УДК 514.772

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ РАДИУСА-ВЕКТОРА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

С. Б. Климентов

§ 1. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

В предлагаемой статье рассматриваются априорные оценки для норм решений различных эллиптических дифференциальных уравнений теории двумерных поверхностей, которые тесно связаны с получением априорных оценок для производных радиуса-вектора поверхности положительной кривизны через метрику поверхности. Такие оценки есть один из главных пунктов в доказательстве теорем существования для эллиптических уравнений [3, с. 86—109], [15]. Коротко, схема таких доказательств следующая.

1) Уравнение (краевую задачу), заведомо разрешимое, соединяем непрерывным в подходящем смысле семейством уравнений с исследуемым. Параметр, от которого зависит построенное непрерывное семейство, обозначим $t\in[0;1]$. При $t=0$ имеем разрешимое уравнение, при $t=1$ — данное.

2) Доказываем, что при малом возмущении параметра разрешимое уравнение (краевая задача) остается разрешимым, то есть, что множество значений параметра $t\in[0;\ 1]$, для которых уравнение семейства разрешимо, открыто в топологии сегмента $[0;\ 1]$ (оно заведомо не пусто, так как содержит $t=0$).

3) С помощью априорных оценок доказывается замкнутость этого множества, то есть совпадение его с $[0;\ 1]$, откуда при $t=1$ получается разрешимость рассматриваемого уравнения (краевой задачи).

Этот метод восходит к С. Н. Бернштейну [3, с. 86—109] и получил название метода параметрического продолжения. В задачах дифференциальной геометрии он впервые применен, по-видимому, Г. Вейлем в 1916 г. [6] для решения проблемы о реализации абстрактно заданной на сфере регулярной метрики положительной кривизны в виде замкнутой выпуклой поверхности. Г. Вейль полностью осуществил первые два шага приведенной выше схемы применительно к уравнениям изометрического погружения и сформулировал задачу получения априорных оценок для производных радиуса-вектора замкнутой регулярной поверхности положительной кривизны, поскольку такие оценки необходимы для завершения его рассуждений. Самим Г. Вейлем в [6, с. 189] получено неравенство

$$H^2_{\max} \leqslant K - \frac{\Delta_2 K}{4K}, \qquad (1.1)$$

где $H_{\max}$ — максимум средней кривизны, достигаемый во внутренней точке поверхности положительной кривизны, K — гауссова кривизна, Δ_2 — второй дифференциальный инвариант Бельтрами.

Из неравенства (1.1) легко выводятся оценки производных радиуса-вектора до второго порядка включительно, что, однако, недостаточно для завершающего шага его рассуждений (для этого необходимы оценки в более сильной норме, например, в C^3 или C_α^2)*.

Полученный Г. Вейлем результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. Если заданная на сфере риманова метрика класса C_α^2 и положительной гауссовой кривизны, а также мало отличается от метрики сферы (в норме C_α^2), то она реализуема в трехмерном евклидовом пространстве овалоидом класса C_α^2 [6, с. 187].

Завершению решения проблемы Г. Вейля посвящены работы многих выдающихся математиков, которые и являются предметом приводимого ниже обзора.

Первое полное решение было дано Леви в 1938 г. [16], [17], [45] для аналитических метрик. Основой метода Леви является исследование решений аналитических эллиптических уравнений Монжа — Ампера (М. — А.) с помощью их комплексификации и перехода к характеристическим параметрам. Анализ решения характеристической системы позволяет оценить радиус сходимости и коэффициенты ряда, в который разложено решение уравнения М. — А. [16], а также изучить свойства последовательности решений аналитического уравнения М. — А. при переходе к пределу [16—17].

Применение этих разультатов к уравнению Дарбу дает априорные оценки производных до третьего порядка радиуса-вектора аналитического овалоида положительной кривизны, что завершает решение проблемы Вейля в аналитическом случае, а именно: аналитическая метрика положительной кривизны, заданная на сфере, реализуема аналитическим овалоидом.

В 1941 г. А. Д. Александров дал новое, построенное на со-

* В статье приняты стандартные определения функциональных пространств и норм в них, которые можно найти, например, в [7]. Если речь идет о норме функции на компактном многообразии (сфере), то предполагается зафиксированным конечный атлас и норма функции на многообразии определяется как максимум стандартных норм в зафиксированных картах.

вершенно других, чем у Вейля и Леви соображениях, простое решение проблемы Вейля [1]—[2]. Он доказал реализуемость заданной на сфере общей выпуклой метрики в виде, вообще говоря, общей выпуклой поверхности. А. Д. Александров первоначально доказывает реализуемость заданной на сфере многогранной выпуклой метрики замкнутым выпуклым многогранником, а затем аппроксимирует общую выпуклую метрику многогранными. Тем самым получается решение проблемы Вейля обобщенное в том смысле, что в случае регулярной римановой метрики положительной кривизны она реализуется, вообще говоря, общей выпуклой поверхностью.

С точки зрения классической теории поверхностей, которая рассматривает только достаточно регулярные поверхности, это решение проблемы Вейля было не вполне удовлетворительно, так как оставался открытым вопрос, будет ли регулярной (аналитической) реализация регулярной (аналитической) метрики.

