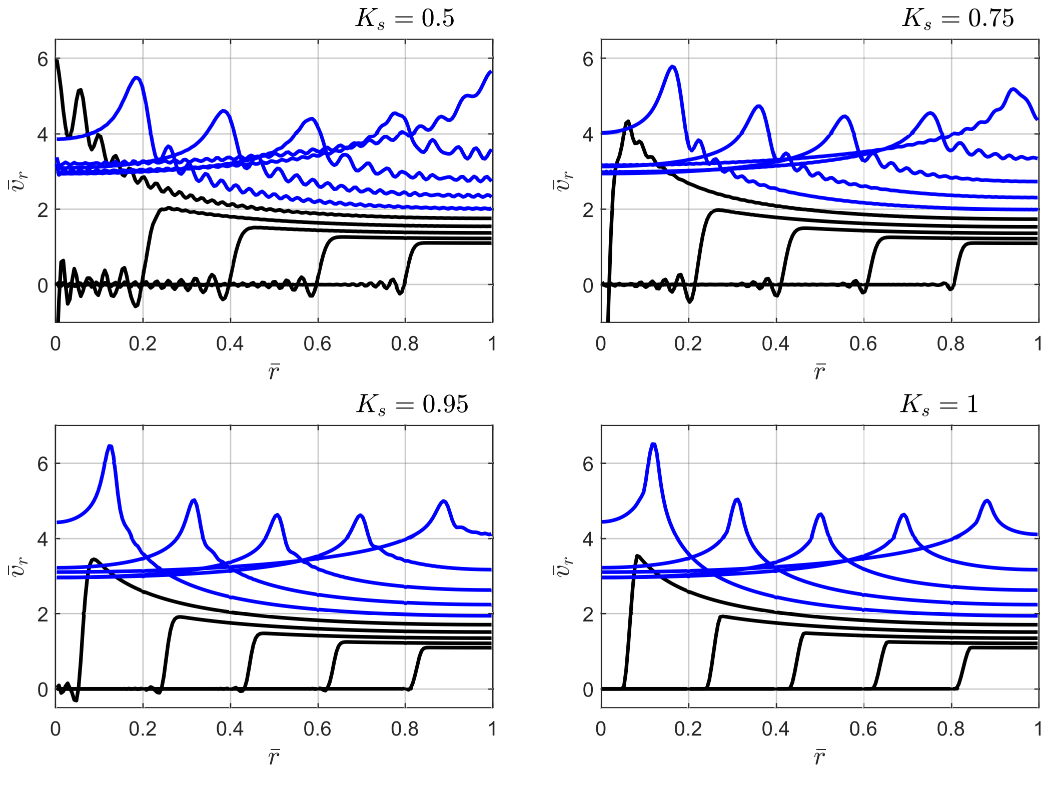

Рис. 7. Профили скорости за фронтом разрыва: бездиссипативная схема (поперечные волны)

