



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Апфельбаум, В. М. Журавлев, П. И. Самовол, Об одном свойстве интегрируемой функции,  
*Матем. просв.*, 2006, выпуск 10, 265–272

<https://www.mathnet.ru/mp204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

15 мая 2025 г., 19:54:19



## Об одном свойстве интегрируемой функции

М. Аппельбаум      В. Журавлёв      П. Самовол

В этой заметке приводится решение задачи 9.10 из задачника «Математического просвещения».

На математических соревнованиях самого разного уровня встречаются задачи с несколько парадоксальной формулировкой. Например, в книге [1, с. 105] находим:

**ЗАДАЧА 1.** Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Может ли быть так, что за любые пять идущих подряд месяцев его общий доход превышал расход, а в целом за год его доход превысил расход?

(В формулировке А. А. Егорова задача звучит более интригующе: «как долго может законно существовать бизнес-сообщество, если по итогам работы за любые 5 месяцев у сообщества есть прибыль, но за год в налоговую инспекцию сообщество подаёт отчёт о том, что прибыли нет и налоги платить не из чего...»)

Второй пример предлагался на Международной Математической Олимпиаде (ИМО) 1977 года в Белграде (6 очков), см. [2, с. 5, №19.2]:

**ЗАДАЧА 2.** В конечной последовательности действительных чисел сумма любых семи идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати идущих подряд членов положительна. Найти наибольшее число членов данной последовательности.

В Шестнадцатом Международном Турнире городов (1994–1995, осенний тур) находим задачу:

**ЗАДАЧА 3.** (А. Канель-Белов) Периоды двух последовательностей — 7 и 13. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать? (Период последовательности  $\{a_n\}$  — это наименьшее натуральное число  $p$  такое, что для любого номера  $n$  выполняется равенство  $a_n = a_{n+p}$ ).

Математическую идею всех данных задач можно сформулировать так.

Для последовательности действительных чисел, записанных в строчку, выполняются следующие условия (\*):

1. сумма любых  $m$  идущих подряд членов отрицательна;
2. сумма любых  $n$  идущих подряд членов положительна.

Чему равно  $N_{\max}$  — максимальное число членов данной последовательности?

В этой статье мы рассмотрим ещё одну версию данной проблемы.

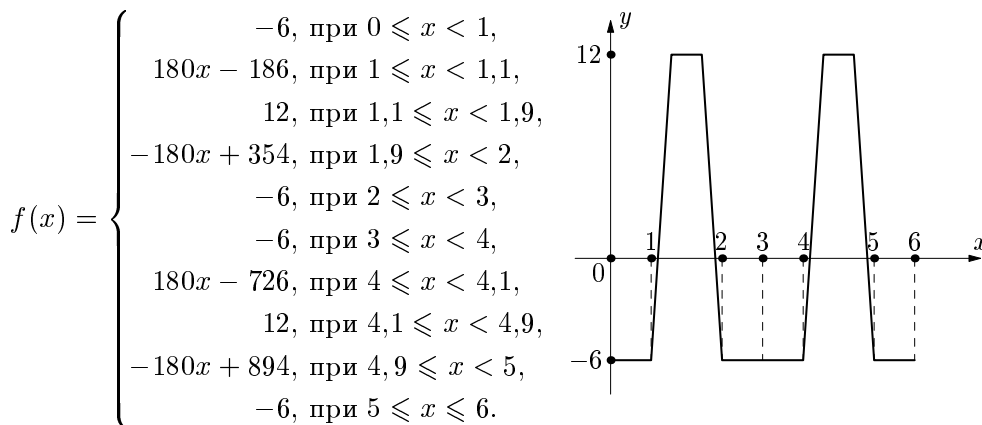
**ЗАДАЧА 4.** Существует ли такая непрерывная функция  $y = f(x)$ , что любой определённый интеграл от этой функции по любому отрезку длины  $m = 3$  отрицателен, а по любому отрезку длины  $n = 5$  — положителен?

