1978 г. ноябрь—декабрь т. XXXIII, вып. 6 (204)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

# В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

## СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

### КЛАССИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЧАСТНЫХ *PI*-АЛГЕБР

К. И. Бейдар

Данная работа посвящена решению следующей проблемы, поставленной В. Н. Латышевым. Если *PI*-алгебра обладает классическим кольцом частных, то будет ли это кольцо частных *PI*-алгеброй? (см. [1], стр. 14).

Обозначим через $U(R)$ группу обратимых элементов кольца $R$, через $\operatorname{rad} R$, $N(R)$, $j(R)$ — первичный, верхний ниль и Джекобсона радикалы кольца $R$ соответственно. Почти локализацией кольца $R$ называется тройка $(\varphi;\ S;\ Q)$, обладающая следующими свойствами: (а) $\varphi\colon R \to Q$ — гомоморфизм $F$-алгебр; (б) $S$ — мультипликативно замкнутое подмножество кольца $R$; (в) $\varphi(S) \subseteq U(Q)$; (г) каждый элемент $q \in Q$ представим в виде $q = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ для подходящих элементов $r \in R$, $s \in S$. Кольцо $Q$ является классическим кольцом частных кольца $\varphi(R)$ относительно мультипликативно замкнутой системы $\varphi(S)$.

Лемма 1. *Пусть $Q$ — примитивное справа кольцо, являющееся правым классическим кольцом частных кольца $R$ относительно мультипликативно замкнутой системы $S$, $V_Q$ — точный неприводимый $Q$-модуль, $D = \operatorname{End}(V_Q)$, $W_1$, $W_2$ — конечномерные подпространства левого векторного пространства $V$ над телом $D$ и $v \in V \setminus W_1$. Предположим, что кольцо $Q$ не является простым артиновым. Тогда: 1) найдется элемент $r \in R$ такой, что $W_1 r = 0$, $vr \notin W_2$; 2) для любого числа $n$ кольцо $R$ содержит элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что выполнены следующие условия:* (а) $va_1a_2 \ldots a_{i-1}a_t = \delta_{it} va_1a_2 \ldots a_t$, *где $\delta_{it}$ — символ Кронекера и $0 \leqslant i - 1 < t \leqslant n$;* (б) $va_1a_2 \ldots a_t \notin \sum_{i=0}^{t-1} Dva_1a_2 \ldots a_i$ *при $1 \leqslant t \leqslant n$.*

Доказательство. Из теоремы плотности следует, что найдется элемент $as^{-1} \in Q$ такой, что $vas^{-1} \neq 0$, $W_1as^{-1} = 0$ (см. [3]). Ясно, что $va \neq 0$, $W_1a = 0$. Предположим, что $vaR \subseteq W_2$. Тогда $W_3 = DvaR \subseteq W_2$. Значит $W_3$ — конечномерное векторное пространство над телом $D$. Так как каждый элемент $s \in S$ является автоморфизмом векторного пространства $V$, то размерность векторного пространства $W_3s$ равна размерности пространства $W_3$. Но $W_3s \subseteq W_3$. Значит, $W_3s = W_3$ и $W_3 = W_3s^{-1}$ для всех $s \in S$. Теперь ясно, что $W_3Q \subseteq W_3$. Так как $V$ — неприводимый $Q$-модуль, то $V = W_3$. Из конечномерности пространства $V$ и теоремы плотности теперь следует, что $Q$ — простое артиново кольцо, что противоречит условию. Значит, $vab \notin W_2$ для некоторого $b \in R$. Ясно, что $r = ab$ — искомый элемент. Второе утверждение будем доказывать индукцией по числу $n$. Положим $W_1 = 0$, $W_2 = Dv$. По доказанному найдется элемент $a_1 \in R$ такой, что $va_1 \notin W_2$. Пусть уже найдены элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m$, удовлетворяющие условиям (а) и (б). Положим $W_1 = \sum_{i=0}^{m-1} Dva_1a_2 \ldots a_i$, $W_2 = W_1 + Dva_1a_2 \ldots a_m$. По доказанному найдется элемент $a_{m+1} \in R$ такой, что $W_1a_{m+1} = 0$ и $va_1a_2 \ldots a_{m+1} \notin W_2$. Ясно, что элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ удовлетворяют условиям (а) и (б).

Теорема 1. *Пусть* $(\varphi;\ S;\ Q)$ — *почти локализация PI-алгебры* $R$. *Тогда* $Q$ — *PI-алгебра.*