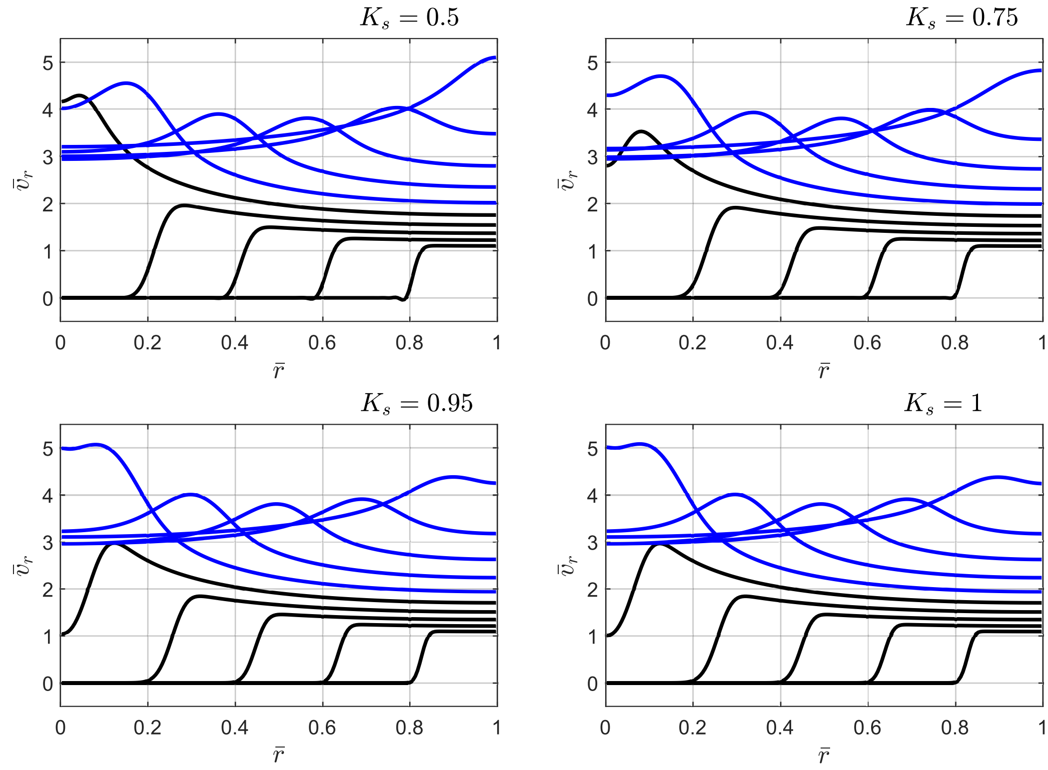

Рис. 8. Профили скорости за фронтом разрыва: схема с диссипацией (поперечные волны)

5. Крутильные волны. Одномерные крутильные волны описывает система уравнений

$$\rho\, r\, \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial (r\, \sigma_{r\varphi})}{\partial r} + \sigma_{r\varphi}\,, \qquad \frac{1}{\mu}\, \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\,. \tag{12}$$

Уравнение баланса энергии для этой системы принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\, r\, \frac{v_\varphi^2}{2} + r\, \frac{\sigma_{r\varphi}^2}{2\,\mu}\right) = \frac{\partial (r\, v_\varphi\, \sigma_{r\varphi})}{\partial r}\,. \tag{13}$$

Дискретные аналоги уравнений (12) и (13) в ячейке записываются в форме:

$$\rho\, r^0\, \frac{\hat{v}_\varphi - v_\varphi}{\tau} = \frac{r^+ \sigma_{r\varphi}^+ - r^- \sigma_{r\varphi}^-}{h} + \sigma_{r\varphi}^0\,, \quad \frac{\hat{\sigma}_{r\varphi} - \sigma_{r\varphi}}{\mu\, \tau} = \frac{v_\varphi^+ - v_\varphi^-}{h} - \frac{v_\varphi^0}{r^0}\,,$$

$$\rho\, r^0\, \frac{\hat{v}_\varphi^2 - v_\varphi^2}{2\tau} + r^0\, \frac{\hat{\sigma}_{r\varphi}^2 - \sigma_{r\varphi}^2}{2\, \mu\, \tau} = \frac{r^+ v_\varphi^+ \sigma_{r\varphi}^+ - r^- v_\varphi^- \sigma_{r\varphi}^-}{h} - D\,,$$

$$D = \frac{r^+ \sigma_{r\varphi}^+ - r^- \sigma_{r\varphi}^-}{h} \left(\frac{v_\varphi^+ + v_\varphi^-}{2} - \frac{\hat{v}_\varphi + v_\varphi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{v_\varphi^+ - v_\varphi^-}{h} \left(\frac{r^+ \sigma_{r\varphi}^+ + r^- \sigma_{r\varphi}^-}{2} - r^0\, \frac{\hat{\sigma}_{r\varphi} + \sigma_{r\varphi}}{2}\right) - \sigma_{r\varphi}^0\, \frac{\hat{v}_\varphi + v_\varphi}{2} + v_\varphi^0\, \frac{\hat{\sigma}_{r\varphi} + \sigma_{r\varphi}}{2}\,.$$

Замыкающие уравнения шага “предиктор” строятся так, чтобы обеспечить положительную определенность квадратичной формы $D = \gamma\, (v_\varphi^+ - v_\varphi^-)^2/h^2$ с параметром диссипации $\gamma \geqslant 0$. По форме они совпадают с уравнениями (5), если заменить v_r на v_φ, а σ_r на $\sigma_{r\varphi}$. После исключения величин $\hat{v}_\varphi$ и $\hat{\sigma}_{r\varphi}$ эти уравнения дают:

$$\sigma_{r\varphi}^0 = \frac{\mu\, \tau}{2}\left(\frac{v_\varphi^+ - v_\varphi^-}{h} - \frac{v_\varphi^+ + v_\varphi^-}{2\, r^0}\right) + \sigma_{r\varphi}\,, \qquad \frac{v_\varphi^+ + v_\varphi^-}{2} = \frac{\tau}{2\, \rho\, r^0}\left(\frac{r^+ \sigma_{r\varphi}^+ - r^- \sigma_{r\varphi}^-}{h} + \sigma_{r\varphi}^0\right) + v_\varphi\,,$$

$$\frac{r^+ \sigma_{r\varphi}^+ + r^- \sigma_{r\varphi}^-}{2} = r^0 \sigma_{r\varphi}^0 + \gamma\, \frac{v_\varphi^+ - v_\varphi^-}{h}\,.$$