Такие функции существуют. Аналитическое выражение одной из них и примерная схема ее графика приведены ниже на рисунке 1. График симметричен относительно прямой  $x = 3$ . Каждая из частей графика также симметрична: первая относительно прямой  $x = 1,5$ , вторая (правая) часть симметрична относительно прямой  $x = 4,5$ . Кроме того, для  $x \in [0; 3]$  выполняется равенство  $f(x) = f(x + 3)$  (периодичность).

Поэтому

$$\int_a^{a+3} f(x) dx = \int_a^3 f(x) dx + \int_3^{a+3} f(x) dx = \int_a^3 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx.$$

(Здесь и далее мы предполагаем, что равенства выполняются для тех значений параметров, при которых отрезки интегрирования попадают в область определения функции.)



**Рис. 1.**

С другой стороны, функция  $f(x)$  принимает одно и то же значение  $-6$  на отрезках  $[0; 1]$  и  $[5; 6]$ . Поэтому

$$\int_a^{a+5} f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx \quad (0 \leq a \leq 1).$$

Интеграл от линейной функции равен произведению длины отрезка интегрирования на полусумму значений функции в концах отрезка интегрирования. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= 1 \cdot (-6) + 0,1 \cdot \frac{-6+12}{2} + 0,8 \cdot 12 + 0,1 \cdot \frac{-6+12}{2} + 1 \cdot (-6) = \\ &= -12 + 9,6 + 2 \cdot 0,3 = -1,8 < 0, \end{aligned}$$

а

$$\int_0^5 f(x) dx = -1,8 + 1 \cdot (-6) + 2 \cdot 0,3 + 9,6 = 2,4 > 0.$$

Таким образом, для данной функции любой определенный интеграл по отрезку длины 3 отрицательный, а по отрезку длины 5 — положительный.

Докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 1.** *Интегрируемая на отрезке  $[0, c]$  функция  $f(x)$  такова, что любой интеграл по отрезку длины  $n$  положителен, а по отрезку длины  $m$  отрицателен,  $c > m > n > 0$ . Тогда*

а)  $c < m + n$ ;

б) если  $m$  и  $n$  соизмеримы, т. е.  $m/n = q/p$ , где  $p, q$  — взаимно простые целые числа, то  $c < m + n - m/q$ .

Доказательство а): предположим, что  $c \geq m + n$ . Обозначим через  $F(x)$  первообразную функции  $f(x)$ , а через  $\Phi(x)$  — первообразную функции  $F(x)$ . Используя формулу Ньютона — Лейбница и учитывая, что интеграл от положительной функции положителен, от отрицательной отрицателен, получаем противоречие:

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^m \left[ \int_x^{x+n} f(y) dy \right] dx &= \int_0^m (F(x+n) - F(x)) dx = \\ &= \Phi(m+n) - \Phi(m) - \Phi(n) + \Phi(0) = \\ &= \int_0^n (F(y+m) - F(y)) dy = \int_0^n \left[ \int_y^{y+m} f(x) dx \right] dy < 0. \end{aligned}$$

Итак,  $c < m + n$ .

Доказательство b). Полагаем  $d = m/q = n/p$ , так что  $m = qd$ ,  $n = pd$ .  
Обозначим

$$S_{d,k} = \int_{(k-1)d}^{kd} f(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}, d > 0, kd \leq c.$$

Рассмотрим последовательность

$$S_{d,1}, S_{d,2}, S_{d,3}, \dots, S_{d,p+q-1}. \quad (2)$$

Согласно условию теоремы эта последовательность удовлетворяет следующим свойствам:

1. сумма любых подряд идущих  $p$  ее членов положительна;
2. сумма любых подряд идущих  $q$  ее членов отрицательна.

Но, как следует из приводимой ниже леммы, последовательностей с такими свойствами не существует (максимальная длина такой последовательности равна  $p + q - (p, q) - 1$ ). Приходим к противоречию.

Теперь сформулируем и докажем упомянутую лемму.

