



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Kopyttsev, V. G. Mikhailov, An estimate of the approximation accuracy in B. A. Sevastyanov's limit theorem and its application in the problem of random inclusions, *Diskr. Mat.*, 2014, Volume 26, Issue 1, 75–84

<https://www.mathnet.ru/eng/dm1268>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

April 25, 2025, 11:45:38



## Оценка точности аппроксимации в предельной теореме Б. А. Севастьянова и ее применение в задаче о случайных включениях

© 2014 г. В. А. Копытцев<sup>1</sup>, В. Г. Михайлов<sup>2</sup>

Получена оценка точности пуассоновской аппроксимации в известной теореме Б. А. Севастьянова об условиях сходимости распределения суммы случайных индикаторов к распределению Пуассона. Этот результат применяется для оценки скорости сходимости к предельному пуассоновскому распределению в одной из теорем для числа решений систем случайных включений.

Ключевые слова: суммы случайных индикаторов, пуассоновская аппроксимация, системы случайных включений над конечным полем.

### 1. Введение

Теорема Б. А. Севастьянова о достаточных условиях сходимости распределения суммы зависимых случайных индикаторов к распределению Пуассона была опубликована им в работе [1] и имеет следующий вид.

Пусть  $W = \xi_1 + \dots + \xi_n$  — сумма зависимых индикаторов, совместное распределение которых зависит от  $n$  как от параметра. Введем обозначения

$$p_{i_1, \dots, i_r} = \mathbf{P}\{\xi_{i_1} = \dots = \xi_{i_r} = 1\}, \quad \lambda_n = \sum_{i=1}^n p_i, \quad p = \max_i p_i.$$

При каждом  $n = 2, 3, \dots$  и каждом  $k = 2, 3, \dots$  рассмотрим множество  $J_k(n) = \{(i_1, \dots, i_r) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  и выделим в нем некоторое подмножество  $I_k(n)$ , называемое исключительным множеством. Введем обозначения

$$A^{(k)} = \sum_{I_k(n)} p_{i_1} \dots p_{i_k}, \quad B^{(k)} = \sum_{I_k(n)} p_{i_1, \dots, i_k},$$

$$D^{(k)} = \max_{(i_1, \dots, i_k) \in J_k(n) \setminus I_k(n)} \left| \frac{p_{i_1, \dots, i_k}}{p_{i_1} \dots p_{i_k}} - 1 \right|.$$

<sup>1</sup>Место работы: Академия криптографии Российской Федерации  
e-mail: kopytcev2012@mail.ru

<sup>2</sup>Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН  
e-mail: mikhail@mi.ras.ru

**Теорема Севастьянова.** Пусть  $n \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$ ,  $p \rightarrow 0$  и  $A^{(k)} + B^{(k)} + D^{(k)} \rightarrow 0$  при всех  $k = 2, 3, \dots$ . Тогда распределение случайной величины  $W$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится к распределению Пуассона с параметром  $\lambda$ .

Эта теорема дает простой рецепт доказательства предельной теоремы Пуассона с помощью метода моментов. С ее помощью удалось описать условия пуассоновской сходимости в целом ряде задач вероятностной комбинаторики, в том числе, для числа  $\mu_r$  ячеек, содержащих по  $r$  частиц каждая, в различных схемах случайных размещений (см., например, [2], [3]), для числа повторений длинных цепочек в последовательности независимых испытаний ([4],[5]), для числа пар эквивалентных цепочек ([6], [7]), для статистик критериев проверки качества псевдослучайных чисел ([8], [9]) и т. д. В работах [10], [11], [12] были предложены обобщенные версии теоремы Севастьянова для совместных распределений сумм случайных индикаторов, также нашедшие свое применение в задачах вероятностной комбинаторики.

С появлением известного метода Чена – Стейна для оценивания точности пуассоновской аппроксимации интерес к теореме Севастьянова значительно ослабел. Оказалось, что в большинстве случаев, когда применимы оба метода, использовать метод Чена – Стейна проще. Кроме того, он позволяет получить явные оценки точности аппроксимации сопровождающим пуассоновским распределением.

Тем не менее, имеется круг задач, в котором метод Чена – Стейна пока применить успешно не удалось. Это задачи о числе таких решений систем случайных линейных или полиномиальных уравнений над конечным полем, которые удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям. Такие задачи впервые были систематически рассмотрены в работах [13] и [14]. Немного позже эта тематика расширилась за счет систем случайных включений ([15] – [18]). Все основные результаты этих работ доказаны с помощью обычной и обобщенной версий теоремы Севастьянова.

