

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. V. Drobotukhina, An analogue of the Jones polynomial for links in $\mathbb{R}P^3$ and a generalization of the Kauffman–Murasugi theorem,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 3, 171–191

<https://www.mathnet.ru/eng/aa191>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

May 15, 2025, 11:49:37



© 1990 г.

Ю. В. Дроботухина

АНАЛОГ МНОГОЧЛЕНА ДЖОУНСА
ДЛЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ В $\mathbb{R}P^3$
И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАУФФМАНА-МУРАСУГИ

В статье определяются аналоги многочлена Джоунса для зацеплений в проективном пространстве $\mathbb{R}P^3$. Доказываются соответствующие обобщения теоремы Кауффмана-Мурасуги о связи комбинаторных свойств диаграммы зацепления со свойствами его многочлена Джоунса. Обсуждаются критерии изотопности зацепления в пространстве $\mathbb{R}P^3$ зацеплению, лежащему в его аффинной части.

§ 1. Введение

Открытый Джоунсом в 1985 г. полиномиальный инвариант зацеплений в трехмерной сфере оказался тесно связанным с комбинаторными свойствами диаграмм зацеплений. В частности, с его помощью Л. Кауффман [1] и К. Мурасуги [2] доказали две старые гипотезы Тейта о диаграммах альтернированных зацеплений. Представляет интерес вопрос о перенесении многочлена Джоунса на случай зацеплений в трехмерных многообразиях, отличных от сферы. В настоящей работе изучаются зацепления в трехмерном вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^3$. Ниже перечислены основные результаты.

1.1. **Диаграммы.** Зацепления в $\mathbb{R}P^3$ можно задавать диаграммами, которые отличаются от обычных диаграмм зацеплений в \mathbb{R}^3 тем, что размещаются не на плоскости, а в круге, причем концы дуг, выходящих на границу этого круга, разбиваются на пары диаметрально противоположных точек. В п. 2.4 вводятся пять преобразований диаграмм, обобщающих преобразования Райдемайстера диаграмм обычных зацеплений и обладающих тем свойством, что два зацепления в $\mathbb{R}P^3$ изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы можно соединить последовательностью таких преобразований.

1.2. **Многочлены.** На основе подхода Кауффмана [1] скобочный многочлен оснащенного зацепления и многочлен Джоунса ориентированного зацепления обобщаются со случая зацеплений в \mathbb{R}^3 на случай зацеплений в $\mathbb{R}P^3$. (Здесь слово "обобщаются" имеет тот смысл, что для зацепления, лежащего в $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}P^3$, новые многочлены совпадают со старыми). Многочлен Джоунса ориентированного зацепления L в $\mathbb{R}P^3$ обозначается через V_L .

1.3. Оценки числа двойных точек диаграммы. Назовем *сетью* образ в $\mathbb{R}P^3$ нескольких окружностей при погружении общего положения, т.е. такого погружения, при котором прообраз каждой точки состоит не более чем из двух точек и все двойные точки являются точками трансверсального пересечения. Каждой диаграмме отвечает сеть в проективной плоскости, полученной из круга диаграммы отождествлением диаметрально противоположных точек границы круга. Пусть D - диаграмма зацепления L . Обозначим через $c(D)$ число двойных точек диаграммы D , через $r(D)$ - число компонент связности соответствующей сети. Для многочлена Лорана V от одной переменной через $\text{span } V$ обозначим разность между максимальным и минимальным показателями степеней одночленов, входящих в V .

Т е о р е м а 1. Пусть D - диаграмма зацепления L в $\mathbb{R}P^3$. Тогда

$$4(c(D) + r(D) - 1) \geq \text{span } V_L.$$

Эта теорема обобщает неравенство Кауффмана-Мурасуги, см., например, [3], теорема 1, (i). Для диаграмм специального вида неравенство можно усилить.

Сеть называется *разбивающей*, если она служит общей границей двух подмножеств своего дополнения в $\mathbb{R}P^2$. Сеть называется *стягиваемой*, если ее включение в $\mathbb{R}P^2$ гомотопно постоянному отображению. Ясно, что сеть стягиваема тогда и только тогда, когда в ее дополнении существует односторонне вложенная в $\mathbb{R}P^2$ окружность. Очевидно, что всякая стягиваемая сеть является разбивающей. Сеть, отвечающая диаграмме зацепления, разбивает $\mathbb{R}P^2$ тогда и только тогда, когда зацепление гомологично нулю в $\mathbb{R}P^3$. Если сеть, отвечающая диаграмме, стягиваема, то, очевидно, и зацепление стягиваемо в $\mathbb{R}P^3$ и, более того, изотопно зацеплению, лежащему в аффинной части пространства $\mathbb{R}P^3$ (т.е. не пересекающемуся с некоторой проективной плоскостью). Обратное неверно.

Т е о р е м а 2. Для диаграмм с разбивающей нестягиваемой сетью

$$4(c(D) + r(D)) - 6 \geq \text{span } V_L.$$

Т е о р е м а 3. Для диаграмм с неразбивающей сетью, в которой найдутся $2p$ односторонне вложенных окружностей без общих ребер (но, разумеется, с общими вершинами),

$$4(c(D) + r(D) - 1 - p) \geq \text{span } V_L.$$

Заметим, что число $\text{span } V_L$ всегда четно (см. п.3.2).

1.4. Эстремальные свойства оценок. Напомним, что диаграмма зацепления в \mathbb{R}^3 называется *альтернированной*, если при ее обходе проходы и переходы чередуются. Диаграмма зацепления в $\mathbb{R}P^3$ называется *альтернированной*, если при ее обходе проходы и переходы чередуются тогда и только тогда, когда дуга между соседними двойными точками не пересекает границу круга диаграммы или пересекает ее в $4k$ точках, $k=1,2,3,\dots$ Как доказывается ниже в п.4.1, сеть альтернированной диаграммы является разбивающей.

Диаграмма с разбивающей сетью называется *слабо альтернированной*, если она

является связной суммой (в смысле, разъясненном в п. 3.3) нескольких альтернированных диаграмм. Диаграмма с неразбивающей сетью называется *слабо альтернированной*, если она является связной суммой диаграмм, которые все, кроме одной, альтернированы, а в единственной неальтернированной диаграмме условие альтернированности нарушается ровно на одном ребре.

Диаграмма называется *редуцированной*, если в $\mathbb{R}P^2$ не существует двусторонне вложенной окружности, которая пересекала бы сеть этой диаграммы ровно в двух точках поблизости от двойной точки, - как на рис. 1.

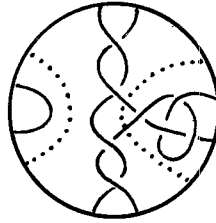


Рис. 1.

Следующие теоремы 4 и 5 выражают экстремальные свойства неравенства теоремы 1. Теорема 4 обобщает теорему Кауффмана-Мурасуги, см. [3], теорема 1, (ii).

Т е о р е м а 4. В случае диаграммы с разбивающей сетью $4(c(D) + r(D) - 1) = \text{span } V_L$ тогда и только тогда, когда D - слабо альтернированная редуцированная диаграмма со стягиваемой сетью.

Т е о р е м а 5. В случае диаграммы с неразбивающей сетью $4(c(D) + r(D) - 1) = \text{span } V_L$ тогда и только тогда, когда D - слабо альтернированная редуцированная диаграмма.

Экстремальное свойство неравенства теоремы 2 выражается теоремой 6.

Т е о р е м а 6. В случае диаграммы с разбивающей сетью $4(c(D) + r(D) - 6) = \text{span } V_L$ тогда и только тогда, когда D - слабо альтернированная редуцированная диаграмма с нестягиваемой сетью.

