В. В. Лебедев, Об l^p-мультипликаторах функций, аналитических в круге, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 3, 92–96

DOI: 10.4213/faa3159

$$q(x)=\frac{l(l+1)}{x^2}+\tilde q(x),\quad x\geqslant x_0,\qquad \int_{x_0}^{\infty}x|\tilde q(x)|\,dx<\infty.$$

(i) *Если* $l\in[-1/2,1/2)$, *то* A *подобен самосопряженному.*

(ii) *Если* $l\geqslant 1/2$, *то* A *подобен самосопряженному в точности тогда, когда решение* $c(x)$ *неограничено.*

Отметим, что случай $l=0$ исследован другим методом в [8, разд. 4].

Автор признателен М. М. Маламуду за многочисленные полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за критические замечания.

Литература

[**1**] Р. В. Акопян, Изв. АН Арм. ССР, Сер. матем., **15**:5 (1980), 357–364. [**2**] R. Beals, J. Differential Equations, **56**:3 (1985), 391–407. [**3**] C. Bennewitz, Proc. London Math. Soc., (3), **59**:2 (1989), 294–338. [**4**] P. Binding, A. Fleige, Oper. Matrices, **5**:4 (2011), 735–755. [**5**] B. Ćurgus, A. Fleige, A. Kostenko, Integral Equations Operator Theory, **77**:4 (2013), 533–557. [**6**] B. Ćurgus, H. Langer, J. Differential Equations, **79**:1 (1989), 31–61. [**7**] И. М. Карабаш, А. С. Костенко, Функц. анализ и его прил., **43**:1 (2009), 81–84. [**8**] I. M. Karabash, A. S. Kostenko, M. M. Malamud, J. Differential Equations, **246**:3 (2009), 964–997. [**9**] I. M. Karabash, M. M. Malamud, Oper. Matrices, **1**:3 (2007), 301–368. [**10**] J. Korevaar, *Tauberian Theory*: *A Century of Developments*, Springer-Verlag, Berlin, 2004. [**11**] A. Kostenko, Math. Nachr., (2014) (to appear), DOI: 10.1002/mana.201300104; `http://arxiv.org/abs/1202.2444`. [**12**] H. Langer, in: Lect. Notes in Math., vol. 948, 1982, 1–46. [**13**] И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральных функциях струны. Доп.* II *к книге Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные задачи»*, Мир, М., 1968. [**14**] А. И. Парфенов, Сиб. матем. журн., **44**:4 (2003), 810–819. [**15**] С. Г. Пятков, в кн.: Неклассические уравнения математической физики, Изд-во Института математики СО РАН, Новосибирск, 2005, 240–251. [**16**] S. G. Pyatkov, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 221, Birhäuser/Springer-Verlag, Basel, 2012, 549–570. [**17**] K. Veselić, Glasnik Math. Ser. III, **7**:2 (1972), 229–248.

Faculty of Mathematics, University of Vienna
e-mail: Oleksiy.Kostenko@univie.ac.at

Поступило в редакцию
11 июля 2012 г.

УДК 517.948+513.8

Об l^p-мультипликаторах функций, аналитических в круге*

 В. В. Лебедев

Для произвольной функции f, аналитической в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, рассмотрим ее разложение в ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\widehat{f}(n)z^n,\qquad z\in D. \tag{1}$$

*Исследование осуществлено в рамках программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013–2014 гг., проект №12-01-0079.

При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ пусть $A_p^+(D)$ — пространство всех функций (1), таких, что последовательность коэффициентов Тэйлора $\widehat{f} = \{\widehat{f}(n),\, n = 0, 1, \dots\}$ принадлежит l^p. Для $f \in A_p^+(D)$ положим $\|f\|_{A_p^+(D)} = \|\widehat{f}\|_{l^p}$. Аналитическая в D функция m называется l^p-мультипликатором, если для любой функции f из $A_p^+(D)$ имеем $m \cdot f \in A_p^+(D)$. Класс всех таких мультипликаторов обозначим через $M_p^+(D)$. Этот класс является банаховой алгеброй относительно естественной нормы

$$\|m\|_{M_p^+(D)} = \sup_{\|f\|_{A_p^+(D)} \leqslant 1} \|m \cdot f\|_{A_p^+(D)}$$