Они приводятся к системе

$$r^+\sigma^+_{r\varphi} - r^-\sigma^-_{r\varphi} = a_{j-1/2}\, v^+_\varphi + b_{j-1/2}\, v^-_\varphi + f_{j-1/2}\,, \quad r^+\sigma^+_{r\varphi} + r^-\sigma^-_{r\varphi} = c_{j-1/2}\, v^+_\varphi + d_{j-1/2}\, v^-_\varphi + g_{j-1/2}$$

с коэффициентами

$$a_{j-1/2} = \frac{\rho\, h\, r^0}{\tau} - \frac{\mu\,\tau}{2} + \frac{\mu\,\tau\, h}{4\, r^0}\,, \quad b_{j-1/2} = \frac{\rho\, h\, r^0}{\tau} + \frac{\mu\,\tau}{2} + \frac{\mu\,\tau\, h}{4\, r^0}\,, \quad f_{j-1/2} = -\,2\,\frac{\rho\, h\, r^0}{\tau}\, v_\varphi - h\,\sigma_{r\varphi}\,,$$

$$c_{j-1/2} = \frac{\mu\,\tau\, r^0}{h} - \frac{\mu\,\tau}{2} + \frac{2\,\gamma}{h}\,, \qquad d_{j-1/2} = -\,\frac{\mu\,\tau\, r^0}{h} - \frac{\mu\,\tau}{2} - \frac{2\,\gamma}{h}\,, \quad g_{j-1/2} = 2\, r^0 \sigma_{r\varphi}\,.$$

В этих обозначениях снова получается трехдиагональная система уравнений (7), записанная относительно скорости v_φ. К ней добавляются условие симметрии $\sigma_{r\varphi} = 0$ при $r = 0$ и условие для скорости $v_\varphi = v$ или для напряжения $\sigma_{r\varphi} = \sigma$ на границе области $r = R$, которые, как и в случае продольных или поперечных цилиндрических волн, формулируются в виде уравнений, реализуемых совместно с основной системой методом трехточечной прогонки.

Пошаговый вычислительный алгоритм в данном случае повторяет алгоритмы для схем с контролируемой диссипацией энергии, описанные в предыдущих разделах.

Для сравнительных расчетов рассматривались сеточно-характеристические разностные схемы типа “предиктор–корректор”, которые основаны на уравнениях в виде

$$\rho\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\,\sigma_{r\varphi}}{r}\,, \quad \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\,.$$

Неконсервативная схема с явной аппроксимацией младших членов

$$\rho\,\frac{\hat v_\varphi - v_\varphi}{\tau} = \frac{\sigma^+_{r\varphi} - \sigma^-_{r\varphi}}{h} + \frac{2\,\sigma_{r\varphi}}{r^0}\,, \quad \frac{\hat\sigma_{r\varphi} - \sigma_{r\varphi}}{\mu\,\tau} = \frac{v^+_\varphi - v^-_\varphi}{h} - \frac{v_\varphi}{r^0}\,,$$

$$v^+_\varphi - \frac{\sigma^+_{r\varphi}}{\rho\, c_s} = v_\varphi - \frac{\sigma_{r\varphi}}{\rho\, c_s}\,, \qquad v^-_\varphi + \frac{\sigma^-_{r\varphi}}{\rho\, c_s} = v_\varphi + \frac{\sigma_{r\varphi}}{\rho\, c_s}$$

дает сильные осцилляции решения, возрастающие со временем (она неустойчива), уже при $K_s = 0.5$ и выше, поэтому использовать ее при практических расчетах не целесообразно.

Схема с неявной аппроксимацией младших членов, полученная заменой касательного напряжения $\sigma_{r\varphi}$ и скорости v_φ на $\hat\sigma_{r\varphi}$ и $\hat v_\varphi$, и схема с аппроксимацией младших членов по методу Кранка–Николсон обладают устойчивостью при всех $K_s \leqslant 1$.

Относительные погрешности счета вычислялись по норме $L_\infty(0, T; L_2(0, R))$ в сравнении с точным решением уравнений (12) типа монохроматической волны с частотой ω:

$$v_\varphi = \frac{\sigma_0}{\rho\, c_s}\cos\omega t\,\left(J_3(\xi_s) - \frac{4}{\xi_s}\, J_2(\xi_s)\right), \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_0\,\sin\omega t\, J_2(\xi_s) \quad \left(\xi_s = \frac{\omega\, r}{c_s}\right).$$

Эпюры скорости для этого решения показаны на рис. 9. В табл. 9–11 приведены погрешности счета для рассматриваемых схем.