С л е д с т в и е т е о р е м. Две слабо альтернированные редуцированные диаграммы изотопных зацеплений в $\mathbb{R}P^3$ имеют одинаковое число двойных точек. Это число является минимальным числом двойных точек для всех диаграмм зацеплений этого изотопического типа. Любая диаграмма зацепления того же изотопического типа с этим числом двойных точек является слабо альтернированной и редуцированной.

Это следствие нетрудно вывести, впрочем, и из теоремы Кауффмана-Мурасуги (ср., например, [3], с.207) посредством перехода к диаграммам прообразов зацеплений при накрытии $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$.

Теорема Кауффмана-Мурасуги, обобщением которой является теорема 4, была обобщена Ликоришем и Тислугзйттом [4] в случае зацеплений в S^3 на более широкий класс диаграмм - класс так называемых адекватных диаграмм. Аналогичное обобщение дается ниже в п. 6.6 для зацеплений в $\mathbb{R}P^3$.

1.5. Аффинность зацеплений. Зацепление в $\mathbb{R}P^3$ называется *аффинным*, если оно

изотопию зацеплению, содержащемуся в аффинной части пространства $\mathbb{R}P^3$. В § 7 доказаны следующие две теоремы, которые доставляют критерий аффинности в терминах многочлена Джоунса.

Т е о р е м а 7. Пусть L - зацепление в $\mathbb{R}P^3$ с k компонентами. Если среди степеней одночленов, входящих в V_L , встречаются числа, не сравнимые с $2(k-1) \bmod 4$, то зацепление неаффинно.

Т е о р е м а 8. Зацепление L , представленное альтернированной диаграммой, аффинно тогда и только тогда, когда $\text{span } V_L \equiv 0 \bmod 4$.

С л е д с т в и е. Зацепление, представленное альтернированной диаграммой, аффинно тогда и только тогда, когда сеть, отвечающая этой диаграмме, стягиваема в $\mathbb{R}P^2$.

В § 7 обсуждаются также более элементарные необходимые условия аффинности узлов в $\mathbb{R}P^3$ (в терминах коэффициента самозацепления такого узла).

1.6. Распределение материала. В § 2 определяются диаграммы зацеплений в $\mathbb{R}P^3$. § 3 посвящен конструкции многочлена оснащенного зацепления и многочлена Джоунса ориентированного зацепления. В § 4 обсуждаются свойства альтернированных диаграмм. В § 5 собраны леммы, которые служат основой доказательства теорем 1-6. Эти теоремы доказываются в § 6. В § 7 рассматривается проблема аффинности зацеплений.

§ 2. Зацепления в $\mathbb{R}P^3$ и их диаграммы

2.1. Зацепления в $\mathbb{R}P^3$ и их изотопии. Зацеплением в $\mathbb{R}P^3$ называется одномерное замкнутое гладкое подмногообразие $L \subset \mathbb{R}P^3$. Изотопией зацепления L называется гладкая гомотопия $H: L \times I \rightarrow \mathbb{R}P^3$, состоящая из гладких вложений $h_t: L \rightarrow \mathbb{R}P^3$ с $h_t(x) = H(x, t)$, $t \in [0, 1]$, и с $h_0 = \text{in}: L \hookrightarrow \mathbb{R}P^3$. Два зацепления L_1, L_2 изотопны, если существует изотопия h_t ($t \in [0, 1]$) зацепления L_1 с $h_1(L_1) = L_2$.

2.2. Диаграммы зацеплений. Как и в случае зацеплений в сфере S^3 , зацепление в $\mathbb{R}P^3$ можно задавать плоскими картинками - диаграммами. Для построения диаграммы зацепления воспользуемся стандартной моделью пространства $\mathbb{R}P^3$ - его представлением в виде шара с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной сферы. Соответствующее отображение $D^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ выберем так, чтобы образ полюсов шара не принадлежал зацеплению L . Прообраз зацепления L в шаре обозначим через L' . Пусть $p: L' \rightarrow D^2$ - проекция на экваториальный диск $D^2 \subset D^3$, которая задается формулой $x \rightarrow c(x) \cap D$, где $c(x)$ - (метрическая) окружность в D^3 , проходящая через точку $x \in L'$ и полюса шара D^3 .

Будем считать, что зацепление L удовлетворяет следующим условиям общего положения: образ $p(L')$ не содержит 1) точек возврата, 2) точек касания, 3) тройных точек; 4) L' является подмногообразием шара D^3 , трансверсально выходящим на границу ∂D^3 ; 5) никакая пара точек в L' не лежит на дуге большой окружности, соединяющей полюса шара в ∂D^3 .

Сколь угодно малой изотопией любого зацепления можно добиться, чтобы оно

удовлетворяло условиям 1)-5).

Ориентируем согласовано дуги окружностей, вдоль которых проектируется подногообразия L' (например, в направлении от северного полюса к южному). Эта ориентация определяет порядок на каждой паре точек - прообразе двойной точки при проекции p . Первую (верхнюю) точку назовем точкой *перехода*, вторую (нижнюю) - точкой *прохода*. Выберем у каждой точки прохода достаточно малую связную окрестность в L' . Объединение таких окрестностей по всем точкам прохода обозначим через U . *Диаграммой зацепления L* называется образ $p(L' \cup U) \subset D^2$.

2.3. *Связь с диаграммами зацеплений в сфере S^3* . С диаграммой зацепления L в проективном пространстве RP^3 связана диаграмма его прообраза L'' в сфере S^3 при накрытии $S^3 \rightarrow RP^3$. Эта диаграмма получается при проекции зацепления L'' из полюсов сферы S^3 (которые являются прообразами при накрытии $S^3 \rightarrow RP^3$ образов полюсов шара D^3 при факторизации $D^3 \rightarrow RP^3$) на экваториальную сферу S^2 . Такую диаграмму можно построить следующим образом. Поместим на плоскости диаграмму D исходного зацепления L , рядом поместим ее образ при скользящей симметрии относительно прямой, проходящей через центр круга диаграммы D ; в этом образе заменим все проходы на переходы (и наоборот) и соединим простой дугой каждый лежащий на граничной окружности конец дуги диаграммы D с точкой, полученной из этого конца в результате последовательного применения симметрии относительно центра круга диаграммы D и скользящей симметрии. Соединяющие дуги выберем попарно не пересекающимися - см. рис. 2.

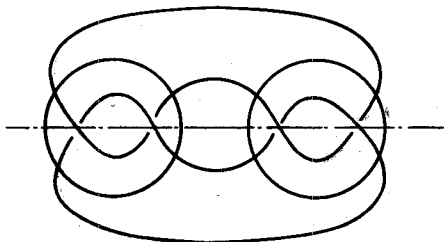


Рис. 2.

2.4. *Преобразования диаграмм*. В процессе изотопии зацепления условия общего положения 1)-5) могут нарушаться. При этом изотопию можно подправить так, чтобы в каждый момент времени $t \in (0, 1)$ нарушалось не более одного условия и это нарушение происходило бы простейшим образом, указанным на рис. 3. Соответствующие преобразования диаграммы обозначим символами $\Omega_1 - \Omega_5$. Преобразования $\Omega_1 - \Omega_3$ совпадают

с обычными преобразованиями Райдемайстера.

Таким образом, зацепления в $\mathbb{R}P^3$ изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы можно соединить последовательностью преобразования $\Omega_1 - \Omega_5$ и изотопией диаграмм.