и обычного умножения функций. Классы $M_p^+(D)$ изучались в работах [1]–[6][1)]. Отметим, что случай $p \neq 1, \infty, 2$ представляет отдельный интерес. Хорошо известно, что $M_p^+(D) = M_q^+(D)$ при $1/p + 1/q = 1$ и

$$A_1^+(D) = M_1^+(D) = M_\infty^+(D) \subseteq M_p^+(D) \subseteq M_2^+(D) = H^\infty(D),$$

где $H^\infty(D)$ — пространство Харди ограниченных аналитических функций в D.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ — открытая область, содержащая круг D. Мы укажем класс областей Ω, таких, что всякая ограниченная аналитическая функция в Ω принадлежит $M_p^+(D)$. Случай, когда Ω содержит замыкание круга D, тривиален; в этом случае всякая ограниченная аналитическая функция в Ω принадлежит $A_1^+(D)$ и, следовательно, принадлежит $M_p^+(D)$ при всех p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Нетривиальным является случай, когда граница области Ω имеет общие точки с границей $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ круга D.

Виноградов [2] показал, что если $r > 1$, $0 \leqslant \alpha < \pi/2$ и m — ограниченная аналитическая функция в области

$$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r,\, \alpha < \arg(z - 1) < 2\pi - \alpha\}, \tag{2}$$

то $m \in \bigcap_{1<p<\infty} M_p^+(D)$. С помощью этого результата Виноградов впервые указал примеры нетривиальных (т. е. бесконечных) произведений Бляшке в $M_p^+(D)$. Заметим, что граница всякой области (2) имеет лишь одну общую точку с границей круга D (а именно точку $z = 1$). Как мы увидим, утверждение, аналогичное результату Виноградова, верно для областей значительно более широкого класса. Функции, аналитические в областях, рассматриваемых ниже, могут иметь несчетное множество особенностей на границе круга[2)].

Как обычно, для произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ через $H^\infty(\Omega)$ будем обозначать пространство Харди ограниченных аналитических функций в Ω. Для $g \in H^\infty(\Omega)$ полагаем $\|g\|_{H^\infty(\Omega)} = \sup_{z\in\Omega} |g(z)|$.

Пусть J — дуга на граничной окружности ∂D, причем длина $|J|$ этой дуги строго меньше π. Пусть T_J — произвольный открытый равнобедренный треугольник, основанием которого служит хорда, стягивающая дугу J, и боковые стороны которого лежат вне круга D. Обозначим через θ_{T_J} угол между окружностью ∂D и боковой стороной треугольника T_J.

[1)] В § 6 работы автора [6] имеется неточность. Вместо написанного там «интеграл Пуассона» должно быть «проекция Рисса $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \to \sum_{k\geqslant 0} c_k z^k$».

[2)] Попутно отметим, что в теореме Виноградова условие $\alpha < \pi/2$ является существенным. Например, функция $S(z) = \exp\{(z+1)/(z-1)\}$ ограничена в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$, но, как показал Вербицкий [4], принадлежит $M_p^+(D)$ лишь в тривиальном случае $p = 2$.

Рассмотрим произвольное замкнутое множество $F \subseteq \partial D$. Пусть $\tau(F)$ — семейство всех дуг, дополнительных к F (т. е. компонент связности дополнения $\partial D \setminus F$). Будем предполагать, что каждая дуга семейства $\tau(F)$ имеет длину, строго меньшую, чем π. Рассмотрим область

$$\Omega_F = D \cup \bigcup_{J \in \tau(F)} T_J,$$

причем потребуем выполнения условия

$$\inf_{J \in \tau(F)} \theta_{T_J} > 0. \tag{3}$$

Всякую область Ω_F, полученную указанным образом, назовем звездообразной областью, порожденной множеством F.

Мы покажем, что при некотором условии, наложенном на множество $F \subseteq \partial D$, всякая ограниченная аналитическая в Ω_F функция принадлежит $M_p^+(D)$.

Пусть E — замкнутое множество лебеговой меры нуль на прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим семейство $\tau(E)$ всех интервалов, дополнительных к E (т. е. компонент связности дополнения $\mathbb{R} \setminus E$). Для произвольного интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ определим оператор S_I, полагая

$$\widehat{S_I(f)} = 1_I \widehat{f}, \qquad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}),$$

где $\widehat{\ }$ означает преобразование Фурье и 1_I — характеристическая функция интервала I (т. е. $1_I(t) = 1$ при $t \in I$, $1_I(t) = 0$ при $t \notin I$). Следуя [7], скажем, что множество E обладает свойством $\mathrm{LP}(p)$ $(1 < p < \infty)$, если соответствующая квадратичная функция Литтлвуда–Пэли

$$S(f) = \biggl(\sum_{I \in \tau(E)} |S_I(f)|^2\biggr)^{1/2}$$

удовлетворяет условию

$$c_1(p)\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \|S(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant c_2(p)\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \qquad f \in L^p(\mathbb{R})$$

(с положительными константами $c_1(p)$, $c_2(p)$, не зависящими от f). В случае, если E обладает свойством $\mathrm{LP}(p)$ при всех p, $1 < p < \infty$, скажем, что E обладает свойством LP.