Проблема регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой была решена А. В. Погореловым в работах 1949—51 гг., 1961 года [22]—[32]. Решение этой задачи также опиралось на априорные оценки для решений нелинейных эллиптических уравнений (в том числе уравнений М. — А.) и на оценки производных радиуса-вектора выпуклой шапки положительной кривизны.

Оценки радиуса-вектора в норме C^2 А. В. Погорелов получает, устанавливая верхнюю границу для максимума нормальной кривизны выпуклой поверхности положительной кривизны, достигаемого во внутренней точке поверхности [22], [29], [32, с. 105]:

$$(k_n)_{max} \leqslant \sqrt{K_0 + \frac{2\lambda}{\overline{K}_0}}, \tag{1.2}$$

где K_0 — максимум, $\overline{K}_0$ — минимум гауссовой кривизны поверхности, λ — максимум второй производной от гауссовой кривизны по дуге любой геодезической на поверхности; для этой же цели А. В. Погореловым получены оценки нормальных кривизн, а также угла наклона касательных плоскостей к плоскости основания вдоль края шапки.*

Априорные оценки производных высших порядков А. В. Погорелов получает, используя метод вспомогательных функций С. Н. Бернштейна [3, с. 143—149]. Окончательно в серии работ [22]—[29] А. В. Погореловым сформулирован и доказан следующий результат [29, с. 117—121]:

Теорема 2. Если выпуклая поверхность имеет m раз ($m \geqslant 5$) дифференцируемую метрику и положительную гауссову кривизну, то она по крайней мере ($m-1$) раз дифференци-

* Сходные оценки получены А. В. Погореловым при рассмотрении поверхностей с данным сферическим отображением [32, гл. 7]; [33]; оценки для поверхностей, мало отличающихся от шапки, проведены С. П. Гейсбергом [8].

руема. Если метрика аналитическая, поверхность также аналитическая.

В работах [31]—[32] А. В. Погорелов получает дальнейшее усиление этого утверждения.

Теорема 3. Если метрика выпуклой поверхности положительной кривизны класса C^m_α, $m \geqslant 2$, $0 \leqslant \alpha < 1$, то поверхность принадлежит классу $C^m_{\alpha'}$, $0 \leqslant \alpha' < \alpha$, либо $C^{m-1}_{\alpha'}$, $\forall \alpha' : 0 < \alpha' < 1$, при $\alpha = 0$.

При доказательстве теоремы 3 А. В. Погорелов помимо его вышеописанных результатов использует априорные оценки в норме C^2_α Ниренберга для решений нелинейных эллиптических уравнений, полученных с использованием свойств квазиконформных отображений [21], а также априорные оценки Хайнца [41] для решений дифференциального неравенства

$$0 < \mathrm{const} \leqslant z_{xx} z_{yy} - z^2_{xy} \leqslant \mathrm{const} < \infty .$$

Впоследствии И. Х. Сабитовым показано [34], что если в теореме 3 $0 < \alpha < 1$, то $\alpha' = \alpha$. Как следует из работы И. Х. Сабитова и С. З. Шефеля [35], этот результат точный, то есть поверхность положительной кривизны класса C_α^m, $m \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, имеет метрику того же класса регулярности.

Оценки А. В. Погорелова и Ниренберга применимы не только для доказательства регулярности решения проблемы Г. Вейля, полученного А. Д. Александровым (при условии регулярности метрики), но и для непосредственного завершения рассуждений самого Г. Вейля, что и проделано Ниренбергом в [46] в предположении, что заданная на сфере метрика положительной кривизны класса C^m, $m > 4$.*

Априорным оценкам, необходимым для завершения решения проблемы г. Вейля, посвящен ряд работ Хайнца [39—43]. Его методы отличны от методов А. В. Погорелова и Ниренберга и восходят к идее Леви исследования характеристических уравнений для уравнения М.-А. эллиптического типа (уравнения Дарбу).

Основой метода Хайнца являются следующие соображения.

Если $(u;\ v)$ — локальные координаты в некоторой односвязной области овалоида положительной кривизны,

$$\mathrm{II} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 > 0 \qquad (1.3)$$

—вторая основная форма овалоида, $(x;\ y)$ — сопряженно-изотермические параметры, приводящие форму (1.3) к изотермическому виду: $\mathrm{II} = \Lambda (x;\ y)\,(dx^2 + dy^2) > 0$, то функции

$$u = u(x;\ y), \quad v = v(x;\ y) \qquad (1.4)$$

* Решению проблемы Г. Вейля посвящена также работа Каччиополи 1940 г. [37]. Эта работа критиковалась Ниренбергом в [46].

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta u+\left(\Gamma_{11}^{1}+\frac{\partial \ln \sqrt{K}}{\partial u}\right)(u_x^2+u_y^2)+$$
$$+\left(2\Gamma_{12}^{1}+\frac{\partial \ln \sqrt{K}}{\partial v}\right)(u_x v_x+u_y v_y)+\Gamma_{22}^{1}(v_x^2+v_y^2)=0,$$

$$\Delta v+\Gamma_{11}^{2}(u_x^2+u_y^2)+\left(2\Gamma_{12}^{2}+\frac{\partial \ln \sqrt{K}}{\partial u}\right)(u_x v_x+u_y v_y)+ \qquad (1.5)$$
$$+\left(\Gamma_{22}^{2}+\frac{\partial \ln \sqrt{K}}{\partial v}\right)(v_x^2+v_y^2)=0,$$