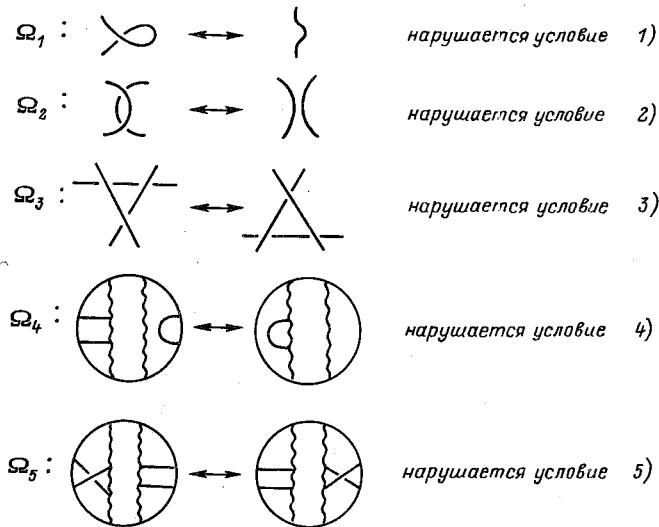


Рис. 3.

2. 5. Диаграммы и оснащения зацепления. Как и в случае зацеплений в сфере S^3 , имеются конструкции, строящие по диаграмме зацепления в $\mathbb{R}P^3$ оснащение (с точностью до изотопии) этого зацепления. Напомним, что диаграмме зацепления в S^3 ставится в соответствие его «вертикальное» оснащение, все векторы которого направлены вертикально вниз (или все вертикально вверх). Для зацеплений в $\mathbb{R}P^3$ это правило непригодно, поскольку при склеивании пространства $\mathbb{R}P^3$ из шара векторы, касательные к меридианам граничной сферы и направленные от северного полюса к южному, отождествляются с векторами, направленными от южного полюса к северному. Однако это правило дает оснащение зацепления в $\mathbb{R}P^3$ нормальными прямыми. Легко видеть, что для каждой стягиваемой в $\mathbb{R}P^3$ компоненты зацепления это оснащение прямыми порождается некоторым оснащением векторами, определенным однозначно с точностью до изотопии. В случае нестягиваемой компоненты для получения из этого оснащения прямыми оснащения, порождаемого векторным оснащением, необходимо изменить оснащение прямыми на пол-оборота. Условимся, для определенности, произвести изменение так, чтобы оснащение сделало дополнительные пол-оборота по левому винту.

При всех преобразованиях диаграмм, кроме Ω_1 , оснащение, определяемое описанным выше образом по диаграмме, остается неизменным. При преобразовании Ω_1 оснащение меняется на один полный оборот (точно так же, как и в случае зацеплений в сфере). Поэтому, задавшись любым зацеплением в $\mathbb{R}P^3$, его диаграммой и оснащением,

мы можем посредством нескольких преобразований Ω_1 добиться, чтобы это оснащение отвечало диаграмме. Как и для зацепления в S^3 , нетрудно показать, что если оснащенные зацепления с оснащениями, построенными по диаграммам, изотопны (как оснащенные зацепления), то эти диаграммы получаются друг из друга при помощи преобразований Ω_2 - Ω_5 .

§ 3. Многочлены кауффмановского типа для зацеплений в RP^3

3.1. Состояния диаграммы и многочлен оснащенного зацепления.

Состоянием диаграммы называется выбор в каждой двойной точке пары вертикальных углов. Этот выбор в каждой точке можно произвести двумя способами - см. рис. 4. Выбранные области обычно указывают соединяющим их отрезком - маркером. Маркеры бывают двух типов: типа A и типа B, см. рис. 4.

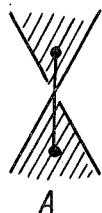


Рис. 4.

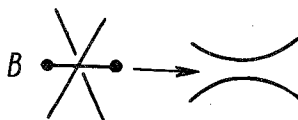
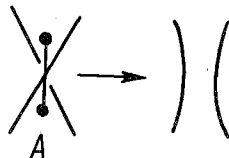


Рис. 5.

Пусть s - состояние диаграммы D . Обозначим через $a(s)$ и $b(s)$ число маркеров типа A и типа B соответственно. Произведем в каждой двойной точке сглаживание в соответствии с ее маркером - см. рис. 5. Диаграмма при этом превратится в несколько непересекающихся окружностей и дуг, а ее образ в проективной плоскости (которая получается из круга отождествлением диаметрально противоположных точек его границы) превратится в несколько непересекающихся окружностей. Число этих окружностей обозначим через $|s|$. Определим многочлен от трех переменных A, B, d :

$$v(D) := \sum_s A^{a(s)} B^{b(s)} d^{|s|-1},$$

где суммирование производится по всевозможным состояниям s диаграммы D . Нетрудно проверить, что

1) $v(\circ) = 1$;

2) $v(D \parallel \circ) = dv(D)$, где $D \parallel \circ$ - диаграмма, получающаяся из диаграммы D добавлением незаузленной окружности \circ , не пересекающей D ;

3) $v(D) = Av(D_A) + Bv(D_B)$, где D_A, D_B - диаграммы, полученные из диаграммы D сглаживанием в одной двойной точке в соответствии с маркером типа A и с маркером

типа B .

Как и в случае зацеплений в сфере S^3 , требование инвариантности многочлена $v(D)$ относительно преобразования Ω_2 налагает на переменные A, B, d ограничения: $B=A^{-1}$, $d=-A^{-2}-A^2$ (см. [1]). Требование инвариантности многочлена $v(D)$ относительно преобразований $\Omega_3-\Omega_5$ к новым соотношениям не приводит. Для Ω_4 это очевидно, для Ω_3 - см. [1]. Для доказательства инвариантности относительно Ω_5 воспользуемся „выкладкой”, показанной на рис. 6.

$$\begin{aligned}
 v \left(\text{Diagram 1} \right) &= Av \left(\text{Diagram 2} \right) + Bv \left(\text{Diagram 3} \right) = \\
 &= Av \left(\text{Diagram 4} \right) + Bv \left(\text{Diagram 5} \right), \\
 v \left(\text{Diagram 6} \right) &= Av \left(\text{Diagram 7} \right) + Bv \left(\text{Diagram 8} \right) = \\
 &= Av \left(\text{Diagram 9} \right) + Bv \left(\text{Diagram 10} \right)
 \end{aligned}$$

Рис. 6.

Из инвариантности многочлена $v(D)$ относительно преобразования $\Omega_2-\Omega_5$ следует, в силу сказанного в п. 2. 5, что конструкция многочлена v дает инвариант оснащенных зацеплений.

3. 2. Многочлен V ориентированных зацеплений. Пусть L - ориентированное зацепление в $\mathbb{R}P^3$, D - его диаграмма. Ориентация зацепления L определяет ориентацию диаграммы D и позволяет определить число $w(D)=\sum_1 \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1=1$ или -1 в зависимости от типа двойной точки - см. рис. 7, - а суммирование производится по всем двойным точкам. Очевидно, что $w(D)$ инвариантно относительно преобразований $\Omega_2-\Omega_5$.

Определим для ориентированного зацепления L в $\mathbb{R}P^3$ многочлен

$$V_L(A) := (-A)^{-3w(D)} v(D) = (-A)^{-3w(D)} \sum_s A^{a(s)-b(s)} (-A^{-2}-A^2)^{|s|-1},$$

где D - некоторая диаграмма зацепления L . Повторяя рассуждения Кауффмана [1],

легко показать, что многочлен $V_L(A)$ инвариантен относительно преобразования Ω_1 и что $w(D)$ и $v(D)$ инвариантны относительно преобразований $\Omega_2-\Omega_5$. Следовательно, многочлен $V_L(A)$ не зависит от выбора диаграммы D и инвариантен относительно изотопии зацепления L .

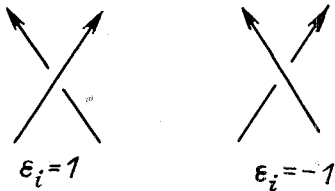


Рис. 7.



Рис. 8.

Построенный многочлен $V_L(A)$ обобщает многочлен Джоунса (в форме Кауффмана) для зацеплений в \mathbb{R}^3 : для зацеплений в $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}P^3$ эти многочлены совпадают.