Пусть теперь F — замкнутое множество меры нуль на граничной окружности ∂D. Скажем, что F обладает свойством $\mathrm{LP}(p)$ или свойством LP, если $F = \{e^{it}, t \in E\}$, где $E \subseteq [0, 2\pi]$ — множество, обладающее свойством $\mathrm{LP}(p)$ или свойством LP соответственно.

Замечание 1. Классическим примером бесконечного множества $E \subseteq \mathbb{R}$, обладающего свойством LP, является $E = \{\pm 2^k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Вместе с тем существуют несчетные множества, обладающие свойством LP. Впервые это было установлено Хеар и Клемешем [8]. Существование таких множеств также отмечалось в [9]; детали изложены в [10, §4]. Сформулируем соответствующий результат для множеств на ∂D. При каждом p, $1 < p < \infty$, существует константа β_p $(0 < \beta_p < 1)$, такая, что верно следующее. Пусть $F \subseteq \partial D$ — замкнутое множество меры нуль. Предположим, что дуги J_k, $k = 1, 2, \ldots$, дополнительные к F, будучи занумерованы в порядке невозрастания их длин, удовлетворяют условию $|J_{k+1}|/|J_k| \leqslant \beta_p$ при всех достаточно больших k. Тогда F обладает свойством $\mathrm{LP}(p)$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что если $\lim_{k\to\infty}|J_{k+1}|/|J_k|=0$, то F обладает свойством LP.

Результатом настоящей заметки является следующая

Теорема. *Пусть множество* $F\subseteq\partial D$ *обладает свойством* $\mathrm{LP}(p)$ *и* Ω_F *— звездообразная область, порожденная* F. *Тогда* $H^\infty(\Omega_F)\subseteq M_p^+(D)$. *Если* F *обладает свойством* LP, *то* $H^\infty(\Omega_F)\subseteq\bigcap_{1<p<\infty}M_p^+(D)$.

Доказательство. Пусть G — абелева группа и Γ — группа, двойственная к G. Рассмотрим функцию $m\in L^\infty(\Gamma)$ и оператор Q, определяемый соотношением

$$\widehat{Qf}=m\widehat{f},\qquad f\in L^p\cap L^2(G),$$

где $\widehat{\ }$ означает преобразование Фурье на G. Функция m называется L^p-мультипликатором Фурье, если соответствующий оператор Q является ограниченным оператором в $L^p(G)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. Класс всех таких мультипликаторов обозначается через $M_p(\Gamma)$, при этом полагаем $\|m\|_{M_p(\Gamma)}=\|Q\|_{L^p(G)\to L^p(G)}$. Хорошо известна [11] (см. также [12]) связь между мультипликаторами Фурье на прямой $\mathbb{R}$ и на окружности $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Нам потребуется теорема Джодета [12] о периодическом продолжении мультипликаторов. Согласно этой теореме, если $f\in M_p(\mathbb{R})$ — функция, аннулирующаяся вне отрезка $[0,2\pi]$, и g есть 2π-периодическая функция, совпадающая с f на $[0,2\pi]$, то $g\in M_p(\mathbb{T})$. Отметим, что между пространствами $M_p^+(D)$ и $M_p(\mathbb{T})$ имеется непосредственная связь. Имея произвольную функцию $m\in H^\infty(D)$, рассмотрим ее (некасательную) граничную функцию $m^*(t)=m(e^{it})$. Условия $m\in M_p^+(D)$ и $m^*\in M_p(\mathbb{T})$ эквивалентны [3] (см. также [5]).