где Δ — оператор Лапласа, $K=K(u;v)$ — гауссова кривизна овалоида, $\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}(u;v)$ — символы Христоффеля, вычисленные в координатах $(u;v)$. (Уравнения (1.5) получены Дарбу [37, § 725].) Наряду с (1.5) выполняются равенства

$$\frac{L}{\sqrt{LN-M^2}}=\frac{v_x^2+v_y^2}{J};\quad \frac{M}{\sqrt{LN-M^2}}=-\frac{u_x v_x+u_y v_y}{g};$$
$$\frac{N}{\sqrt{LN-M^2}}=\frac{u_x^2+u_y^2}{J}, \qquad (1.6)$$

где L, M, N — коэффициенты формы (1.3) в координатах $(u;v)$,

$$J=u_x v_y-u_y v_x>0^{*}. \qquad (1.7)$$

Так как дискриминант второй основной формы зависит только от метрики поверхности, из (1.6) следует, что для оценки L, M, N в норме C_α величиной, зависящей только от метрики овалоида (что в силу формул Гаусса эквивалентно априорной оценке радиуса-вектора в норме $C_\alpha{}^2$), достаточно оценить функции (1.4) в норме C_α, а якобиан (1.7) снизу константами, зависящими только от метрики поверхности.

Основываясь на проведенном им в [39] исследовании свойств уравнений вида (1.5), Хайнц в работе [40] 1959 г. выводит соответствующие оценки и получает еще одно решение проблемы Г. Вейля в несколько лучших предположениях регулярности, чем в работе Ниренберга [46], а именно, от метрики в [40] требуется принадлежность классу C^4. Дальнейшее усовершенствование методики оценки норм решений уравнений (1.5) и якобиана (1.7) позволило Хайнцу в работе 1960 г. [42] снизить требования на регулярность метрики при решении проблемы Вейля до C^3. В 1960 г .это было наибольшее продвижение в данном вопросе. Уже упоминавшиеся результаты А. В. Погоре-

* Параметры $x+iy$, $x-iy$ являются также характеристическими параметрами для уравнения Дарбу [40, с. 6].

лова 1961 г. (теорема 3) привели к дальнейшему снижению требований регулярности метрики; аналогичный результат несколько иным путем был установлен Хайнцем в 1962 г. [43].*

Естественным обобщением проблемы Вейля является задача изометрического погружения в трехмерное риманово пространство гомеоморфного сфере двумерного риманова многообразия в виде локально-выпуклой поверхности. Эта задача была поставлена и решена А. В. Погореловым в работах [30]—[32], где доказана следующая

Теорема 4. Пусть R — полное трехмерное риманово пространство и M — гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной всюду большей некоторой постоянной c (большей, меньшей или равной нулю). Тогда, если кривизна пространства R (по двумерным направлениям) всюду меньше c, то M изометрически погружаемо в R в виде регулярной поверхности F.

Если метрика пространства R и многообразия M класса C^m, $m \geqslant 6$, то $F \in C^{m-1}$, если метрика пространства R и многообразия M аналитическая, то поверхность F аналитическая.

Доказательство теоремы 4 представляет собой (весьма сложную) модификацию соответствующих рассуждений А. В. Погорелова при решении классической проблемы Г. Вейля.

Применение методики Хайнца [42] для получения априорных оценок позволило А. А. Дубровину [10] в 1966 г. получить усиление теоремы 4 по регулярности — на m в [10] накладывается условие $m \geqslant 3$.

В 1967 г. Хайнц [44] опубликовал результаты, аналогичные результатам А. А. Дубровина из [10].

Отметим, что у А. В. Погорелова теорема 4 не является чисто формальным обобщением решения проблемы Вейля; он продемонстрировал прикладной, рабочий характер этой теоремы, решив с ее помощью очень трудную проблему Кон-Фоссена об изометрических преобразованиях пунктированных овалоидов [14, с. 77], [31], [32].

Все перечисленные выше априорные оценки, используемые при решении проблемы Вейля, являются «внутренними», то есть для функции, заданной в некоторой области D, оценка нормы производится в подобласти $D_\delta \subset D$ и зависит от расстояния δ границы ∂D_δ области D_δ до границы ∂D области D, а также от максимума модуля рассматриваемой функции на D либо ее интегральной нормы на D. «Внутренних» оценок для решения проблемы Вейля достаточно, поэтому никем из упомянутых авторов оценки нормы радиуса-вектора замкнутого куска поверхности с краем не проводились. Исключение составляют уже

* Некоторое уточнение этих результатов следует из работы И. Г. Николаева и С. З. Шефеля [19], [20], а именно, если метрика класса C^2, то она реализуема овалоидом класса W_p^2, $\forall p > 2$.

упоминавшиеся оценки А. В. Погорелова для радиуса-вектора шапки и оценки Гейсберга для поверхностей, мало отличающихся от шапки.

Вместе с тем потребность в оценках такого сорта для произвольных локально-выпуклых поверхностей положительной кривизны возникает при исследовании изгибаний регулярных поверхностей с краем [11]—[13]. В работе [12] использована следующая оценка, являющаяся непосредственным следствием неравенства А. В. Погорелова (1.2) (а также неравенства Г. Вейля (1.1)).