Таблица 9

Относительные погрешности для бездиссипативной схемы: $\gamma = 0$ (крутильные волны)

K_s \ $\bar\omega$	10	20	30	40	50
0.5	0.00115	0.01481	0.06891	0.18515	0.33317
0.75	0.00045	0.00743	0.03702	0.10161	0.18224
1	0.00070	0.00336	0.00819	0.01496	0.02288
1.25	0.00201	0.01667	0.06618	0.16396	0.27024
1.5	0.00364	0.03322	0.13758	0.34264	0.54504

Характерные профили скорости, полученные в расчетах по схеме с аппроксимацией Кранка–Николсон, представлены на рис. 10, по бездиссипативной схеме — на рис. 11. Численные эксперименты показали, что сглаживания решения за счет введения искусственной диссипации в случае крутильных волн не требуется.

Таблица 10

Относительные погрешности для схемы с неявной аппроксимацией младших членов (крутильные волны)

K_s \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.12927	0.45187	0.81556	0.98173	0.95374
0.75	0.10712	0.33935	0.66174	0.89290	0.90189
1	0.08698	0.18696	0.28001	0.37036	0.43553

Таблица 11

Относительные погрешности для схемы с аппроксимацией Кранка–Николсон (крутильные волны)

K_s \ $\bar{\omega}$	10	20	30	40	50
0.5	0.10058	0.42198	0.80260	0.97716	0.95002
0.75	0.05841	0.27131	0.60356	0.84952	0.86860
1	0.02108	0.05058	0.07070	0.09783	0.13319

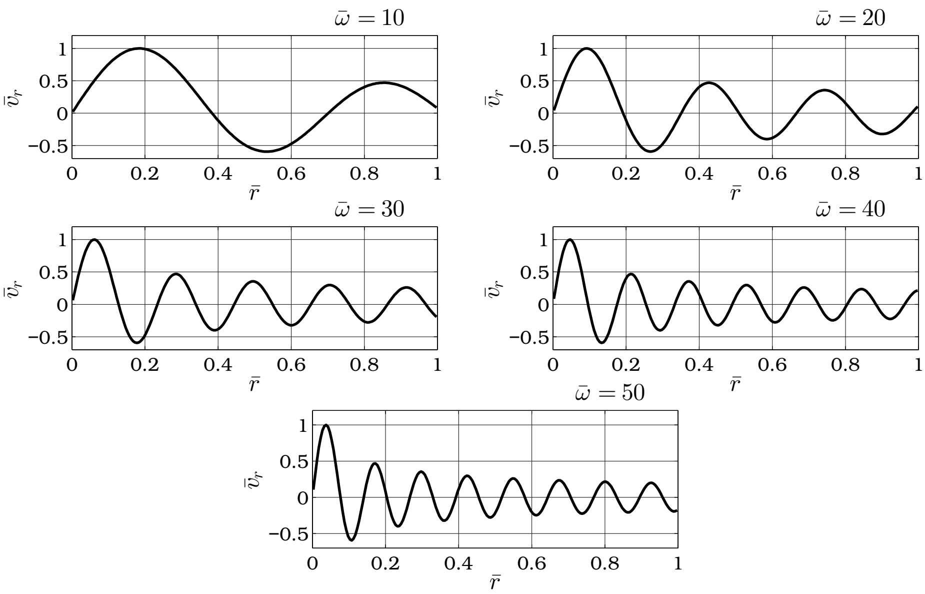

Рис. 9. Эпюры крутильной скорости при разных частотах

6. Заключение. Сравнение результатов расчетов рассматриваемых задач на основе разностной схемы с контролируемой диссипацией энергии с аналогичными результатами, полученными с помощью типичных сеточно-характеристических схем типа "предиктор–корректор", показали, что схема с контролируемой диссипацией обладает неоспоримыми преимуществами по точности перед остальными в случае гладких решений. При расчете разрывных решений сеточно-характеристические схемы более предпочтительны в силу их монотонности. Сглаживания паразитных осцилляций при расчете разрывов по схеме с контролируемой диссипацией энергии можно добиться за счет подбора параметра искусственной диссипации.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1631). Исследование выполнено также при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки в рамках проекта № 2020091506614: "Математическое моделирование и анализ волновых полей, генерируемых импульсным электромагнитным источником сейсмических колебаний в неоднородных грунтовых массивах в условиях северных районов Сибири".