Заметим, что показатели степеней мономов, входящих в многочлен V , четны. В самом деле, пусть c - число двойных точек диаграммы D зацепления L . Тогда $a(s)-b(s) \equiv c \pmod{2}$, $w(D) \equiv c \pmod{2}$ и, следовательно, $-3w(D)+a(s)-b(s) \equiv 0 \pmod{2}$.

3.3. Поведение многочлена V_L при суммировании зацеплений. Аналогами операций связного и несвязного суммирования зацепления в S^3 являются операции связного и несвязного суммирования зацепления в $\mathbb{R}P^3$ и зацепления в S^3 . Эти операции определяются очевидным образом. Для их обозначения употребляются, как обычно, значки # и \cup .

Пусть V_L - многочлен зацепления L в $\mathbb{R}P^3$, V_K - многочлен Джоунса (в форме Кауффмана) зацепления K в S^3 . Многочлены $V_{L \cup K}$, $V_{L \# K}$ выражаются через V_L и V_K следующим образом:

$$V_{L \cup K} = (-A^{-2}-A^2)V_L V_K,$$

$$V_{L \# K} = V_L V_K.$$

Чтобы доказать первое равенство, достаточно заметить, что каждое состояние s диаграммы зацепления $L \cup K$ очевидным образом определяет состояния s_L и s_K диаграмм зацеплений L и K . В свою очередь s_L и s_K определяют s , причем $|s| = |s_L| + |s_K|$. Аналогично для доказательства второго равенства заметим, что каждому состоянию s диаграммы зацепления $L \# K$ отвечает пара s_L, s_K , составленная из состояний диаграмм зацеплений L и K , но уже с $|s| = |s_L| + |s_K| - 1$.

§ 4. Альтернированные диаграммы и сети

4.1. Альтернированные диаграммы. Если диаграмма зацепления альтернирована, то зацепление имеет четное число нестягиваемых компонент.

Доказательство. Рассмотрим зацепление с нечетным числом нестягиваемых компонент. Участок α сети диаграммы, соответствующий нестягиваемой компоненте такого зацепления, проходит через двойные точки четное число раз.

Действительно, через каждую свою точку самопересечения участок α проходит дважды, с проекцией каждой стягиваемой компоненты он пересекается четное число раз, а с проекцией каждой нестягиваемой компоненты - нечетное, но количество таких компонент четно. Кроме того, α нечетное число раз пересекает проективную прямую. Следовательно, при обходе вдоль α условие альтернированности должно нарушиться.

Из доказанного утверждения следует, что сеть альтернированной диаграммы является разбивающей.

Любую диаграмму зацепления с четным числом нестягиваемых компонент, заменяя некоторые проходы на переходы, и наоборот, можно сделать альтернированной. В самом деле, проекция такого зацепления в $\mathbb{R}P^2$ разбивает $\mathbb{R}P^2$ на две части с общей границей. Окрасим каждую часть в свой цвет. Точки прохода и перехода расставим так, чтобы все маркеры, соединяющие области одного цвета, были маркерами типа А. Полученная диаграмма будет альтернированной. Это рассуждение показывает, что существует ровно два способа превращения связной проекции зацепления с четным числом нестягиваемых компонент в альтернированную диаграмму.

Заметим, что если диаграмма зацепления в $\mathbb{R}P^3$ альтернирована, то соответствующая диаграмма прообраза этого зацепления при накрытии $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ (см. п. 2.3) тоже будет альтернированной (уже в обычном смысле).

Ясно, что число w для этой диаграммы прообраза зацепления равно удвоенному числу w для исходной диаграммы. Согласно гипотезе Литла, доказанной Мурасуги [2] и Тислтуэйтом [5], число w ориентированной слабо альтернированной редуцированной диаграммы зацепления в S^3 является изотопическим инвариантом этого зацепления. Следовательно, то же самое верно и для числа w ориентированной слабо альтернированной редуцированной диаграммы зацепления в $\mathbb{R}P^3$.

4.2. Сети. *Состоянием* сети назовем выбор в каждой вершине сети пары вертикальных углов, примыкающих к этой вершине. Как и в случае состояний диаграмм, состояние сети описывается совокупностью маркеров - отрезков, соединяющих выделенные вертикальные углы.

Если сеть является разбивающей, то, окрасив каждое из подмножеств ее дополнения в $\mathbb{R}P^2$ в свой цвет, получим шахматную раскраску плоскости $\mathbb{R}P^2$. Состояние разбивающей сети назовем *альтернированным*, если все его маркеры лежат в областях одного цвета.

Легко видеть, что состояние сети является альтернированным тогда и только тогда, когда для любого ребра сети маркеры, стоящие на концах этого ребра, выходят в одну область, примыкающую к нему, - см. рис. 8.

Каждому состоянию диаграммы зацепления соответствует состояние сети этой диаграммы. Назовем *A-состоянием* состояние диаграммы, в котором в каждой двойной точке выбран маркер типа А. Очевидно, что диаграмма альтернирована тогда и только тогда, когда альтернировано ее *A-состояние*.

§ 5. Подготовка к доказательству теорем

5.1. Поверхность Тураева (см. [3], § 2). Каждому состоянию s диаграммы поставим в соответствие поверхность M_s , которая строится так. К малым прямоугольным окрестностям вершин сети приклеиваются ленточки, отвечающие ее ребрам: если маркеры, стоящие на концах ребра, выходят в одну примыкающую к нему область, то присоединяется регулярная окрестность этого ребра в RP^2 , см. рис. 9, а; в противном случае приклеивается полоска, полученная из регулярной окрестности перекручиванием на пол-оборота, см. рис. 9, б.

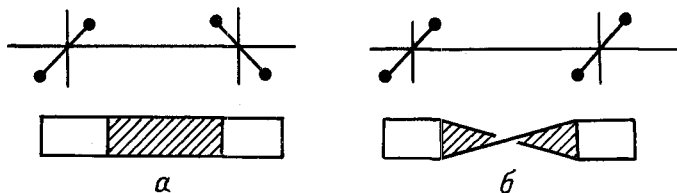


Рис. 9.

Из определения видно, что в случае альтернированного состояния s поверхность M_s вложена в RP^2 .

5.2. Леммы о циклах на поверхности M_s

5.2.1. Л е м м а. В случае разбивающей сети индекс самопересечения (mod 2) любого цикла на поверхности M_s равен индексу самопересечения (в RP^2) проекции этого цикла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольный цикл на M_s и сдвинем его по M_s таким образом, чтобы точки пересечения двух циклов (исходного и сдвинутого) лежали вне ленточек поверхности. При проекции этих двух циклов на RP^2 у них появляются новые точки пересечения: их столько, сколько на M_s перекрученных ленточек, через которые проходит исходный цикл (с учетом кратности прохождения). Но таких ленточек четное число.

Действительно, маркеры состояния s разбиваются шахматной раскраской плоскости RP^2 на два класса: маркеры, лежащие в областях одного цвета, и маркеры, лежащие в областях другого цвета. Перекрученные ленточки - это в точности те, которыми соединяются маркеры разных цветов. При движении вдоль цикла общее число переходов от маркеров одного цвета к маркерам другого четно, это и доказывает лемму.

С л е д с т в и е. В случае разбивающей сети поверхность M_s ориентируема тогда и только тогда, когда сеть стягиваема.