**ЛЕММА 1.** *Будем говорить, что последовательность действительных чисел удовлетворяет свойству  $*(n, m)$ , если сумма любых  $n$  идущих подряд членов последовательности положительна, а сумма любых  $m$  идущих подряд членов последовательности отрицательна.*

*Если последовательность  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  удовлетворяет свойству  $*(n, m)$ , то  $N \leq m + n - d - 1$ , где  $d = (m, n)$  — наибольший общий делитель чисел  $n$  и  $m$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Без ограничения общности считаем, что  $m > n$ . Очевидно, что при выполнении условия леммы числа  $m$  и  $n$  не могут быть кратны друг другу. Поэтому  $n > d = (m, n)$ . Обозначим  $n = n_1d$ ,  $m = m_1d$ ,  $(m_1, n_1) = 1$ .

Будем доказывать лемму от противного. Предположим, что в последовательности  $n + m - d = d(m_1 + n_1 - 1)$  членов. Разобьем последовательность на  $m_1 + n_1 - 1$  групп по  $d$  чисел в каждой группе. Согласно условию леммы получаем, что сумма чисел в любых  $m_1$  группах положительна, а сумма чисел в любых  $n_1$  группах — отрицательна. По сути дела мы свели доказательство к частному случаю леммы, когда  $n$ ,  $m$  взаимно просты. Поэтому в дальнейшем рассуждении мы считаем, что  $(n, m) = 1$  и говорим о членах последовательности длины  $n + m - 1$ .

Рассмотрим любые  $m - n$  подряд идущих членов последовательности. Кроме них последовательность содержит  $(m + n - 1) - (m - n) = 2n - 1$  членов. Так как число  $2n - 1$  нечетное, то при любом разбиении этого числа на два слагаемых одно из них будет не меньше  $n$ . Так что слева

или справа от выбранной группы из  $m - n$  членов находится еще не менее  $n$  членов.

Сумма любых  $n$  подряд идущих членов последовательности положительна. Если добавить  $n$  членов к выбранной группе из  $m - n$  членов последовательности, то сумма полученного набора из  $m$  подряд идущих членов последовательности будет отрицательна. Поэтому сумма выбранных  $m - n$  членов должна также быть отрицательной.

Итак, для взаимно простых  $m, n$  мы показали, что если последовательность удовлетворяет свойству  $*(n, m)$ , то она также удовлетворяет свойству  $*(n, m - n)$ . Далее действуем аналогично, заменяя большее из чисел  $m, n$  на их разность. Получаем такую же последовательность пар чисел, как в алгоритме Евклида. Поскольку исходные числа  $n, m$  — взаимно простые, приходим к тому, что последовательность удовлетворяет свойству  $*(q, 1)$ , что невозможно (если все члены последовательности отрицательны, то любая их сумма также будет отрицательной).  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Таким образом, мы видим, что описанная в начале статьи математическая идея может принимать самые разные формы. Вместе с тем переход в «интегральную тематику» позволяет рассмотреть случай несоизмеримых пределов интегрирования.

Оценки в теореме 1 нельзя улучшить. Будем говорить, что функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[0; c]$ , удовлетворяет интегральному свойству  $*(n, m)$ , если интеграл от  $f(x)$  по любому отрезку длины  $n$  положителен, а по любому отрезку длины  $m$  отрицателен.

ТЕОРЕМА 2. 1) Если  $m$  и  $n$  соизмеримы, т. е.  $m/n = q/p$ , где  $p, q$  — взаимно простые целые числа, то для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $m + n - m/q > \varepsilon$ , можно построить интегрируемую функцию  $f(x)$  на отрезке  $[0, m + n - m/q - \varepsilon]$ , удовлетворяющую интегральному свойству  $*(m, n)$ .

2) Если  $m$  и  $n$  несоизмеримы, то для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $m + n > \varepsilon$ , можно построить интегрируемую функцию  $f(x)$  на отрезке  $[0, m + n - \varepsilon]$ , удовлетворяющую интегральному свойству  $*(m, n)$ .