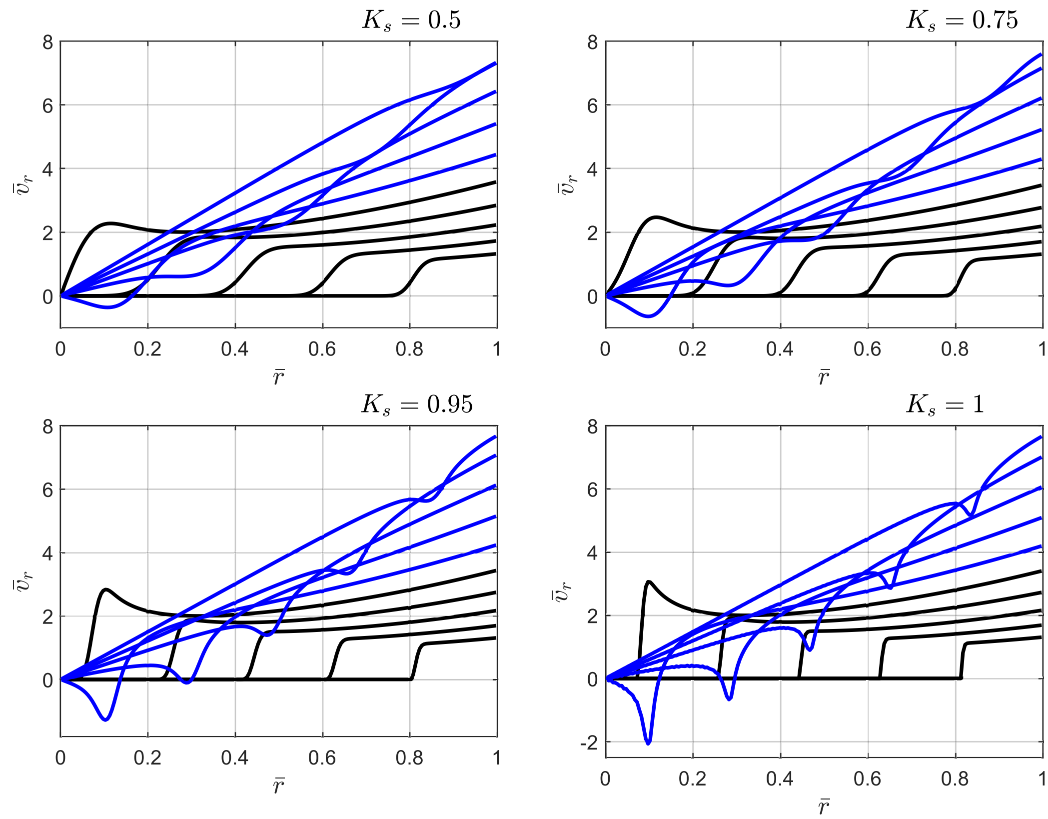

Рис. 10. Профили скорости за фронтом разрыва: схема с аппроксимацией Кранка–Николсон (крутильные волны)