Теорема 5. Пусть $\{S^n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность изометричных односвязных поверхностей положительной гауссовой кривизны $K \geqslant \text{const} > 0$, класса C^4, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве; $\mathscr{L}^n = \partial S^n$ — край поверхности S^n, $\mathscr{L}^n \in C^4$, D — единичный круг в $(u; v)$-плоскости, в котором параметризованы поверхности S^n так, что соответствующие по изометрии точки имеют одинаковые координаты $(u; v)$; $\partial D = \Gamma$, $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $S^n \in C^4(\overline{D})$.

Если модули граничных значений вторых производных радиус-векторов $\mathbf{r}^n \rightleftharpoons \mathbf{r}^n(u; v)$ поверхностей S^n допускают равномерную по n оценку, то имеет место равномерная по n оценка

$$\| \mathbf{r}^n(u; v) \|_{C^2(\overline{D})} \leqslant \text{const}^*.$$

В рассуждениях работы [12] принадлежность поверхностей S^n классу C^4 требуется только при использовании теоремы 5; в остальном на поверхность можно накладывать менее ограничительные условия регулярности. Это естественно выдвигает задачу снижения требований на регулярность поверхностей S^n в теореме 5. Применение неравенств (1.1)—(1.2) для подобного усиления теоремы 5 не представляется возможным, поскольку правые части этих неравенств содержат вторые производные гауссовой кривизны. К усилению теоремы 5 в смысле требований на регулярность поверхностей S^n приводит усовершенствование методики Хайнца, причем возникают следующие трудности.

1) Необходимо получить подходящее граничное условие для якобиана (1.7).

2) Все конструкции Хайнца ориентированы на «внутренние» оценки, за исключением одной [39, с. 230—240], которая направлена на получение априорных оценок в замкнутой области решений дифференциальных неравенств, обобщающих систему (1.5). Эта конструкция Хайнца обладает теми недостатками,

* Первая оценка такого сорта получена Гильбертом для регулярной поверхности, изометричной куску сферы [9]. Очевидно, что односвязность поверхностей S^n здесь не существенна. С учетом нижеизложенного и работы [10], этот результат без затруднений переносится на регулярные поверхности положительной внешней кривизны в трехмерном римановом пространстве.

что в (1.5) коэффициенты нужно предполагать достаточно малыми и для оценки нормы решений системы (1.5) в пространстве C^1 привлекаются вторые производные граничных значений.

Во втором — четвертом параграфах настоящей статьи излагается принадлежащее автору доказательство теоремы 5 в предположениях, что S^n, $\mathscr{L}^n \in C_\alpha^3$, $0<\alpha<1$. Вспомогательные результаты об оценках решений дифференциальных неравенств в замкнутой области (теоремы 7, 8) и оценки граничных значений якобиана квазиконформного отображения (теорема 9) могут представлять и самостоятельный интерес.

§ 2. УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ 5

2.1. Теорема 5 при указанных сниженных требованиях на регулярность доказывается в следующей, эквивалентной формулировке.

Теорема 6. Пусть $\{S^n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность изометричных односвязных поверхностей положительной гауссовой кривизны $K \geqslant \mathrm{const} > 0$, класса C_α^3, $0<\alpha<1$, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве, $\mathscr{L}^n = \partial S^n$ — край поверхности S^n; $\mathscr{L}^n \in C_\alpha^3$; D — единичный круг в $(u; v)$-плоскости, в котором параметризованы поверхности S^n так, что соответствующие по изометрии точки имеют одинаковые координаты $(u; v)$; $\partial D = \Gamma$; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $S^n \in C_\alpha^3(\overline{D})$.

Если граничные значения коэффициентов вторых квадратичных форм $L^n = b_{11}^n$, $M^n = b_{12}^n$, $N^n = b_{22}^n$ поверхностей S^n ограничены равномерно по n, то коэффициенты b_{ij}^n ограничены равномерно по n в $\overline{D}$:

$$|b_{ij}^n| \leqslant \mathrm{const}, \quad i, j = 1, 2, \quad (u; v) \in \overline{D}.$$

План изложения следующий. Сначала формулируются вспомогательные предложения (теоремы 7—9), после чего доказывается теорема 6. Затем в §§ 3, 4 излагаются доказательства вспомогательных предложений.

Чтобы излишне не загромождать обозначения, там, где это не может вызвать недоразумений, различные величины иногда обозначаются одними и теми же буквами.

2.2. Формулировка вспомогательных предложений.

Теорема 7. Пусть G — единичный круг $|\omega|<1$ комплексной ω-плоскости, $\omega = x+iy$, $i^2=-1$; $\partial G = \mathscr{L}$, $\overline{G} = G \cup \mathscr{L}$. Пусть, далее, комплекснозначная функция

$$z(\omega) = u(x; y) + iv(x; y) \in C^2(G) \cap C_\alpha^1(\overline{G}), \quad 0<\alpha<1,$$

и удовлетворяет следующим условиям

$$|z(\omega)| \leqslant 1; \qquad (2.1)$$

$$|\Delta z| \leqslant a(|z_x|^2+|z_y|^2)+b; \qquad (2.2)$$

$$\iint\limits_G (|z_x|^2+|z_y|^2)\,dxdy \leqslant \lambda_1; \qquad (2.3)$$

$$|\operatorname{grad} z|^2|_{|\omega|=1}=(|z_x|^2+|z_y|^2)|_{|\omega|=1} \leqslant \lambda_2, \qquad (2.4)$$

где a, b, λ_1, λ_2 — положительные константы, Δ — оператор Лапласа. Тогда

$$\|z(\omega)\|_{C^1(\overline{G})} \leqslant \lambda_3, \qquad (2.5)$$

где λ_3 — константа, зависящая только от λ_1, λ_2, a, b.