Для доказательства теоремы мы будем строить функции, удовлетворяющие усиленному интегральному свойству  $*(m, n)$ . А именно, функцией типа  $(L, m, S_m, n, S_n)$  назовем функцию, определенную на отрезке  $[0; L]$ , и такую, что интеграл от этой функции по любому отрезку длины  $m$  равен  $S_m$ , а по любому отрезку длины  $n$  равен  $S_n$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если построена функция типа  $(L, m, S_m, n, S_n)$  такая, что  $L, m, n$  — целые,  $S_m < 0, S_n > 0$ , то интегралы от этой функции по отрезкам  $[k; k + 1]$  предоставляют пример «парадоксальной» последовательности (см. [4]). В частности, из теоремы 2 следует, что оценка в лемме 1 точна. Приводимое ниже доказательство теоремы 2 является

прямым обобщением алгоритма построения «парадоксальных» последовательностей из [4].

ЛЕММА 2. Пусть  $L < m + n$  и для любых  $A, B$  существует функция типа  $(L, m, A, n, B)$ ,  $m > n$ . Тогда для любых  $A, B$  существуют функции типов  $(L + m, m, A, n + m, B)$  и  $(L + n, m, A, n + m, B)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $f$  имеет тип  $(L, m, A, n, B)$ . Тогда функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } 0 \leq x < m, \\ f(x - m), & \text{если } m \leq x < L + m, \end{cases}$$

имеет тип  $(L + m, m, A, n + m, A + B)$ . Действительно, если  $b - a = m$ ,  $a < m$ , то

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^m g(x) dx + \int_m^b g(x) dx = \int_a^m f(x) dx + \int_0^{b-m} f(x) dx = A,$$

а если  $b - a = n + m$ , то из  $L < m + n$  следует, что  $a < m$ , а значит

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_a^m f(x) dx + \int_0^{b-m} f(x) dx = \int_a^m f(x) dx + \int_0^{a+n} f(x) dx = \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_a^m f(x) dx + \int_a^{a+n} f(x) dx = A + B. \end{aligned}$$

Докажем, что функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x - n + m), & \text{если } 0 \leq x < n, \\ f(x - n), & \text{если } n \leq x < L + n, \end{cases}$$

имеет тип  $(L + n, m, A, n + m, A + B)$ . Если  $b - a = m$ ,  $a < n$ , то

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^n g(x) dx + \int_n^b g(x) dx = \int_{a+m-n}^m f(x) dx + \int_0^{b-n} f(x) dx = A,$$

а если  $b - a = n + m$ , то из  $L < m + n$  следует, что  $a < n$ , а значит

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_{a+m-n}^m f(x) dx + \int_0^{b-n} f(x) dx = \int_{a+m-n}^m f(x) dx + \int_0^{a+m} f(x) dx = \\ &= \int_{a+m-n}^{a+m} f(x) dx + \int_{a+m}^m f(x) dx + \int_0^{a+m} f(x) dx = B + A. \end{aligned}$$

Теперь лемма вытекает из того факта, что отображение  $(A, B) \mapsto (A, A + B)$  взаимно однозначно.  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для  $n < m < L = 2n - \delta$  зададим функцию  $f$  типа  $(L, m, A, n, B)$  явной формулой:

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } 0 \leq x < n - \delta \text{ или } n \leq x \leq L, \\ a, & \text{если } n - \delta \leq x < n. \end{cases} \quad (3)$$

Интеграл от  $f$  по любому отрезку длины  $n$  равен  $B = \delta a + (n - \delta)b$ , а по любому отрезку длины  $m$  равен  $A = \delta a + (m - \delta)b$ . Получающаяся система линейных уравнений невырождена и поэтому имеет единственное решение при любых  $A, B$ .

Преобразования, описанные в лемме 2, одинаково меняют сумму  $m + n$  и длину  $L$ . Для функции из (3) разность  $m + n - L$  равна  $m - n + \delta$ .

Поэтому, многократно применяя лемму 2 и используя функцию из (3), получаем следующее утверждение: если пара  $(m, n)$  переходит в пару  $(m_\ell, n_\ell)$ ,  $n_\ell < m_\ell < 2n_\ell - \varepsilon$ , после нескольких преобразований вида

$$(m, n) \mapsto (m - n, n) \text{ или } (m, n) \mapsto (m, m - n), \quad (4)$$

то существуют функции типа  $(n + m - (m_\ell - n_\ell) - \varepsilon, n, A, m, B)$  для любых  $A, B$  и  $0 < \varepsilon < n + m - (m_\ell - n_\ell)$ .