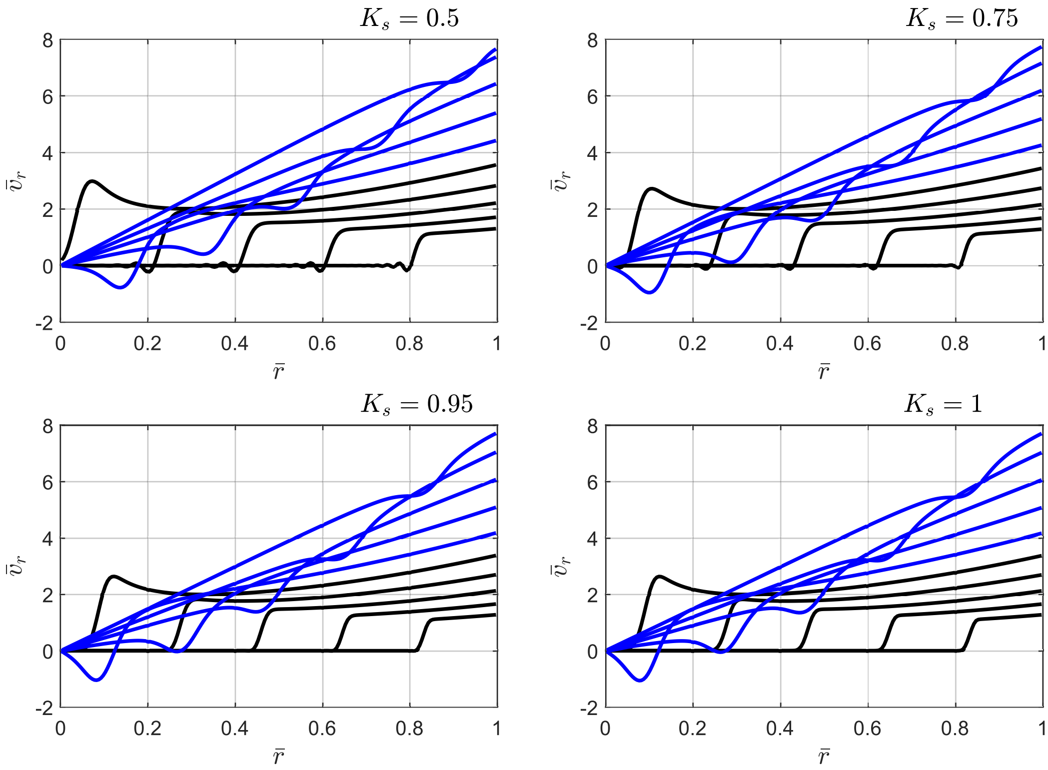

Рис. 11. Профили скорости за фронтом разрыва: бездиссипативная схема (крутильные волны)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Efimov E.A.* Analysis of seismic waves excited in near-surface soils by means of the electromagnetic pulse source “Yenisei” // Materials Physics and Mechanics. 2019. **42**, N 5. 544–557. doi 10.18720/MPM.4252019_8.
2. *Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M.* Supercomputing analysis of seismic efficiency of the electromagnetic pulse source “Yenisei” // AIP Conference Proceedings. 2019. **2164**, Iss. 1. 110011-1–110011-9. doi 10.1063/1.5130856.
3. *Efimov E.A., Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Mathematical modeling of the impact of a pulse seismic source on geological media // AIP Conference Proceedings. 2020. **2302**, Iss. 1. 120002-1–120002-8. doi 10.1063/5.0033576.
4. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
5. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1976.
6. *Садовская О.В., Садовский В.М.* Параллельная реализация алгоритма для расчета упругопластических волн в сыпучей среде // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, вып. 1. 209–216.
7. *Садовская О.В., Садовский В.М.* Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008.
8. *Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M.* Numerical implementation of mathematical model of the dynamics of a porous medium on supercomputers of cluster architecture // AIP Conference Proceedings. 2015. **1684**, Iss. 1. 070005-1–070005-9. doi 10.1063/1.4934306.
9. *Садовский В.М., Садовская О.В.* Анализ деформации пористой среды с учетом схлопывания пор // Прикладная механика и техническая физика. 2016. **57**, № 5. 53–65. doi 10.15372/PMTF20160507.
10. *Варыгина М.П., Похабова М.А., Садовская О.В., Садовский В.М.* Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**, вып. 4. 435–442.
11. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum // Wave Motion. 2015. **52**. 138–150. doi 10.1016/j.wavemoti.2014.09.008.
12. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Lukyanov A.A.* Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers // Journal of Computational Physics. 2017. **345**. 834–855. doi 10.1016/j.jcp.2017.06.001.
13. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Supercomputer Modeling of Wave Propagation in Blocky Media Accounting Fractures of Interlayers // Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. Vol. 122. Cham: Springer, 2020. 379–398 doi 10.1007/978-3-030-38708-2_22.
14. *Сабодаш П.Ф., Чередниченко Р.А.* Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн // Прикладная механика и техническая физика. 1971. **12**, № 4. 101–109.
15. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
16. *Петров И.Б., Холодов А.С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. **24**, № 5. 722–739.
17. *Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С.* Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. **30**, № 8. 1237–1244.
18. *Кукуджанов В.Н.* О численном решении задач распространения упруго-вязко-пластических волн // Распространение упругих и упругопластических волн. Алма-Ата: Наука, 1973. 223–230.
19. *Кукуджанов В.Н.* Разностные методы решения задач механики деформируемых сред: Уч. пособие. М.: МФТИ, 1992.
20. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2008.
21. *Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С.* Континуальная модель и метод расчета динамики неупругой слоистой среды // Математическое моделирование. 2018. **30**, № 11. 59–74.
22. *Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D.* Explicit–implicit schemes for solving the problems of the dynamics of isotropic and anisotropic elastoviscoplastic media // Journal of Physics: Conference Series. 2019. **1158**. 032039-1–032039-8. doi 10.1088/1742-6596/1158/3/032039.
23. *Никитин И.С.* Теория неупругих слоистых и блочных сред. М.: Физматлит, 2019.
24. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Численный метод решения геометрически нелинейных осесимметричных задач для упругопластических оболочек вращения // Строительная механика и расчет сооружений. 1976. № 5. 44–49.
25. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Выпучивание и закритические деформации упруго-пластических оболочек в условиях осевой симметрии // Сборник по численным методам в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР, 1978. 47–66.
26. *Баженов В.Г., Игоничева Е.В.* Нелинейные процессы ударного выпучивания упругих элементов конструкций в виде ортотропных оболочек вращения. Н. Новгород: ННГУ, 1991.

27. *Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т.* Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом: Учеб. пособие. Н. Новгород: ННГУ, 2000.
28. *Баженов В.Г., Котов В.Л.* Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011.
29. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
30. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
31. *Попов Ю.П., Самарский А.А.* Полностью консервативные разностные схемы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. **9**, № 4. 953–958.
32. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
33. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
34. *Иванов Г.В., Кургузов В.Д.* Схемы решения одномерных задач динамики неоднородных упругих тел на основе аппроксимации линейными полиномами // Динамика сплошной среды. № 49. Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 1981. 27–44.
35. *Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д.* Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002.
36. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Efimov E.A.* Finite difference schemes for modelling the propagation of axisymmetric elastic longitudinal waves // Journal of Siberian Federal University: Mathematics & Physics. 2020. **13**, Iss. 5. 644–654. doi 10.17516/1997-1397-2020-13-5-644-654.