В настоящей работе мы выводим оценку точности пуассоновской аппроксимации в теореме Севастьянова (раздел 2) и применяем ее при оценке скорости сходимости к предельному пуассоновскому распределению в одной из теорем для числа решений систем случайных полиномиальных включений (раздел 3).

Заметим, что попытка построения оценки точности пуассоновской аппроксимации в теореме Севастьянова уже предпринималась ранее в работе [19], но она осталась не до конца реализованной.

## 2. Оценка точности в предельной теореме Севастьянова

Пусть  $F_W$  и  $F_Y$  – функции распределения случайных величин  $W$  и  $Y$ ,  $Po_\lambda$  – функция распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ , а

$$d(F_W, F_Y) = \sup_x |F_W(x) - F_Y(x)|.$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия теоремы Севастьянова. Тогда при любом натуральном числе  $K$ ,  $13\lambda_n + 1 \leq K < \lambda_n p^{-1}$ , и достаточно большом  $n$

$$d(F_W, Po_\lambda) \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_n - \lambda| + p + 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} + \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}. \quad (1)$$

Доказательство. Мы используем подход, описанный в параграфе 3 работы [19], лемму 3 из работы [20] и свойства распределений, описанные в теореме 1.С и замечании 1.1.4 книги [21].

Начнем с построения оценки расстояния между распределением случайной величины  $W$  и сопровождающим пуассоновским распределением с параметром  $\lambda_n$ . Рассмотрим случайную величину  $V = \zeta_1 + \dots + \zeta_n$ , где  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  — независимые случайные индикаторы и  $\mathbf{P}\{\zeta_i = 1\} = p_i, i = 1, \dots, n$ .

Из определений следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}C_W^k &= \sum_{J_k(n)} p_{i_1, \dots, i_k} = B^{(k)} + \sum_{J_k(n) \setminus I_k(n)} p_{i_1, \dots, i_k}, \\ \mathbf{E}C_V^k &= \sum_{J_k(n)} p_{i_1} \dots p_{i_k} = A^{(k)} + \sum_{J_k(n) \setminus I_k(n)} p_{i_1} \dots p_{i_k}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{E}C_W^k - \mathbf{E}C_V^k = B^{(k)} - A^{(k)} + \sum_{J_k(n) \setminus I_k(n)} (p_{i_1, \dots, i_k} - p_{i_1} \dots p_{i_k}).$$

Из определения величины  $D^{(k)}$  и этого равенства следует, что

$$|\mathbf{E}C_W^k - \mathbf{E}C_V^k| \leq |A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)} \lambda_n^k. \quad (2)$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{E}C_V^k = \frac{1}{k!} \left( \lambda_n^k - \sum_{\{|i_1, \dots, i_k\}| < k} p_{i_1} \dots p_{i_k} \right) \geq \frac{\lambda_n^k}{k!} \left( 1 - \frac{kp}{\lambda_n} \right). \quad (3)$$

При условии  $\lambda_n > kp$  из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\left| \frac{\mathbf{E}C_W^k}{\mathbf{E}C_V^k} - 1 \right| \leq \frac{k!}{\lambda_n^k} \cdot \frac{|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)} \lambda_n^k}{1 - kp \lambda_n^{-1}}. \quad (4)$$

Согласно лемме 3 работы Зубкова [20] (см. также [19])

$$d(F_W, F_V) \leq \frac{\varepsilon(1 + [H\lambda_n])e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} + 2e^{-(H+1)\lambda_n/4}, \quad (5)$$

где  $H \geq 13$ ,

$$\varepsilon(T) = \max_{1 \leq k \leq T} \left| \frac{\mathbf{E}C_W^k}{\mathbf{E}C_V^k} - 1 \right|. \quad (6)$$

Из формул (4) – (6) следует неравенство

$$\begin{aligned} d(F_W, F_V) &\leq 2e^{-(H+1)\lambda_n/4} + \\ &+ \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq 1 + [H\lambda_n]} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)} \lambda_n^k)}{\lambda_n^k (1 - kp \lambda_n^{-1})}, \end{aligned}$$

где  $13 \leq H < p^{-1} - \lambda_n^{-1}$ . Нам удобно задать натуральное число  $K$  и взять  $H = (K - 1)\lambda_n^{-1}$ . Тогда эта оценка запишется в следующем виде:

$$d(F_W, F_V) \leq 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} + \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}, \quad (7)$$