Применим это рассуждение для доказательства пункта 1) теоремы. Положим  $d = m/q = n/p$ , очевидно, что  $n = pd$  и  $m = qd$ . Выберем натуральное число  $N$ , такое что  $0 < d/N < \varepsilon$ . Рассмотрим натуральные числа  $m_1 = Nq$  и  $n_1 = Np$ . Очевидно, что  $N = (m_1, n_1)$ . Построим функцию  $y = f_1(x)$  типа  $(m_1 + n_1 - N - 1, m_1, A, n_1, B)$ . В качестве искомой достаточно рассмотреть функцию  $y = f(x) = f_1(dx/N)$ , определенную на отрезке

$$\left[0; \frac{m_1 + n_1 - N - 1}{N}d\right] = \left[0; m + n - \frac{m}{q} - \frac{d}{N}\right] \supset \left[0; m + n - \frac{m}{q} - \varepsilon\right].$$

Аналогично доказывается пункт 2) теоремы. В этом случае в силу несоизмеримости  $m, n$  последовательность преобразований (4) продолжается неограниченно:

$$(m, n) \mapsto (m_1, n_1) \mapsto (m_2, n_2) \mapsto \dots \mapsto (m_\ell, n_\ell) \mapsto \dots,$$

причем  $m_\ell + n_\ell \rightarrow 0$  при  $\ell \rightarrow \infty$  и сколь угодно часто выполняется неравенство  $n_\ell < m_\ell < 2n_\ell$ . Выбрав такое  $\ell$ , что  $m_\ell + n_\ell < \varepsilon/2$  и  $n_\ell < m_\ell < 2n_\ell$ , заключаем, что так что существуют функции типа  $(n + m - \varepsilon, n, A, m, B)$  для любых  $A, B$  и  $0 < \varepsilon < n + m$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Построенные в доказательстве ступенчатые функции можно без труда превратить в непрерывные, удовлетворяющие аналогичным условиям.



В заключение предлагаем обобщение на многомерный случай как задачу для самостоятельного исследования.

**ЗАДАЧА.** Для каких областей  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  существует непрерывная функция  $f$  с областью определения  $\Phi_3$  и такая, что интеграл от  $f$  по любому параллельному переносу  $\Phi_1$ , лежащему в  $\Phi_3$ , положителен, а интеграл от  $f$  по любому параллельному переносу  $\Phi_2$ , лежащему в  $\Phi_3$ , отрицателен. Рассмотрите случай, когда  $\Phi_1$  — прямоугольник, а  $\Phi_2$  — круг.

Авторы выражают благодарность профессору Канель-Белову (Московский Институт Открытого Образования) за участие в обсуждении этой проблемы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. *Заочные математические олимпиады*. М.: Наука, 1997. С. 105, 108–109.
- [2] *Международные математические олимпиады*. Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. М.: Дрофа, 2000. С. 5, 34–35.
- [3] Произволов В., Спивак А. *Усреднение по окружности* // Квант, 1998. №1, с. 29–31.
- [4] Самовол П., Аппельбаум М., Жуков А. *Как построить парадоксальный пример* // Квант, 2005. №1, с. 35–37.
- [5] Международный Турнир городов, 1994–1995 (Осенний тур).  
<http://www.turgor.ru/16/turnir16.php#turnir16otm>

---

Dr. Peter Samovol, Ben-Gurion University of Negev, Beer-Sheva, Israel  
Kaye Academic College of Education, Beer-Sheva, Israel  
E-mail: [Pet12@012.net.il](mailto:Pet12@012.net.il)

Dr. Mark Applebaum, Kaye Academic College of Education, Beer-Sheva, Israel  
E-mail: [Amark@012.net.il](mailto:Amark@012.net.il)

Журавлёв Валерий Михайлович (к.ф.-м.н.), ОАО «Сибирско-Уральская нефтегазохимическая компания», г. Москва, Россия  
E-mail: [Zhuravlev@sibur.ru](mailto:Zhuravlev@sibur.ru)