Замечание. У Хайнца имеется сходная теорема [39, с. 237—238], однако в [39] на a накладывается условие $0<a<1/2$; вместо (2.4) фигурирует условие $\|z\|_{C^2(\mathscr{L})} \leqslant \mathrm{const}$, а условие (2.3) отсутствует. Ослабление требований на a достигается введением условия (2.3), а снижение требований на граничные значения z получается за счет использования леммы 2 (см. ниже § 3).

Теорема 8. Пусть $z(\omega)=u(\omega)+iv(\omega)$ — комплекснозначная функция класса $C^2(G)\cap C_\alpha^1(\overline{G})$, удовлетворяющая условиям (2.1) — (2.4) при $b=0$, а также условиям

$$|\operatorname{grad} z|^2|_{|\omega|=1} \geqslant \lambda_4=\mathrm{const}>0, \qquad (2.6)$$

$$J=u_xv_y-u_yv_x=|z_\omega|^2-|z_{\overline{\omega}}|^2>0, \quad \omega\in\overline{G}. \qquad (2.7)$$

Тогда для $\forall\omega\in\overline{G}$ имеем оценку

$$|\operatorname{grad} z|^2 \geqslant \lambda_5=\lambda_5(a, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4)=\mathrm{const}>0. \qquad (2.8)$$

Теорема 9. Пусть $\omega=\omega_n(z)$, $\omega=x+iy$, $z=u+iv$, $n=1, 2, \ldots$, — последовательность квазиконформных гомеоморфизмов единичного круга $\overline{D}: |z| \leqslant 1$ на единичный круг $\overline{G}: |\omega| \leqslant 1$,

$$\omega_n(0)=0, \quad \omega_n(1)=1, \quad n=1, 2, \ldots, \qquad (2.9)$$

являющихся решениями уравнений Бельтрами

$$\partial_{\bar z}\omega+q_n(z)\,\partial_z\omega=0, \qquad (2.10)$$

где $|q_n(z)| \leqslant \varkappa(n)=\mathrm{const}<1$, вообще говоря, $\sup\limits_n \varkappa(n)=1$.

Пусть, далее,

$$q_n(z)\in W_p^1(\overline{D}), \quad p>2, \quad n=1, 2, \ldots, \qquad (2.11)$$

$$|q_n(z)|\,|_{|z|=1} \leqslant \varkappa_0=\mathrm{const}<1, \qquad (2.12)$$

где константа $\varkappa_0$ от n не зависит.

Тогда якобианы

$$J_n\left(\frac{x;\ y}{u;\ v}\right)$$

отображений $\omega=\omega_n(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$0<\varkappa_1<J_n|_{|z|=1}\leqslant\varkappa_2<\infty, \tag{2.13}$$

где константы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ зависят от $\varkappa_0$, а от n не зависят.

Также имеет место равенство

$$|\partial_z\omega|\,|_{|z|=1}=\varkappa_3=\text{const}, \tag{2.14}$$

где константа $\varkappa_3$, вообще говоря, зависит от n, но

$$0<\varkappa_4\leqslant\varkappa_3\leqslant\varkappa_5<\infty,$$

причем константы $\varkappa_4$ и $\varkappa_5$ от n не зависят.

2.3. **Доказательство теоремы 6.** На поверхности S^n, $n=1, 2, \ldots$, введем сопряженно-изотермическую систему координат $(x^n;\ y^n)$, $x^n=x^n(u;\ v)$, $y^n=y^n(u;\ v)$. В дальнейшем, чтобы не загромождать обозначения, индексы n часто будем опускать.

Функция $\omega(z)=x(u;\ v)+iy(u;\ v)$ гомеоморфно отображает круг $\bar{D}: |z|\leqslant 1$ на круг $\bar{G}: |\omega|\leqslant 1$; без ограничения общности можно считать $\omega(0)=0$, $\omega(1)=1$ [7, гл. 2]. Функция $\omega(z)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\partial_{\bar{z}}\,\omega+q_n(z)\,\partial_z\omega=0, \tag{2.15}$$

где

$$q_n(z)=\frac{b_{22}^n-b_{11}^n-2ib_{12}^n}{b_{11}^n+b_{22}^n+2\sqrt{\Delta}},\qquad \Delta=b_{11}^n b_{22}^n-(b_{12}^n)^2, \tag{2.16}$$

$$|q_n(z)|\leqslant\text{const}<1,\qquad q_n(z)\in C_\alpha^1(\bar{D}), \tag{2.17}$$

b_{ij}^n — коэффициенты второй основной формы поверхности S^n в параметризации $(u;\ v)$ (см. [7, гл. 2, § 6]).