5.2.2. Л е м м а. В случае неразбивающей сети индекс самопересечения любого цикла на поверхности M_s равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольный цикл z на M_s . Как и в доказательстве леммы 5.2.1, индекс самопересечения проекции \tilde{z} цикла z на RP^2 равен сумме индекса самопересечения $z \circ z$ и числа $N(\text{mod } 2)$ перекрученных ленточек на поверхности M_s вдоль цикла z :

$$\tilde{z} \circ_{\mathbb{R}P^2} \tilde{z} = z \circ_{M_s} z + N.$$

Образум новую сеть, добавив к старой произвольную односторонне вложенную окружность α , которая пересекает сеть в точках на ребрах, причем каждое ребро она пересекает трансверсально и не более одного раза. Новая сеть является разбивающей; рассмотрим отвечающую ей шахматную раскраску плоскости $\mathbb{R}P^2$. Маркеры состояния разбиваются шахматной раскраской на два класса: маркеры, лежащие в областях одного цвета, и маркеры, лежащие в областях другого цвета. Ленточка на M_s перекручена либо когда маркеры на концах соответствующего ей ребра лежат в областях разного цвета и это ребро не пересекается с окружностью α , либо когда маркеры на концах ребра лежат в областях одного цвета и это ребро пересекается с α .

Таким образом, число N перекрученных ленточек поверхности вдоль цикла z равно числу перемен цвета маркеров вдоль тех ребер цикла z , которые не пересекаются с α , плюс число тех ребер, которые пересекаются с α и имеют на своих концах маркеры одинакового цвета. Добавив к этой сумме удвоенное число ребер, которые пересекаются с α и имеют на своих концах маркеры разных цветов, увидим, что число $N \pmod{2}$ равно числу перемен цвета маркеров вдоль $z (=0 \pmod{2}$, как в лемме 5.2.1) плюс число точек пересечения проекции \tilde{z} с окружностью α , т.е. равно индексу пересечения $\tilde{z} \circ_{\mathbb{R}P^2} \alpha$.

Итак, $N = \tilde{z} \circ_{\mathbb{R}P^2} \alpha$. С другой стороны, $\tilde{z} \circ_{\mathbb{R}P^2} \alpha = \tilde{z} \circ_{\mathbb{R}P^2} \tilde{z}$. Поэтому $\tilde{z} \circ_{\mathbb{R}P^2} \tilde{z} = z \circ_{M_s} z + \tilde{z} \circ_{\mathbb{R}P^2} \tilde{z}$.

Отсюда и следует требуемое утверждение: $z \circ_{M_s} z = 0$.

С л е д с т в и е. В случае неразбивающей сети поверхность M_s ориентируема.

5.3. Леммы о двойственных состояниях. Каждому состоянию s сети отвечает двойственное состояние $\overset{v}{s}$, которое получается из s одновременным изменением всех маркеров.

Обозначим через c число двойных точек сети, через r - число компонент сети, через $Q(F)$ - квадратичную форму индексов самопересечения в гомологиях поверхности F с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 .

5.3.1. Л е м м а. $|s| + |\overset{v}{s}| = 2r + c - rk Q(M_s)$; в частности, $|s| + |\overset{v}{s}| \leq 2r + c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гомологическая последовательность пары $(M_s, \partial M_s)$

$$\dots \rightarrow H_1(M_s; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\text{rel}} H_1(M_s, \partial M_s; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H_0(\partial M_s; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\text{in}} H_0(M_s; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

дает соотношение

$$b_0(\partial M_s) = b_0(M_s) + b_1(M_s, \partial M_s) - \text{rk rel}.$$

Очевидно, что край ∂M_s представляет собой дизъюнктивное объединение сети, сглаженной в соответствии с состоянием s , и сети, сглаженной в соответствии с состоянием $\overset{v}{s}$. Поэтому $b_0(\partial M_s) = |s| + |\overset{v}{s}|$.

Ясно, что

$$b_0(M_s) = r, \quad b_1(M_s, \partial M_s) = b_1(M_s) = b_0(M_s) - \chi(M_s) = r + c, \quad \text{rk rel} = \text{rk } Q(M_s).$$

Значит,

$$|s|+|s|^{\vee} = r+r+c-rk Q(M_s) = 2r+c-rk Q(M_s).$$

5.3.2. Л е м м а. Для неразбивающей сети, в которой существуют $2p$ односторонне вложенных окружностей без общих ребер,

$$|s|+|s|^{\vee} \leq 2r+c-2p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $rk Q(M_s) \geq 2p$, и воспользуемся леммой 5.3.1.

Индекс самопересечения каждого из $2p$ циклов на поверхности M_s равен нулю (в силу леммы 5.2.2). По условию, любые два из этих циклов пересекаются только в вершинах сети, поэтому их индекс пересечения в M_s равен индексу пересечения их проекций в RP^2 , т.е. единице. Таким образом, значение формы $Q(M_s)$ на наших циклах задается $2p \times 2p$ -матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен $2p$. Отсюда и следует требуемое утверждение.

Сеть называется простой, если для любой вложенной в RP^2 окружности, пересекающей сеть (трансверсально) ровно в двух точках и разбивающей RP^2 на диск и лист Мебиуса, либо диск, либо лист Мебиуса пересекают сеть по простой дуге.

5.3.3. Л е м м а. В случае простой связной разбивающей сети $|s|+|s|^{\vee} = c+2$ тогда и только тогда, когда сеть стягиваема и состояние s альтернировано.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что сеть нестягиваема. Выберем в сети цикл z , представленный односторонне вложенной окружностью. По лемме 5.2.1 $z \circ z = z \circ z = 1$. Следовательно, $rk Q(M_s) \geq 1$, и в силу леммы 5.3.1 $|s|+|s|^{\vee} \leq 2+c-1 = c+1$. Таким образом, $|s|+|s|^{\vee} \neq c+2$.

Предположим теперь, что сеть стягиваема и состояние s не альтернировано. Обозначим через e одно из тех ребер, на которых альтернированность нарушается. К ребру e примыкают две различные (так как сеть разбивающая) компоненты дополнения; замыкания этих компонент пересекаются только по ребру e (ввиду простоты сети). Поэтому на поверхности M_s найдутся два цикла, индекс пересечения которых равен 1, см. рис. 10. Значит, $rk Q(M_s) \geq 1$ и $|s|+|s|^{\vee} \neq c+2$.

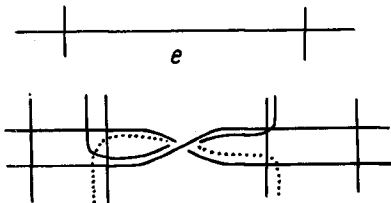


Рис. 10.

Докажем обратное. Пусть сеть стягиваема и состояние s альтернировано. В этом случае поверхность M_s вкладывается в аффинную плоскость и форма индексов пересечения на M_s тривиальна. В силу леммы 5.3.1, $|s|+|s|^{\vee} = c+2$.

5.3.4. Л е м м а. Если в диаграмме с неразбивающей сетью альтернированность

нарушается ровно на одном ребре, то к этому ребру примыкает с обеих сторон одна и та же компонента дополнения сети.

Доказательство. Рассмотрим в сети произвольную односторонне вложенную окружность α . Покажем, что на одном из ребер, составляющих α , альтернированность нарушается. Сеть является циклом по модулю 2 и, будучи неразбивающей, реализует нетривиальный класс в $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$. Если из сети удалить цикл α , негомологичный нулю, то оставшаяся часть будет гомологична нулю. Поэтому число точек трансверсального пересечения оставшейся части и цикла α четно. Кроме того, могут быть точки нетрансверсального пересечения, см. рис. 11, а. Если бы вдоль цикла α альтернированность не нарушалась, то при обходе вдоль α маркеры на концах каждого ребра выходили бы в одну область, примыкающую к этому ребру, - левую или правую (по отношению к направлению обхода вдоль α) - см. рис. 11, б. При переходе через двойную точку трансверсального пересечения те области, в которых лежат маркеры, чередуются. (От правой области переходим к левой, и наоборот). Так как точек трансверсального пересечения, как было показано, четное число, то при полном обходе вдоль α число переходов от левой или правой области к правой или левой будет четно. С другой стороны, окрестность в $\mathbb{R}P^2$ односторонней окружности α является лента Мебиуса, поэтому число таких переходов должно быть нечетно. Полученное противоречие показывает, что на одном из ребер, составляющих α , альтернированность нарушается.