Доказательство. Ясно, что кольцо $R$ удовлетворяет некоторому полилинейному тождеству $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ такому, что коэффициент многочлена $f(X)$ при мономе $X_1X_2 \ldots X_n$ равен 1. Предположим, что $Q$ — примитивное справа кольцо. Если $Q$ — простое артиново кольцо, то из [4] (теорема 7.2.3, стр. 170) следует, что $\varphi(R)$ — первичное кольцо. Так как кольцо $\varphi(R)$ удовлетворяет тождеству $f(X)$, то из [5] (теорема 3.3) следует, что $f(X)$ — тождество кольца $Q$. Предположим теперь, что кольцо $Q$ не является простым артиновым. Сохраним обозначения леммы 1. Тогда найдутся такие элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \varphi(R)$, что будут выполнены условия (а) и (б) из леммы 1. Из этих условий следует, что для любого полилинейного монома $X_{i_1}X_{i_2} \ldots X_{i_n}$ от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ элемент $va_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_n}$ отличен от нуля тогда и только тогда когда $i_t = t$ при $1 \leqslant t \leqslant n$. Значит, $0 = vf(a_1, a_2, \ldots, a_n) = va_1a_2 \ldots a_n \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что если кольцо $Q$ является правым примитивным, то оно является правым артиновым и удовлетворяет тождеству $f(X)$. Вернемся к общему случаю. Пусть $P$ — правый примитивный идеал кольца $Q$ и $\psi$: $Q \to Q/P$ — канонический гомоморфизм колец. Ясно, что $(\psi\varphi;\ S;\ Q/P)$ — почти локализация кольца $R$. По доказанному кольцо $Q/P$ удовлетворяет тождеству $f(X)$. Значит, кольцо $Q/j(Q)$ удовлетворяет тождеству $f(X)$. Пусть $\xi$: $Q \to Q/N(Q) = \overline{Q}$ — канонический гомоморфизм колец и $R[t]$ — кольцо многочленов от переменной $t$. Продолжим гомоморфизм $\xi\varphi$ до гомоморфизма колец $R[t]$ и $\overline{Q}[t]$, полагая $\xi\varphi(t) = t$. Записывая коэффициенты многочленов в виде дробей с числителями из кольца $\xi\varphi(R)$, а знаменателями из множества $\xi\varphi(S)$ и приводя их к общему знаменателю, получаем, что $(\xi\varphi;\ S;\ \overline{Q}[t])$ — почти локализация кольца $R[t]$, удовлетворяющего тождеству $f(X)$. Так как $j(\overline{Q}[t]) = 0$ (см. [3], теорема 4, стр. 27), то, по доказанному, кольцо $\overline{Q}[t]$ удовлетворяет тождеству $f(X)$. Пусть $H$ — класс всех колец, являющихся почти локализациями алгебр с тождеством $f(X)$. Ясно, что класс $H$ замкнут относительно прямых произведений, и если $A \in H$, то кольцо $A/N(A)$ удовлетворяет тождеству $f(X)$. Из [2] (предложение А) теперь следует, что $H$ — класс $PI$-алгебр. Теперь ясно, что $Q$ — $PI$-алгебра.

Следствие 1. *Пусть* $Q$ — *правое классическое кольцо частных PI-алгебры* $R$ *тносительно мультипликативно замкнутой системы* $S$. *Тогда*: 1) $\operatorname{rad} Q = (\operatorname{rad} R)S^{-1}$; 2) *если* $h(X)$ — *тождество кольца* $R$, *то* $h(X)^n$ — *тождество кольца* $Q$ *для некоторого числа* $n = n(h)$.

Доказательство. Очевидно, что $(\operatorname{rad} Q) \cap R \subseteq \operatorname{rad}(R)$ и $\operatorname{rad} Q = (\operatorname{rad} Q \cap R)S^{-1}$. Переходя к кольцу $Q/\operatorname{rad} Q$, сводим доказательство к случаю $\operatorname{rad} Q = 0$. Если $\operatorname{rad} R \neq 0$, то кольцо $R$ содержит идеал $I \neq 0$ такой, что $I^2 = 0$. Пусть $\mathbb{C}$ — центр кольца $Q$ и $L = QIQ$. Тогда $\mathbb{C} \cap L \neq 0$ (см. [5], теорема 2.10). Далее, пусть $0 \neq c = \sum a_iu_ib_i \in \mathbb{C} \cap L$, где $a_i, b_i \in Q$, $u_i \in I$. Можно считать, что $b_i = c_id^{-1}$, где $c_i \in R$, $d \in S$. Тогда $dcI = cdI = \sum a_iu_ic_iI = 0$, поэтому $cI = 0$ и $cL = 0$, но $c \in L$; значит, $c^2 = 0$ и $c \in \operatorname{rad} Q = 0$,— противоречие. Следовательно, $\operatorname{rad} R = 0$ и утверждение 1) доказано. Если $\operatorname{rad} Q = 0$, то каждое тождество кольца $R$ является тождеством кольца $Q$ (см. [6], теорема 5). Общий случай доказывается так же, как и предложение А из [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Днестровская тетрадь, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1976.
[2] L. H. Rowen, Generalized polynomial identities. II, J. Algebra 38:2 (1976), 380—392.
[3] Н. Джекобсон, Строение колец, М., ИЛ, 1961.
[4] И. Херстейн, Некоммутативные кольца, М., «Мир», 1972.
[5] L. H. Rowen, Rings with central polynomials, J. Algebra 31:3 (1974), 187—222.
[6] К. И. Бейдар, Полупервичные кольца с обобщенным тождеством, УМН 32:4 (196) (1977).

Поступило в Правление общества 15 ноября 1977 г.