Отметим, что из (2.17) следует $\omega=\omega_n(z)\in C_\alpha^2(\bar{D})$, $J_n\left(\frac{x;\ y}{u;\ v}\right)\neq 0$ в $\bar{D}$, $z=z(\omega)\in C_\alpha^2(\bar{G})$ (см. [18, с. 232—235])

В силу равномерной ограниченности коэффициентов b_{ij}^n на $\Gamma=\partial D$ и (2.16), отображения $\omega=\omega_n(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 9, откуда имеем

$$0<\varkappa_1\leqslant J_n\left(\frac{x;\ y}{u;\ v}\right)\Big|_{|z|=1}\leqslant\varkappa_2<\infty, \tag{2.18}$$

где константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ от n не зависят.

Далее, функции $u=u(x;\ y)$, $v=v(x;\ y)$ осуществляющие отображение обратное $\omega=\omega(z)$, удовлетворяют системе уравнений (1.5), причем для $b_{11}^n=L$, $b_{12}^n=M$, $b_{22}^n=N$ справедливы соотношения (1.6).

Замечание. Далее удобно считать, что $(u; v)$ есть сопряженно-изотермические координаты на одной из поверхностей S^n (например, на S^1). Вообще говоря, при этом $S^n \in C^2_\alpha(\overline{D})$ и $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(u; v) \in C_\alpha(\overline{D})$, однако, регулярность функций $b^n_{ij} = b^n_{ij}(u; v)$ и $K = K(u; v)$ при этом сохранится (так как соответствующая замена координат есть гомеоморфизм уравнения вида (2.15)) и будет класса C^2_α. Для дальнейшего важно сохранение при таком соглашении регулярности перечисленных функций, а снижение регулярности поверхностей S^n и их символов Христоффеля неважно.

Если координаты $(u; v)$ для поверхности S^1 изотермически-сопряженные, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial \ln K}{\partial u} &= -(\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \ln K}{\partial v} &= -(\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22}), \end{aligned} \tag{2.19}$$

см. [7, с. 131] (соотношения (2.19) далее играют существенную роль). Коэффициенты системы (1.5) класса $C_\alpha(\overline{D})$, зависят только от общей метрики поверхностей S^n и вследствие этого равномерно по n ограничены.

Из (2.18) и (1.6) на ∂G имеем равномерную по n ограниченность первых частных производных функций

$$u = u(x; y), \quad v = v(x; y). \tag{2.20}$$

Так как по условию на $\Gamma = \partial D$ коэффициенты b^n_{ij} равномерно по n ограничены, то равномерно по n ограничены интегралы 42, 44]:

$$\iint_{S^n} H^n(u; v)\, dS; \quad \iint_G |\operatorname{grad} z|^2 dx\,dy,$$

где $H^n = H^n(u; v)$ — средняя кривизна поверхности S^n. Отсюда, с учетом (1.5), получаем, что для функций (2.20) выполнены все условия теоремы 7, по которой

$$\| z(\omega) \|_{C^1(\overline{G})} \leqslant \text{const}, \tag{2.21}$$

где const от n не зависит.

Теперь, в силу (1.6), для доказательства теоремы достаточно получить равномерную по n оценку

$$u_x v_y - u_y v_x \geqslant \text{const} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{G}. \tag{2.22}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что все поверхности S^n ориентированы одинаково с S^1 в том смысле, что индуцированные параметризацией $(u; v)$ нормали поверхностей S^1 и S^n, $n = 2, 3, \ldots$, направлены одновременно в сторону выпуклости либо вогнутости поверхностей S^1 и S^n.

Так как дискриминант второй основой формы есть инвариант изгибания, имеет место равномерная по n оценка

$$\Delta = b_{11}^n b_{22}^n - (b_{12}^n)^2 \geqslant \text{const} > 0, \tag{2.23}$$

откуда, равномерно по n,

$$b_{11}^n + b_{22}^n \geqslant \text{const} > 0. \tag{2.24}$$

Из (2.18), (1.6) и (2.24) имеем равномерно по n

$$|\operatorname{grad} z|^2|_{|\omega|=1} \geqslant \text{const} > 0. \tag{2.25}$$

Поскольку дл ягомеоморфизма уравнения Бельтрами круга на круг якобиан не равен нулю [18, с. 232], а на Γ имеет место (2.18), из (1.5) и (2.25) по теореме 8 имеем равномерную по n оценку

$$|\operatorname{grad} z|^2 \geqslant \text{const} > 0, \quad \forall \omega \in \overline{G}. \tag{2.26}$$

Рассмотрим функции

$$f(\omega) = \frac{v_\omega}{u_\omega} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + i(u_x v_y - u_y v_x)}{u_x^2 + u_y^2},$$
$$g(\omega) = \frac{u_\omega}{v_\omega} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + i(u_x v_y - u_y v_x)}{v_x^2 + v_y^2}. \tag{2.27}$$

Наша ближайшая цель — получить оценку снизу для $\operatorname{Im} g$ и $v_x^2 + v_y^2$, откуда будет следовать оценка для якобиана (2.22).

Так как в $\overline{D}$ $b_{11}^n > 0$ и $b_{22}^n > 0$, из (1.6) имеем f, $g \in C_\alpha^2(\overline{G})$.