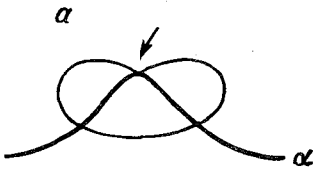


Рис. 11, а.

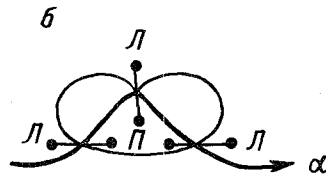


Рис. 11, б.

Итак, произвольная односторонне вложенная окружность в сети содержит ребро, на котором альтернированность нарушается. Поэтому, так как состояние альтернировано всюду, кроме единственного ребра, все односторонне вложенные окружности в сети проходят через это ребро. Значит, после удаления этого ребра сеть превращается в стягиваемое множество, и, следовательно, можно найти односторонне вложенную окружность в $\mathbb{R}P^2$, не пересекающую это множество. Очевидно, что найденная окружность пересекает исходную сеть только в точке нашего ребра. Следовательно, к ребру примыкает одна и та же компонента дополнения.

5.3.5. Л е м м а. В случае простой связной неразбивающей сети $|s| + |s|^\vee = c + 2$ тогда и только тогда, когда состояние s альтернировано всюду, кроме единственного ребра.

Доказательство. Если состояние s альтернировано всюду, кроме одного ребра, то поверхность M_g вложена в кольцо. В самом деле, в силу леммы 5.3.4, существует односторонне вложенная окружность α , пересекающая сеть только в

точке ребра, на котором альтернированность нарушается, см. рис. 12. Поэтому часть поверхности M_s , соответствующая альтернированной части сети, вложена в дополнение некоторой окрестности окружности α , т.е. в круг; а вся M_s вложена в поверхность M , которая получается из этого круга присоединением ленточки. Поверхность M ориентируема, так как ориентируема поверхность M_s (см. следствие леммы 5.2.2) и гомоморфизм включения $H_1(M_s; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ сюръективен. Следовательно, M - кольцо, и $\text{rk } Q(M) = 0$. Значит, $\text{rk } Q(M_s) = 0$, в силу леммы 5.3.1, $|s| + |s^v| = c+2$.

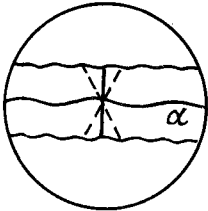


Рис. 12.

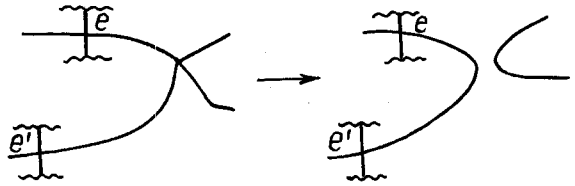


Рис. 13.

Для доказательства обратного предположим, что альтернированность нарушается по меньшей мере на двух ребрах e и e' . Допустим, что компоненты дополнения сети, примыкающие хотя бы к одному из ребер, различны. Тогда, как и в доказательстве леммы 5.3.3, на поверхности M_s можно найти два цикла с индексом пересечения 1. В этом случае $\text{rk } Q(M_s) \geq 2$ и $|s| + |s^v| \neq c+2$.

Если к каждому из двух ребер примыкает по одной компоненте дополнения, то эти компоненты совпадают. Действительно, проведенные в каждой из компонент односторонне вложенные окружности, пересекающие соответствующие ребра, должны иметь хотя бы одну общую точку. В этом случае существует двусторонне вложенная окружность, пересекающая сеть ровно в двух точках на разных ребрах. Такая окружность получается при возмущении объединения двух односторонне вложенных окружностей, о которых шла речь, см. рис. 13. А это противоречит предположению о простоте сети.

5.3.6. Л е м м а . В случае нестягиваемой простой связной разбивающей сети $|s| + |s^v| = c+1$ тогда и только тогда, когда состояние s альтернировано.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если состояние s альтернировано, то поверхность M_s вложена в $\mathbb{R}P^2$, и так как на $\mathbb{R}P^2$ форма индексов пересечения имеет ранг 1, то $\text{rk } Q(M_s) \leq 1$. Следовательно, по лемме 5.3.1, $c+2 \geq |s| + |s^v| \geq c+1$. По лемме 5.3.2, $|s| + |s^v| \neq c+2$, значит $|s| + |s^v| = c+1$.

Для доказательства обратного предположим, что состояние s не альтернировано. Пусть e - одно из ребер, на котором альтернированность нарушается. К ребру e примыкают две различные компоненты дополнения. Ввиду простоты сети их замыкания пересекаются либо только по ребру e , либо по двум ребрам e и e' так, что объединение компонент содержит нестягиваемую петлю, пересекающую сеть только в этих ребрах. В каждом из этих случаев рассмотрим на поверхности M_s два цикла c_1 и

c_2 . См. рис. 14. В первом случае $c_{1_{M_s}} \circ c_2 = 1$, $c_{1_{M_s}} \circ c_1 = \tilde{c}_1 \circ \tilde{c}_1 = 0$ (см. лемму 5.2.1), где \tilde{c}_1 - проекция цикла c_1 на $\mathbb{R}P^2$, $i=1,2$. Поэтому $\text{rk } Q(M_s) \geq 2$. В силу леммы 5.3.1, $|s| + |s| \leq 2 + c - 2 + c + 1$.

Во втором случае $c_{1_{M_s}} \circ c_2 = 0$, $c_{1_{M_s}} \circ c_1 = \tilde{c}_1 \circ \tilde{c}_1 = 1$, $i=1,2$. Поэтому $\text{rk } Q(M_s) \geq 2$ и $|s| + |s| \neq c + 1$.

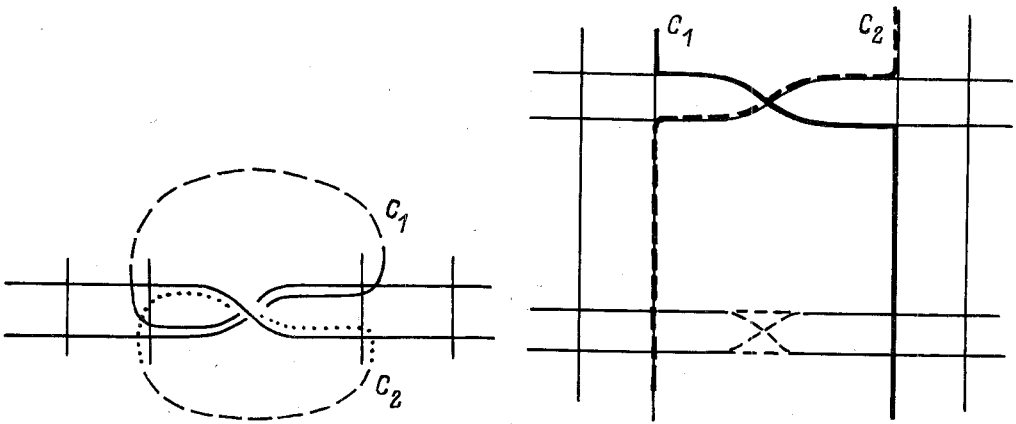


Рис. 14.