Нам потребуется также следующее утверждение. Пусть множество $E\subseteq\mathbb{R}$ обладает свойством $\mathrm{LP}(p)$. Предположим, что функция $f\in L^\infty(\mathbb{R})$ непрерывно дифференцируема на каждом интервале, дополнительном к E, и ее производная f' удовлетворяет условию

$$|f'(t)|\leqslant\frac{c}{\operatorname{dist}(t,E)},\qquad t\in\mathbb{R}\setminus E,\tag{4}$$

где $\operatorname{dist}(t,E)$ означает расстояние от точки t до множества E и $c>0$ не зависит от t. Тогда $f\in M_p(\mathbb{R})$. Этот результат, принадлежащий Шёгрену и Шёлину [7], является обобщением хорошо известной теоремы Михлина–Хёрмандера.

Заметим теперь, что условие (3) влечет за собой существование константы $c=c(\Omega_F)>0$, такой, что если $e^{it}\in\partial D\setminus F$, то окружность с центром в e^{it} и радиусом $r(t)=c\cdot\operatorname{dist}(e^{it},F)$ целиком содержится в Ω_F. Обозначим эту окружность через $\gamma(t)$. Пусть $m\in H^\infty(\Omega_F)$. Рассмотрим произвольную дугу J, дополнительную к F. Пусть $e^{it}\in J$. Рассмотрим соответствующую окружность $\gamma(t)$. Для произвольной точки z, лежащей внутри окружности $\gamma(t)$, имеем

$$m'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(t)}\frac{m(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.$$

В частности

$$m'(e^{it})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(t)}\frac{m(\zeta)}{(\zeta-e^{it})^2}\,d\zeta.$$

Отсюда для производной $(m^*)'$ граничной функции $m^*(t) = m(e^{it})$ получаем

$$|(m^*)'(t)| = |ie^{it}m'(e^{it})| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(t)} \frac{m(\zeta)}{(\zeta - e^{it})^2}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma(t)} \frac{|m(\zeta)|}{|\zeta - e^{it}|^2}\,|d\zeta|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\,2\pi r(t)\|m\|_{H^\infty(\Omega_F)}\frac{1}{(r(t))^2} = c_1(\Omega_F)\|m\|_{H^\infty(\Omega_F)}\,\frac{1}{\operatorname{dist}(e^{it}, F)}\,. \quad (5)$$

Пусть $E \subseteq [0, 2\pi]$ — множество, такое, что $F = \{e^{it},\, t \in E\}$ и E обладает свойством $\mathrm{LP}(p)$. Не ограничивая общности, можем считать, что E содержит точки 0 и 2π. Определим функцию f на прямой $\mathbb{R}$, полагая $f(t) = 1_{[0,2\pi]}(t)m^*(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Мы видим (см. (5)), что функция f удовлетворяет условию (4). Следовательно, по теореме Шёгрена–Шёлина, имеем $f \in M_p(\mathbb{R})$. Отсюда, пользуясь теоремой Джодета, получаем $m^* \in M_p(\mathbb{T})$. В силу связи между мультипликаторами на $\mathbb{T}$ и мультипликаторами функций, аналитических в круге D, получаем, что $m \in M_p^+(D)$.

Замечание 2. Насколько известно автору, вопрос о существовании множеств, обладающих свойством $\mathrm{LP}(p)$ при каком-то p, $p \neq 2$, и не обладающих свойством LP, открыт.

Литература

[**1**] С. А. Виноградов, ДАН СССР, **254**:6 (1980), 1301–1306. [**2**] С. А. Виноградов, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **39** (1974), 30–39. [**3**] Н. К. Никольский, Сиб. матем. ж., **7** (1966), 146–158. [**4**] И. Э. Вербицкий, Функц. анализ и его прил., **14**:3 (1980), 67–68. [**5**] В. В. Лебедев, Функц. анализ и его прил., **32**:4 (1998), 10–21. [**6**] V. V. Lebedev, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 113, 2000, 205–212. [**7**] P. Sjögren, P. Sjölin, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **31**:1 (1981), 157–175. [**8**] K. Hare, I. Klemes, Trans. Amer. Math. Soc., **347**:10 (1995), 4105–4127. [**9**] V. Lebedev, A. Olevskiĭ, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **322** (1996), 143–147. [**10**] В. В. Лебедев, А. М. Олевский, Изв. РАН, сер. Матем., **70**:3 (2006), 129–166. [**11**] K. de Leew, Ann. Math., **81** (1965), 364–379. [**12**] M. Jodeit, Studia Math., **34** (1970), 215–226.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Московский институт электроники и математики
e-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступило в редакцию
22 марта 2013 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 24.07.2014. Дата выхода в свет 20.08.2014. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,4 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 172 экз. Заказ 374.

Учредители: Российская академия наук, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6