Перепишем уравнения (1.5) в виде

$$\begin{cases} u_{\omega\overline{\omega}} = A(u; v)\, u_\omega u_{\overline{\omega}} + B(u; v)(u_\omega v_{\overline{\omega}} + u_{\overline{\omega}} v_\omega) + C(u; v)\, v_\omega v_{\overline{\omega}}, \\ v_{\omega\overline{\omega}} = \tilde{A}(u; v)\, u_\omega u_{\overline{\omega}} + \tilde{B}(u; v)(u_\omega v_{\overline{\omega}} + u_{\overline{\omega}} v_\omega) + \tilde{C}(u; v)\, v_\omega v_{\overline{\omega}}, \end{cases} \tag{2.28}$$

где, в силу (2.19),

$$A(u; v) = \Gamma_{22}^1; \quad B(u; v) = \frac{1}{2}(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1);$$
$$C(u, v) = -\Gamma_{22}^1; \quad \tilde{A}(u; v) = -\Gamma_{11}^2; \tag{2.29}$$
$$\tilde{B}(u; v) = \frac{1}{2}(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2); \quad \tilde{C}(u, v) = \Gamma_{11}^2.$$

Из (2.27) и (2.28) имеем

$$f_{\overline{\omega}} = [\tilde{A} u_{\overline{\omega}} + \tilde{B} v_{\overline{\omega}} + \tilde{B} u_{\overline{\omega}} f + \tilde{C} v_{\overline{\omega}} f] -$$
$$- f\,[A u_{\overline{\omega}} + B v_{\overline{\omega}} + B v_{\overline{\omega}} f + C v_{\overline{\omega}} f];$$
$$g_{\overline{\omega}} = [A v_{\overline{\omega}} + B u_{\overline{\omega}} + B v_{\overline{\omega}} g + C u_{\overline{\omega}} g] -$$
$$- g\,[\tilde{A} v_{\overline{\omega}} + \tilde{B} u_{\overline{\omega}} + \tilde{B} v_{\overline{\omega}} g + \tilde{C} u_{\overline{\omega}} g].$$

Отсюда, группируя первые и последние слагаемые в правой части каждого из этих равенств, получим

$$\partial_{\bar\omega} \ln f = \tilde A \frac{u_{\bar\omega} u_\omega}{v_\omega} - C \frac{v_{\bar\omega} v_\omega}{u_\omega} + \Omega_1, \tag{2.30}$$

$$\partial_{\bar\omega} \ln g = A \frac{v_{\bar\omega} v_\omega}{u_\omega} - \tilde C \frac{u_\omega u_{\bar\omega}}{v_\omega} + \Omega_2, \tag{2.31}$$

где, в силу (2.21), функции Ω_1 и Ω_2 равномерно по n ограничены в $\bar G$. Вычитая (2.30) и (2.31), получим

$$-\partial_{\bar\omega} \ln g = \frac{u_{\bar\omega} u_\omega}{v_\omega} [\tilde A + \tilde C] - \frac{v_{\bar\omega} v_\omega}{u_\omega} [A + C] + \Omega_1 - \Omega_2.$$

Из (2.29) $A + C = \tilde A + \tilde C \equiv 0$ и, окончательно

$$\partial_{\bar\omega} g = Q(\omega) g, \tag{2.32}$$

где функция $Q(\omega)$ ограничена в $\bar G$ равномерно по n.

Из (2.27) и (1.6) имеем

$$g(\omega) = -\frac{b_{12}^n}{b_{11}^n} + i \frac{\sqrt{\Delta}}{b_{11}^n}, \tag{2.33}$$

$$b_{\nu j}^n = b_{\nu j}^n (u(x;y);\ v(x;y)),\ \nu,\ j = 1, 2.$$

Поскольку на Γ функции $b_{\nu j}^n$ по условию ограничены, $b_{11}^n > 0$, то из (2.23) имеем на Γ равномерно по n $b_{11}^n \geqslant \mathrm{const} > > 0$. Отсюда и из (2.33) получаем на ∂G равномерную по n оценку

$$|g(\omega)| |_{|\omega|=1} \leqslant \mathrm{const}. \tag{2.34}$$

По принципу максимума для решений уравнения (2.32) (см. [7. с. 164]), имеем равномерную по n оценку

$$|g(\omega)| \leqslant K_1 = \mathrm{const},\ \forall \omega \in \bar G,$$

откуда

$$u_x^2 + u_y^2 \leqslant K_1 (v_x^2 + v_y^2). \tag{2.35}$$

Подставляя (2.35) в (2.26), получим

$$v_x^2 + v_y^2 \geqslant K_2 = \mathrm{const} > 0, \quad \forall \omega \in \bar G, \tag{2.36}$$

где константа K_2 от n не зависит.

Далее, из (2.33) и (2.23) имеем $g \neq 0$, в связи с чем из (2.32) для $1/g$ получаем дифференциальное уравнение

$$\partial_{\bar\omega}(1/g) = -Q(\omega)(1/g). \tag{2.37}$$

Из (2.33) и (2.23) на ∂G получаем равномерную по n оценку

$$|1/g||_{|\omega|=1} \leqslant \text{const}. \tag{2.38}$$

Применяя к уравнению (2.37) принцип максимума, из (2.38) получим [7, с. 164).

$$|1/g| \leqslant K_3 = \text{const}, \quad \forall \omega \in \overline{G}, \tag{2.39}$$

где K_3 от n не зависит.

Из (2.39) и (2.33) имеем

$$\frac{|b_{11}^n|}{\sqrt{\Delta}} \leqslant |1/g| \leqslant K_3, \quad \forall \omega \in \overline{G},$$

откуда

$$|b_{11}^n| \leqslant K_4 = \text{const}, \quad \forall \omega \in \overline{G}, \tag{2.40}$$

где константа K_4 от n не зависит.