§ 6. Доказательство теорем

6.1. Доказательство теоремы 1 повторяет по существу доказательство аналогичного результата для случая зацеплений в сфере, см. [3], § 4. Каждому состоянию s диаграммы D соответствует многочлен $A^{a(s)-b(s)}(-A^{-2}-A^2)^{|s|-1}$. Обозначим максимальный показатель степени входящих в него одночленов через D_s , минимальный - через d_s . Ясно, что $D_s = a(s)-b(s)+2|s|-2$, а $d_s = a(s)-b(s)-2|s|+2$. Для A -состояния и B -состояния, которые будем обозначать символами s_A и s_B , максимальный и минимальный показатели соответственно равны

$$D_{s_A} = c + 2|s_A| - 2, \quad d_{s_A} = -c - 2|s_B| + 2.$$

Нетрудно показать, что для любого состояния s выполняются неравенства

$$D_s \leq D_{s_A}, \quad d_s \geq d_{s_B}.$$

Поэтому

$$\deg_{\max} V_L \leq -3w(D) + D_{s_A}, \quad \deg_{\min} V_L \geq -3w(D) + d_{s_B},$$

где $\deg_{\max} V_L$ и $\deg_{\min} V_L$ - максимальная и минимальная степени одночленов, входящих в V_L . Значит,

$$\text{span } V_L \leq D_{s_A} - d_{s_B} = 2c(D) + 2(|s_A| + |s_B|) - 4. \quad (*)$$

Используя лемму 5.3.1 (согласно которой $|s_A| + |s_B| \leq 2r(D) + c(D)$), получаем, что

$$\text{span } V_L \leq 2c(D) + 4r(D) + 2c(D) - 4 = 4(c(D) + r(D) - 1).$$

6.2. Доказательство теоремы 3. По лемме 5.3.2, $|s_A| + |s_B| \leq 2r + c - 2p$. Используя неравенство (*), получаем

$$\text{span } V_L \leq 4(c(D) + r(D) - 1 - p).$$

6.3. Доказательство теоремы 4. Если зацепление L представляет собой несвязную сумму r зацеплений L_i (одно из L_i - зацепление в $\mathbb{R}P^3$, остальные - зацепления в S^3), то $\text{span } V_L = 4r - 4 + \sum_{i=1}^r \text{span } V_{L_i}$. Это следует из свойства многочлена V_L :

$$V_L = V_{\bigsqcup_{i=1}^r L_i} = (-A^{-2} - A^2)^{r-1} \prod_{i=1}^r V_{L_i}.$$

Пусть D_1, \dots, D_r ($r=r(D)$) - диаграммы зацеплений L_1, \dots, L_r . Тогда по теореме 1

$$4c(D) = 4 \sum_{i=1}^r c(D_i) \geq \sum_{i=1}^r \text{span } V_{L_i} = \text{span } V_L - 4r + 4.$$

Равенство $4(c(D)+r(D)-1) = \text{span } V_L$ возможно в том и только том случае, когда $4c(D_i) = \text{span } V_{L_i}$ для каждого i . Для зацеплений в S^3 последнее равенство равносильно слабой альтернированности и редуцированности диаграммы, см. [3]. Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы для зацеплений в $\mathbb{R}P^3$, диаграммы которых имеют связную сеть. Кроме того, ввиду аддитивности чисел $c(D)$ и $\text{span } V_L$ относительно связного суммирования, можно считать сеть диаграммы простой. Итак, осталось доказать, что в случае диаграммы D с простой связной разбивающей сетью $4c(D) = \text{span } V_L$ тогда и только тогда, когда D - альтернированная редуцированная диаграмма со стягиваемой сетью.

Пусть $4c(D) = \text{span } V_L$. Тогда из неравенства (*) (которое обращается в данном случае в равенство) получаем, что $|s_A| + |s_B| = c(D) + 2$. По лемме 5.3.3, сеть диаграммы стягиваема и A -состояние альтернировано. Значит, и диаграмма альтернирована (см. 4.2).

Диаграмма D редуцирована, поскольку все диаграммы с простыми сетями, за исключением двух диаграмм, являются редуцированными. Исключения составляют диаграммы рис. 15, но в этих случаях $4 = 4c(D) \neq \text{span } V_L = 0$.

Докажем обратное. Пусть D - стягиваемая альтернированная редуцированная диаграмма. Ее A -состояние тоже альтернировано, и по лемме 5.3.3 $|s_A| + |s_B| = c(D) + 2$. Покажем, что

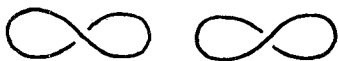


Рис. 15.

$$\deg_{\max} V_L = -3w(D) + D_{s_A}, \quad \deg_{\min} V_L = -3w(D) + d_{s_B}.$$

Это будет означать, что

$$\text{span } V_L = D_{s_A} - d_{s_B} = 2c(D) + 2(|s_A| + |s_B|) - 4 = 4c(D).$$

Для доказательства равенств покажем, что для любого состояния s , отличного от A -состояния, выполняется строгое неравенство $D_s < D_{s_A}$ и для любого состояния s , отличного от B -состояния, - неравенство $d_s > d_{s_B}$.

Пусть в состоянии s все маркеры, за исключением одного, являются маркерами типа A , а состояние s_A является A -состоянием. Тогда $a(s_A) - b(s_B) = a(s) - b(s) + 2$. Рассмотрим шахматную раскраску плоскости $\mathbb{R}P^2$, отвечающую сети диаграммы D . Так как диаграмма редуцирована, любые две области одного цвета около каждой вершины различны. Поэтому число областей одного цвета, в которых не лежат маркеры состояния s_A , равно $|s_A|$. При замене одного маркера типа A на маркер типа B две области при сглаживании сливаются в одну, см. рис. 16.

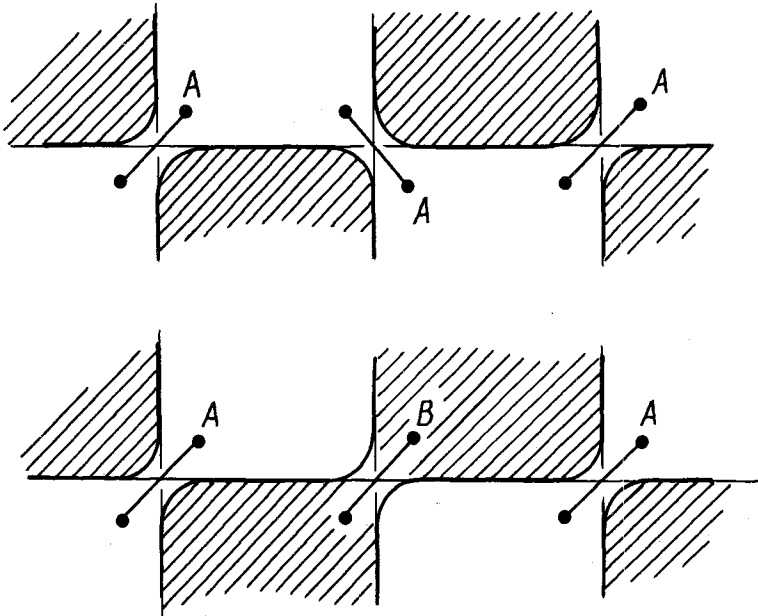


Рис. 16.

Значит, $|s_A| = |s| + 1$. Итак, $D_A = D_{s_A} > D_s$. Как уже было замечено (см. 6.1), для любого состояния s' с числом маркеров типа A на 1 меньшим, чем в состоянии s , $D_{s'} \leq D_s$. Поэтому для любого состояния s , отличного от A -состояния, $D_s < D_{s_A}$.

Аналогично доказывается неравенство $d_s > d_{s_B}$.

6.4. Доказательство теорем 6 и 2. Заметим, что для аффинных зацеплений $\text{span } V_L \equiv 0 \pmod{4}$ (см. [1]), поэтому равенство $4(c(D) + r(D)) - 6 =$

$= \text{span } V_L$ возможно только для нестягиваемых диаграмм.

Достаточно доказать следующее (ср. 6.3): в случае диаграммы с простой связной разбивающей нестягиваемой сетью $4c(D) - 2 = \text{span } V_L$ тогда и только тогда, когда D - альтернированная редуцированная диаграмма.