где

$$13\lambda_n + 1 \leq K < \lambda_n p^{-1}. \quad (8)$$

Используем обозначение  $\rho(F, G)$  для расстояния по вариации между распределениями, определяемыми функциями  $F$  и  $G$ . Согласно оценке метода Чена – Стейна (см. формулу (1.1.23) в [21])

$$\rho(F_V, \text{Po}_{\lambda_n}) \leq \frac{1 - e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Так как  $d(F, G) \leq \rho(F, G)$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i^2 \leq \lambda_n p$ , то из этой оценки следует неравенство

$$d(F_V, \text{Po}_{\lambda_n}) \leq p. \quad (9)$$

Из (7), (9) и неравенства треугольника получаем оценку расстояния до сопровождающего пуассоновского распределения (при условии (8)):

$$d(F_W, \text{Po}_{\lambda_n}) \leq p + 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} + \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}. \quad (10)$$

Воспользуемся теперь теоремой 1.С и замечанием 1.1.4 книги [21], из которых следует, что

$$d(\text{Po}_{\lambda_n}, \text{Po}_{\lambda}) \leq \rho(\text{Po}_{\lambda_n}, \text{Po}_{\lambda}) \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_n - \lambda|. \quad (11)$$

Из (10) и (11) (при условии (8)) получаем (1). Теорема 1 доказана.

### 3. Оценка скорости сходимости в предельной теореме для числа решений системы случайных включений

Пусть  $\xi(D, A + S, B)$  — число решений системы включений

$$x \in D, \quad Ax + S(x) \in B, \quad (12)$$

где  $A$  — случайная матрица из элементов поля  $K = GF(q)$  размера  $T \times n$ ,  $D \subseteq V^n$  и  $B \subset V^T$  — некоторые множества  $n$ -мерных и  $T$ -мерных векторов над этим полем,  $S(x)$  — произвольное отображение  $V^n$  в  $V^T$ .

Исследованию условий сходимости при  $n, T \rightarrow \infty$  распределения случайной величины  $\xi(D, A + S, B)$  к распределениям пуассоновского типа были посвящены работы [15-18]. Как и в них, будем предполагать, что элементы случайной матрицы  $A = (a_{t,j})$  независимы в совокупности и

$$\mathbf{P}\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{2}, \quad k \in K,$$

где  $K = GF(q)$ ,  $\sum_{k \in K} \Delta_{i,j}(k) = 0$ ,  $i = 1, \dots, T$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Пусть

$$\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)| < 1. \quad (13)$$

Обозначим через  $N(k_1, k_2, k_3, c, D)$  число решений уравнения

$$k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3 = c$$

относительно тройки векторов  $(u^1, u^2, u^3) \in D^3$ , где  $k_1, k_2, k_3 \in K \setminus \{0\}$ ,  $c \in V^n$ . Пусть

$$N(D) = \max_{k_1, k_2, k_3, c} N(k_1, k_2, k_3, c, D),$$

$$\rho(D) = N(D)/|D|^2. \quad (14)$$

Аналогично определим величину  $\rho(B)$ .

В [18] была доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $K = GF(q)$ , множество  $D$  не содержит подобных векторов, отображение  $S(x)$  не зависит от матрицы  $A$ , распределение элементов матрицы  $A$  удовлетворяет условию (13),  $0^n \notin D$ , и при  $n, T \rightarrow \infty$  выполнены соотношения

$$|D| \rightarrow \infty, \quad T\Delta \rightarrow 0, \quad \rho(D)\rho(B) \rightarrow 0, \quad q^{-T}|D||B| \rightarrow \lambda \in (0, \infty). \quad (15)$$

Тогда  $F_{\xi(D, A+S, B)} \rightarrow \text{Po}_\lambda$ , причем эта сходимость равномерна относительно отображения  $S(x)$ .

Наша цель — оценить скорость сходимости в этой теореме.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при любом  $0 < \delta < 1$  имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \sup_x |F_{\xi(D, A+S, B)}(x) - \text{Po}_\lambda(x)| = \\ & = O(|\mathbf{E}\xi(D, A + S, B) - \lambda| + \left(\frac{1}{|D|}\right)^{(1-\delta)/(4 \ln q+1)} + \\ & + (\rho(D)\rho(B))^{(1-\delta)/(1+4 \ln \max\{1, \lambda_*^{-1}\})} + \exp\left\{\frac{(1-\delta) \ln(\Delta T)}{4 \ln |\ln(\Delta T)|}\right\}). \end{aligned} \quad (16)$$

Если  $\Delta = 0$ , то последнее слагаемое в правой части оценки (16) отсутствует.