Поступила в редакцию
19 января 2021

One-Dimensional Finite Difference Schemes to Implement the Splitting Method for Axisymmetric Equations in the Dynamics of Elastic Medium

V. M. Sadovskii[1], O. V. Sadovskaya[2], and E. A. Efimov[3]

[1] *Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Akademgorodok 50/44, Krasnoyarsk, 660036, Russia; Dr. Sci., Professor, Director, e-mail: sadov@icm.krasn.ru*

[2] *Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Akademgorodok 50/44, Krasnoyarsk, 660036, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru*

[3] *Siberian Federal University, School of Mathematics and Computer Science; Svobodny prospekt 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia; Postgraduate, e-mail: eugene6467@mail.ru*

Received January 19, 2021

Abstract: We construct efficient finite difference shock-capturing schemes for the solution of direct seismic problems in axisymmetric formulation. When parallelizing the algorithms implementing the schemes on multiprocessor computing systems, the two-cyclic splitting method with respect to the spatial variables is used. One-dimensional systems of equations are solved at the stages of splitting on the basis of explicit grid-characteristic schemes and an implicit finite difference scheme of the "predictor–corrector" type with controllable artificial energy dissipation. The verification of algorithms and programs is fulfilled on the exact solutions of one-dimensional problems describing traveling monochromatic waves. The comparison of the results showed the advantages of the scheme with controllable energy dissipation in terms of the accuracy of computing smooth solutions and the advisability of application of explicit monotone schemes when calculating discontinuities.

Keywords: elastic medium, direct seismic problem, cylindrical waves, finite difference scheme, splitting method, monotonicity, dissipativity, parallel computing.

References

1. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and E. A. Efimov, “Analysis of Seismic Waves Excited in Near-Surface Soils by Means of the Electromagnetic Pulse Source ‘Yenisei’,” Mater. Phys. Mech. **42** (5), 544–557 (2019).

2. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, “Supercomputing Analysis of Seismic Efficiency of the Electromagnetic Pulse Source ‘Yenisei’,” in *AIP Conf. Proc.* (American Institute of Physics, College Park, 2019), Vol. 2164, Iss. 1, 110011-1–110011-9.

3. E. A. Efimov, V. M. Sadovskii, and O. V. Sadovskaya, “Mathematical Modeling of the Impact of a Pulse Seismic Source on Geological Media,” in *AIP Conf. Proc.* (American Institute of Physics, College Park, 2020), Vol. 2302, Iss. 1, 120002-1–120002-8.

4. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. Ya. Ivanov, et al., *Numerical Solution of Multidimensional Problems of Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].

5. S. K. Godunov and V. S. Ryabenkii, *Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1976; North-Holland, Amsterdam, 1987).

6. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, “Parallel Implementation of an Algorithm for the Computation of Elasto-Plastic Waves in a Granular Medium,” Vychisl. Metody Programm. **6**, 209–216 (2005).

7. O. Sadovskaya and V. Sadovskii, *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials* (Fizmatlit, Moscow, 2008; Springer, Heidelberg, 2012).

8. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, “Numerical Implementation of Mathematical Model of the Dynamics of a Porous Medium on Supercomputers of Cluster Architecture,” in *AIP Conf. Proc.* (American Institute of Physics, College Park, 2015), Vol. 1684, Iss. 1, 070005-1–070005-9.

9. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Analyzing the Deformation of a Porous Medium with Account for the Collapse of Pores,” Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **57** (5), 53–65 (2016) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **57** (5), 808–818 (2016)].

10. M. P. Varygina, M. A. Pokhabova, O. V. Sadovskaya, and V. M. Sadovskii, “Numerical Algorithms for the Analysis of Elastic Waves in Block Media with Thin Interlayers,” Vychisl. Metody Programm. **12** (4), 435–442 (2011).

11. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Modeling of Elastic Waves in a Blocky Medium Based on Equations of the Cosserat Continuum,” Wave Motion **52**, 138–150 (2015).

12. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and A. A. Lukyanov, “Modeling of Wave Processes in Blocky Media with Porous and Fluid-Saturated Interlayers,” J. Comput. Phys. **345**, 834–855 (2017).

13. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Supercomputer Modeling of Wave Propagation in Blocky Media Accounting Fractures of Interlayers,” in *Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures* (Springer, Cham, 2020), Vol. 122, pp. 379–398.

14. P. F. Sabodash and R. A. Cherednichenko, “Application of the Method of Spatial Characteristics to the Solution of Axially Symmetric Problems Relating to the Propagation of Elastic Waves,” Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **12** (4), 101–109 (1971) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **12** (4), 571–577 (1971)].