Доказательство этого утверждения повторяет приведенное в п. 6.3 доказательство с той лишь разницей, что ссылку на лемму 5.3.3 следует заменить ссылкой на лемму 5.3.6.

Теорема 2 очевидным образом следует из теорем 1 и 6.

6.5. Доказательство теоремы 5. Достаточно доказать следующее: в случае диаграммы с простой связной неразбивающей сетью $4c(D) = \text{span } V_L$ тогда и только тогда, когда D - редуцированная диаграмма, для которой альтернированность нарушается на единственном ребре.

Пусть $4c(D) = \text{span } V_L$. Тогда $|s_A| + |s_B| = c(D) + 2$ и по лемме 5.3.5 A -состояние альтернировано всюду, кроме одного ребра. Значит, и диаграмма альтернирована всюду, кроме этого ребра. Редуцированность диаграммы следует из простоты сети.

Обратное доказывается так же, как и в п. 6.4, с той лишь разницей, что шахматную раскраску нужно применить к новой сети, которая образована из старой добавлением односторонне вложенной окружности, пересекающей сеть только в точках ребра, на котором нарушено условие альтернированности. При подсчете областей, в которых не лежат маркеры типа A , необходимо учесть, что к односторонне вложенной окружности примыкает в точности одна из подсчитываемых областей, см. рис. 17.

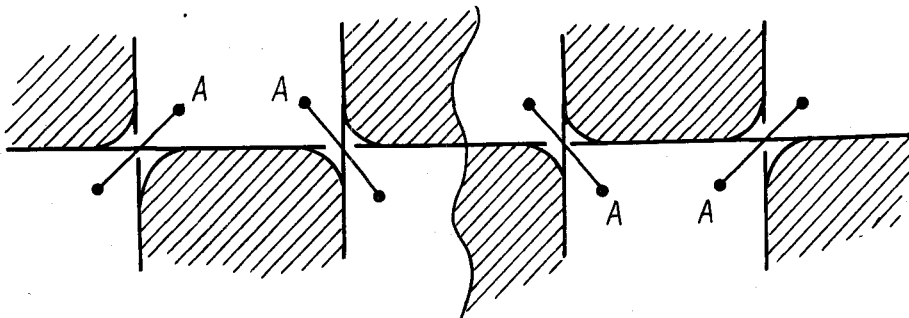


Рис. 17.

6.6. Адекватные диаграммы. Напомним (см. [4]), что диаграмма D зацепления L в S^3 называется *адекватной*, если $|s_A| > |s|$ для любого состояния s диаграммы D с $b(s) = 1$ и $|s| > |s_B|$ для любого состояния s диаграммы D с $a(s) = 1$. Ликориш и Тислтуэйт ([4], предложение 1) доказали, что если D - адекватная диаграмма зацепления $L \subset S^3$, то

$$\text{span } V_L = 2c(D) + 2(|s_A(D)| + |s_B(D)|) - 4.$$

Определение адекватных диаграмм и это утверждение дословно переносятся на случай зацеплений в RP^3 . Изложенное выше доказательство теорем 4, 5 и 6 по существу опиралось на это утверждение и на то, что диаграммы, о которых в них идет речь,

являются адекватными.

§ 7. Аффинность зацеплений

7.1. Доказательство теорем 7, 8 и следствия. Теорема 7 следует из того факта, что для аффинного зацепления обобщенный многочлен Джоунса совпадает с оригинальным многочленом Джоунса (в форме Кауффмана). Про такой многочлен известно, что степени всех входящих в него мономов делятся на 4, если число компонент зацепления четно, и сравнимы с $2 \pmod{4}$ в противном случае, см. [6].

Доказательство теоремы 8. Если зацепление L аффинно, то $\text{span } V_L \equiv 0 \pmod{4}$, см. [6]. Сеть альтернированной диаграммы всегда является разбивающей, см. утверждение в п. 4.1, поэтому если $\text{span } V_L \equiv 0 \pmod{4}$, то по теоремам 4 и 6 сеть диаграммы стягиваема. Следовательно, зацепление аффинно.

Доказательство следствия. Пусть сеть аффинной альтернированной диаграммы нестягиваема. Тогда по теореме 6 $\text{span } V_L \not\equiv 0 \pmod{4}$; что невозможно в случае аффинного зацепления. Обратное очевидно.

7.2. Коэффициент самозацепления. Прообраз в сфере S^3 при факторизации $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ гомологически тривиального ориентированного узла в $\mathbb{R}P^3$ представляет собой ориентированное двухкомпонентное зацепление. Коэффициент зацепления его компонент является инвариантом исходного узла K в $\mathbb{R}P^3$ (независимым, на самом деле, от ориентации узла K). Назовем это число *коэффициентом самозацепления* узла K и обозначим его через $sl(K)$. Коэффициент самозацепления непосредственно вычисляется по диаграмме узла. Все двойные точки диаграммы гомологически тривиального ориентированного узла K делятся на две группы: те, при сглаживании которых в соответствии с ориентацией получаются две гомологически нетривиальные компоненты, и те, при сглаживании которых получаются две гомологически тривиальные компоненты. Просуммировав числа ε_1 (см. 3.2) по всем двойным точкам первой группы, получим, как нетрудно показать, $sl(K)$.

Ясно, что для аффинных узлов коэффициент самозацепления равен нулю.

7.3. Пример неаффинного узла K с $sl(K)=0$ показан на рис. 18. Для того чтобы доказать наглядно очевидную неаффинность этого узла K , покажем, что старшая степень многочлена V_K не делится на 4.

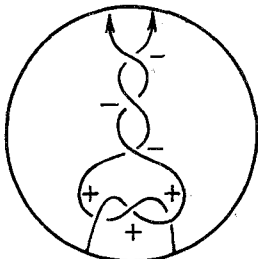


Рис. 18

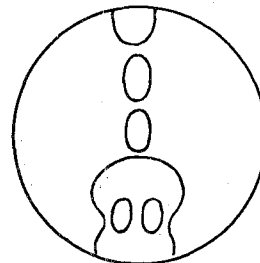


Рис. 19.

Каждому состоянию s диаграммы D узла соответствует многочлен $A^{a(s)-b(s)}(-A^{-2}-A^2)^{|s|-1}$. Сгладим диаграмму в соответствии с маркерами A -состояния, см. рис.19. Легко видеть, что только при таком сглаживании достигают максимума выражения $a(s)-b(s)$ $[=6]$ и $|s|$ $[=5]$. (Это следует из адекватности рассматриваемой диаграммы). Поэтому степень многочлена $V_K(A)=(-A)^{-3w(D)}v(D)$ [для нашей диаграммы $w(D)=0$] равна $6+2\cdot(5-1)=14\neq 0 \pmod{4}$.

Интересно отметить, что $\text{span}V_K = 20 \equiv 0 \pmod{4}$.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] K a u f f m a n L. State models and Jones polynomial. Preprint. 1986.
- [2] M u r a s u g i K. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory // Topology. 1987. Vol.26. P.187-194.
- [3] T u r a e v V.G. A simple proof of the Murasugi and Kauffman theorems on alternating links // L'Enseignement Mathematique. 1989. Vol.33. P.203-225.
- [4] L i c k o r i s h W.B.R., T h i s t l e t h w a i t e M.B. Some links with nontrivial polynomials and their crossing-numbers. Preprint. 1989.
- [5] T h i s t l e t h w a i t e M.B. Kauffman's polynomial and alternating links. Preprint. 1986.
- [6] J o n e s V. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras // Bul. Amer. Math. Soc. 1985. Vol.12. P.103-111.

Ленинградское отделение

Поступило 12 апреля 1989 г.

Математического института

им. В. А. Стеклова АН СССР

191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27