Перейдем к доказательству теоремы 3, используя для этого теорему 1. Вместо  $\lambda_n$  используем обозначение  $\lambda_{n,T}$ . Согласно нашим определениям

$$\lambda_{n,T} = \sum_{x \in D, b \in B} \mathbf{P}\{Ax = b\}, \quad p = \max_{x \in D, b \in B} \mathbf{P}\{Ax = b\}, \quad (17)$$

$$A^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \prod_{i=1}^k \mathbf{P} \{Ax^i = b^i\}, \quad (18)$$

$$B^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P} \{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}, \quad (19)$$

$$D^{(k)} = \max_{(v^1, \dots, v^k) \in \bar{J}_k \setminus I_k} \left| \frac{\mathbf{P} \{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}}{\mathbf{P} \{Ax^1 = b^1\} \cdot \dots \cdot \mathbf{P} \{Ax^k = b^k\}} - 1 \right|. \quad (20)$$

Кроме этого, положим  $\lambda_* = |D||B|q^{-T}$ .

Согласно лемме 1 из [18]

$$\left( \frac{1 - \Delta}{q} \right)^T \leq p \leq \left( \frac{1 + \Delta}{q} \right)^T, \quad \lambda_* (1 - \Delta)^T \leq \lambda_{n,T} \leq \lambda_* (1 + \Delta)^T.$$

Поэтому в предположениях теоремы 3

$$p = q^{-T}(1 + o(1)), \quad \lambda_{n,T} = \lambda_*(1 + o(1)). \quad (21)$$

Выражение в правой части (18) оценим с помощью оценки (2.13) из [18]. Применительно к теореме 3, когда  $\bar{J} = J = D \times B$  и  $C(n) = 1$ , равенство (18) и оценка (2.13) из [18] дают следующее:

$$\begin{aligned} \frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} A^{(k)} &\leq \left( \frac{\lambda_*(1 + \Delta)^T}{\lambda_{n,T}} \right)^k \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j q^{j(k-j)} |D|^{j-k} < \\ &< L_A^k \left( \left( 1 + \frac{q^k}{|D|} \right)^k - 1 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

при некотором  $0 < L_A < \infty$ , причем  $L_A = 1 + o(1)$ .

Аналогичным образом с помощью соответствующей оценки из [18] для суммы совместных вероятностей в (19) получаем неравенство

$$\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} B^{(k)} \leq \frac{\rho(D)\rho(B)}{\lambda_{n,T}^k} \sum_{j=2}^{k-1} (1 + \Delta)^{jT} \lambda_*^j,$$

что в условиях теоремы 3 [18] влечет при достаточно больших  $n$  и  $T$  соотношение

$$\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} B^{(k)} \leq kL_B^k \rho(D)\rho(B), \quad (23)$$

где  $L_B = \max\{1, \lambda_*^{-1}\}(1 + o(1))$ .

Наконец, используя лемму 1 работы [18], из (20) получаем в условиях теоремы 3 соотношения

$$k!D^{(k)} \leq k! \left( \frac{(1 + \Delta)^{kT}}{(1 - \Delta)^{kT}} - 1 \right) = 2k!k\Delta T(1 + o(1)). \quad (24)$$

Ради упрощения вида оценок наложим на выбор параметра  $K$  в (1) дополнительное ограничение

$$K < \frac{\lambda_n}{2p}. \quad (25)$$

Тогда

$$1 - kp\lambda_n^{-1} \geq \frac{1}{2} \quad (26)$$

при всех  $k \leq K$ .

Теперь, заменив в (1)  $\lambda_n$  на  $\lambda_{n,T}$ , а  $|A^{(k)} - B^{(k)}|$  на  $A^{(k)} + B^{(k)}$  и подставив в полученное более грубое неравенство оценки (21) – (24) и (26), получим:

$$\begin{aligned} d(F_{\xi(D,A+S,B)}, \text{Po}\lambda) &\leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + p + 2e^{-(K-1+\lambda_{n,T})/4} + \\ &+ \frac{e^{2\lambda_{n,T}}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_{n,T} - 1\}}} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{k!(A^{(k)} + B^{(k)} + D^{(k)}\lambda_{n,T}^k)}{\lambda_{n,T}^k(1 - kp\lambda_{n,T}^{-1})} < \\ &< \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + 2q^{-T} + 2e^{-(K-1+\lambda_{n,T})/4} + \\ &+ 2e^{2\lambda_{n,T}} \max_{1 \leq k \leq K} \left( \frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} (A^{(k)} + B^{(k)}) + k!D^{(k)} \right) < \\ &< \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + 2q^{-T} + \\ &+ 2e^{2\lambda_{n,T}} (M_1(K_1) + M_2(K_2) + M_3(K_3)), \end{aligned} \quad (27)$$