15. K. M. Magomedov and A. S. Kholodov, *Grid-Characteristic Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].

16. I. B. Petrov and A. S. Kholodov, “Numerical Study of Some Dynamic Problems of the Mechanics of a Deformable Rigid Body by the Mesh-Characteristic Method,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **24** (5), 722–739 (1984) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **24** (3), 61–73 (1984)].

17. I. B. Petrov, A. G. Tormasov, and A. S. Kholodov, “On the Use of Hybrid Grid-Characteristic Schemes for the Numerical Solution of Three-Dimensional Problems in the Dynamics of a Deformable Solid,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **30** (8), 1237–1244 (1990) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **30** (4), 191–196 (1990)].

18. V. N. Kukudzhanov, “On Numerical Solution of the Problems of Propagation of Elasto-Viscoplastic Waves,” in *Propagation of Elastic and Elastoplastic Waves* (Nauka, Alma-Ata, 1973), pp. 223–230.

19. V. N. Kukudzhanov, *Difference Methods for the Solution of Problems of Mechanics of Deformable Media* (MFTI, Moscow, 1992) [in Russian].

20. V. N. Kukudzhanov, *Numerical Continuum Mechanics* (Fizmatlit, Moscow, 2008; De Gruyter, Berlin, 2013).

21. N. G. Burago, I. S. Nikitin, and A. B. Zhuravlev, “Continuum Model and Method of Calculating for Dynamics of Inelastic Layered Medium,” Mat. Model. **30** (11), 59–74 (2018) [Math. Models Comput. Simul. **11** (13), 488–498 (2019)].

22. I. S. Nikitin, N. G. Burago, and A. D. Nikitin, "Explicit–Implicit Schemes for Solving the problems of the Dynamics of Isotropic and Anisotropic Elastoviscoplastic Media," J. Phys.: Conf. Ser. **1158**, 032039-1–032039-8 (2019).

23. I. S. Nikitin, *Theory of Inelastic Layered and Blocky Media* (Fizmatlit, Moscow, 2019) [in Russian].

24. N. G. Burago and V. N. Kukudzhanov, "A Numerical Method for Solving Axisymmetric Problems for Geometrically Nonlinear Elastic-Plastic Shells of Revolution," Stroit. Mekh. Raschet Sooruzh., N 5, 44–49 (1976).

25. N. G. Burago and V. N. Kukudzhanov, "Buckling and Supercritical Deformations of Elastic-Plastic Shells under Axial Symmetry," in *Collection of Numerical Methods in the Mechanics of Deformable Solids* (Computing Center of the USSR Academy of Sciences, Moscow, 1978), pp. 47–66.

26. V. G. Bazhenov and E. V. Igonicheva, *Nonlinear Processes of Shock Buckling of Elastic Structural Elements in the Form of Orthotropic Shells of Rotation* (Publishing House of UNN, N. Novgorod, 1991) [in Russian].

27. V. G. Bazhenov and D. T. Chekmarev, *Solving Problems of Unsteady Dynamics of Plates and Shells by the Variational-Difference Method* (Publishing House of UNN, N. Novgorod, 2000) [in Russian].

28. V. G. Bazhenov and V. L. Kotov, *Mathematical Modeling of Non-Stationary Processes of Impact and Penetration of Axisymmetric Bodies and Identification of Soil Media Properties* (Fizmatlit, Moscow, 2011) [in Russian].

29. G. I. Marchuk, "Splitting and Alternating Direction Methods," in *Handbook of Numerical Analysis* (Elsevier, North-Holland, 1990), Vol. 1, pp. 197–462.

30. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).

31. Yu. P. Popov and A. A. Samarskii, "Completely Conservative Difference Schemes," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **9** (4), 953–958 (1969) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **9** (4), 296–305 (1969)].

32. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes* (Nauka, Moscow, 1977; CRC Press, New York, 2001).

33. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Janenko, *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1978; American Mathematical Society, Providence, 1983).

34. G. V. Ivanov and V. D. Kurguzov, "Schemes for Solving One-Dimensional Problems of the Dynamics of Inhomogeneous Elastic Bodies on the Basis of Approximation by Linear Polynomials," in *Dynamics of Continuum Medium* (Lavrentyev Inst. of Hydrodynamics, Novosibirsk, 1981), Issue 49, pp. 27–44.

35. G. V. Ivanov, Yu. M. Volchkov, I. O. Bogulskii, et al., *Numerical Solution of Dynamic Elastic-Plastic Problems of Deformable Solids* (Sib. Univ. Izd., Novosibirsk, 2002) [in Russian].

36. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and E. A. Efimov, "Finite Difference Schemes for Modelling the Propagation of Axisymmetric Elastic Longitudinal Waves," J. Sib. Feder. Univ.: Math. Phys. **13** (5), 644–654 (2020).