при достаточно больших  $n, T$ , где

$$M_1(K_1) = \max_{1 \leq k \leq K_1} \frac{k!A^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4}, \quad (28)$$

$$M_2(K_2) = \max_{1 \leq k \leq K_2} \frac{k!B^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} + e^{-(K_2-1+\lambda_{n,T})/4}, \quad (29)$$

$$M_3(K_3) = \max_{1 \leq k \leq K_3} k!D^{(k)} + e^{-(K_3-1+\lambda_{n,T})/4}, \quad (30)$$

а  $K = \min\{K_1, K_2, K_3\}$ . Здесь (см. (2.8) и (3.14))

$$13\lambda_{n,T} + 1 \leq K_i < \frac{\lambda_{n,T}}{2p}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (31)$$

В случае  $\Delta = 0$  полагаем  $M_3(H_3) = 0$ .

Подставим в (28) оценку (22) и загрубим результат. Считая, что отношение  $K_1q^{K_1}/|D|$  достаточно мало, получим:

$$\begin{aligned} M_1(K_1) &< L_A^{K_1} \left( \left( 1 + \frac{q^{K_1}}{|D|} \right)^{K_1} - 1 \right) + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4} < \\ &< \frac{2K_1L_A^{K_1}}{|D|} q^{K_1} + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4}. \end{aligned} \quad (32)$$

Возьмем

$$K_1 = \left[ \frac{\ln |D|}{\ln(L_A q)} \frac{4 \ln q}{4 \ln q + 1} \right],$$



и получим, что первое слагаемое в правой части (32) имеет порядок

$$O\left(\frac{\ln|D|}{|D|^{1/(4\ln q+1)}}\right) = O\left(\ln|D| \exp\left\{-\frac{\ln|D|}{4\ln q+1}\right\}\right),$$

а второе слагаемое имеет порядок

$$O\left(\exp\left\{-\frac{\ln|D|}{\ln(L_A q)} \frac{\ln q}{4\ln q+1}\right\}\right) = O\left(\exp\left\{-\frac{\ln|D|}{4\ln q+1} \frac{\ln q}{\ln(L_A q)}\right\}\right).$$

С учетом соотношения  $L_A = 1 + o(1)$  из этих оценок получаем, что при любом  $0 < \delta < 1$

$$M_1(K_1) = O\left(\left(\frac{1}{|D|}\right)^{(1-\delta)/(4\ln q+1)}\right). \quad (33)$$

Оценим  $M_2(K_2)$ . Возьмем

$$K_2 = \left[-\frac{4\ln(\rho(D)\rho(B))}{1+4\ln L_B}\right].$$

Тогда в силу (23)

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq K_2} \frac{k! B^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} &\leq K_2 L_B^{K_2} \rho(D) \rho(B) = \\ &= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))| \exp\left\{-\frac{4\ln L_B \ln(\rho(D)\rho(B))}{1+4\ln L_B}\right\} \rho(D)\rho(B)\right) = \\ &= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))| \exp\left\{\frac{\ln(\rho(D)\rho(B))}{1+4\ln L_B}\right\}\right) = \\ &= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))| (\rho(D)\rho(B))^{1/(1+4\ln L_B)}\right). \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$e^{-(K_2-1+\lambda_{n,T})/4} = O\left(e^{-K_2/4}\right) = O\left((\rho(D)\rho(B))^{1/(1+4\ln L_B)}\right).$$

Поэтому с учетом соотношения  $L_B = \max\{1, \lambda_*^{-1}\}(1 + o(1))$  получаем оценку

$$M_2(K_2) = O\left((\rho(D)\rho(B))^{(1-\delta)/(1+4\ln \max\{1, \lambda_*^{-1}\})}\right) \quad (34)$$

при любом  $0 < \delta < 1$ .

Наконец, возьмем произвольное  $0 < \delta < 1$  и положим

$$K_3 = \left[(\delta - 1) \frac{\ln(\Delta T)}{\ln|\ln(\Delta T)|}\right] = O(\ln(\Delta T)).$$

Получим

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq K_3} k! D^{(k)} &= O(|\ln(\Delta T)| \exp\{K_3(\ln K_3 - 1) + O(\ln K_3)\} \Delta T) = \\ &= O(\exp\{K_3 \ln K_3\} \cdot \Delta T) = O(\exp\{\delta \ln(\Delta T)\}). \end{aligned}$$

Кроме этого,

$$e^{-(K_3-1+\lambda_{n,T})/4} = O\left(e^{-K_3/4}\right) = O\left(\exp\left\{\frac{(1-\delta)\ln(\Delta T)}{4\ln|\ln(\Delta T)|}\right\}\right).$$

Значит,

$$M_3(K_3) = O\left(\exp\left\{\frac{(1-\delta)\ln(\Delta T)}{4\ln|\ln(\Delta T)|}\right\}\right). \quad (35)$$

Заметим, что при переходе к пределу значения  $H_1, H_2, H_3$  стремятся к бесконечности. Поэтому условие  $H = \min\{H_1, H_2, H_3\} \geq 13$ , начиная с некоторого момента, выполнено.

Оценим остальные слагаемые в правой части неравенства (35).

Заметим, что  $\lambda_{n,T} = \mathbf{E}\xi(D, A + S, B)$ , а в силу условия  $q^{-T}|D||B| \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$  имеем

$$q^{-T} = O\left(\frac{1}{|D|}\right).$$

Из этих соотношений, (33) – (35) и (27) следует оценка (16). Теорема 3 доказана.

Авторы признательны А. М. Зубкову за полезные замечания.

## Список литературы

1. Севастьянов Б.А., Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. *Теория вероятн. и ее применен.* (1972) **17**, №4, 733–738.
2. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., *Случайные размещения.* Наука, Москва, 1976.
3. Михайлов В.Г., Предельная теорема Пуассона в схеме размещения частиц комплектами. *Теория вероятн. и ее примен.* (1977) **22**, №1, 155–159.
4. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятн. и ее примен.* (1974) **19**, №1, 173–181.
5. Михайлов В.Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятн. и ее примен.* (1974) **19**, №1, 182–187.
6. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний. *Дискретная математика* (1999) **11**, №2, 53–75.
7. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок, образующих латинский прямоугольник. *Дискретная математика* (2000) **12**, №1, 21–46.
8. Клыкова Н.В., Предельное распределение числа совпадающих промежутков. *Теория вероятн. и ее примен.* (2002) **47**, №1, 147–152.
9. Круглов В.И., Предельные распределения числа наборов, удовлетворяющих линейному соотношению. *Дискретная математика* (2008) **20**, №4, 120–135.
10. Михайлов В. Г., *Некоторые предельные теоремы для сумм зависимых случайных величин*, Дисс. на соиск. уч. ст-ни канд. физ.-матем. наук, Москва, МИАН, 1974.
11. Михайлов В.Г., О предельной теореме Б.А.Севастьянова для сумм зависимых случайных индикаторов. *Обозр. прикл. и промышл. матем.* (2003) **10**, №3, 571–578.
12. Гаас В.В., Пуассоновские предельные совместные распределения в схеме случайного размещения частиц двух типов. *Теория вероятн. и ее примен.* (2007) **52**, №2, 351–358.

13. Копытцев В.А., О числе решений систем линейных булевых уравнений в множестве векторов, обладающих заданным числом единиц. *Дискретная математика* (2002) **14**, №4, 87–109.
14. Копытцев В.А., О числе решений системы случайных линейных уравнений. *Дискретная математика* (2006) **18**, №1, 40–62.
15. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. *Дискретная математика* (2010) **22**, №2, 3–21.
16. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Теоремы пуассоновского типа для числа решений случайных включений. *Математические вопросы криптографии* (2010) **1**, №4, 63–84.
17. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., О распределении чисел решений случайных включений. *Математические вопросы криптографии* (2011) **2**, №2, 55–80.
18. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Предельные теоремы пуассоновского типа для обобщенного линейного включения. *Дискретная математика* (2012) **24**, №3, 108–121.
19. Михайлов В.Г., Явные оценки в предельных теоремах для сумм индикаторов. *Обозр. прикл. и промышл. матем.* (1994) **1**, №4, 580–617.
20. Зубков А.М., Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения. *Матем. сб.* (1979) **109(151)**, №4(8), 491–532.
21. Barbour A.D., Holst L., Janson S., Poisson Approximation (1992).

Статья поступила 01.10.2013.