Из (2.40) и (2.23) получаем равномерную по n оценку

$$\operatorname{Im} g \geqslant \text{const} > 0,$$

откуда, с учетом (2.36), следует (2.22).

Теорема 6 доказана.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7 И 8

3.1. Доказательство теоремы 7. Отметим, что для всякой константы $\rho: 0 < \rho < 1$ и

$$|\omega| \leqslant 1 - \rho \tag{3.1}$$

имеем

$$|\operatorname{grad} z|^2 \leqslant K_1 = K_1(a, b, \lambda_1, \rho) \tag{3.2}$$

(см. [39, с. 254]). Величину константы ρ уточним ниже.

В силу (2.4) функцию $z = z(\omega)$ можно с сохранением класса C^1 продолжить на круг $|\omega| \leqslant 2$ так, что при этом

$$\iint\limits_{|\omega| \leqslant 2} |\operatorname{grad} z|^2 dx dy \leqslant N = N(\lambda_1, \lambda_2) = \text{const}.$$

Вводя новый аргумент $\omega^* = \omega/2$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\iint\limits_{|\omega^*| \leqslant 1} |\operatorname{grad} z|^2 dx dy \leqslant N_1 = N_1(\lambda_1, \lambda_2).$$

Пусть ω_0 — произвольная точка круга $|\omega^*| \leqslant 1$, причем $|\omega_0| \leqslant r < 1$, где r — произвольное число такое, что $0 < r < 1$. Для любого δ: $0<\delta<(1-r)^2$ имеет место неравенство [39, с. 251—253]:

$$|z(\omega^*)-z(\omega_0)|\leqslant 4\sqrt{\frac{\pi N_1}{\ln 1/\delta}},$$

$$\forall\omega^*: |\omega^*-\omega_0|\leqslant\delta.$$

Таким образом, для $\forall\omega_0$: $|\omega_0|=r<1$ и δ: $0<\delta<(1-r/2)^2$ на множестве точек круга G: $|\omega|\leqslant 1$, удовлетворяющих условию $|\omega-\omega_0|\leqslant\delta$ выполнено неравенство

$$|z(\omega)-z(\omega_0)|\leqslant 4\sqrt{\frac{\pi N_2}{\ln 1/\delta}},$$

где $N_2=N_2(\lambda_1, \lambda_2)=\text{const}$.

Пусть ω_0 — произвольная точка круга G, причем $|\omega_0|=r<1$, r — произвольное число $0<r<1$. Выберем $\delta=\delta(a, \lambda_1, \lambda_2)$ так, чтобы $0<\delta<(1-r/2)$,

$$2a\sqrt{\frac{\pi N_2}{\ln 1/\delta}}<\frac{1}{8} \tag{3.3}$$

(r будем считать зависящим от δ) и рассмотрим вспомогательную функцию

$$Z(\omega)=\frac{z(\omega)-z(\omega_0)}{1/8a+2\sqrt{\frac{\pi N_2}{\ln 1/\delta}}}. \tag{3.4}$$

При $|\omega-\omega_0|\leqslant\delta$ и $|\omega|\leqslant 1$ будем иметь

$$|Z(\omega)|\leqslant 1. \tag{3.5}$$

Далее, в силу (2.2), функция $Z(\omega)$ при $|\omega-\omega_0|\leqslant\delta$ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta Z|\leqslant\left(\frac{1}{8}+2a\sqrt{\frac{\pi N_2}{\ln 1/\delta}}\right)(|Z_x|^2+|Z_y|^2)+8ab\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(|Z_x|^2+|Z_y|^2)+8ab. \tag{3.6}$$

Рассмотрим односвязную подобласть G_δ круга G со следующими свойствами:

$$\partial G_\delta \in C^1_\alpha; \quad \operatorname{diam} G_\delta\leqslant\delta; \tag{3.7}$$

∂G_δ имеет гомеоморфную отрезку часть Γ_δ, лежащую на $\mathscr{L}$; производная конформного отображения $\zeta=\zeta(\omega)$ области G_δ на единичный круг $Q=\{\zeta : |\zeta|<1\}$ удовлетворяет условиям

$$0<K_2(\delta)\leqslant|\zeta_\omega'|\leqslant K_3(\delta)<\infty, \tag{3.8}$$

где K_2, K_3 — константы (о построении такой области см. [13]). В дальнейшем $\delta=\delta(a, \lambda_1, \lambda_2)$ будем считать фиксированным условиями (3.3) и (3.8). Через $\mathscr{L}_\delta$ обозначим некоторую связную, открытую, строго внутреннюю часть дуги Γ_δ. Константу ρ в неравенстве (3.1) выберем так, чтобы круг радиуса ρ, касающийся изнутри дуги $\mathscr{L}_\delta$, целиком принадлежал G_δ. После фиксации δ имеем $\rho=\rho(\delta)$ и $K_1=K_1(a, b, \lambda_1, \lambda_2)$ (см. (3.2)).

Конечным набором областей, конгруэнтных G_δ, можно покрыть кольцо $1-\rho<|\omega|<1$ так, чтобы соответствующие $\mathscr{L}_\delta$ части границ соседних областей пересекались. Будем считать такое покрытие осуществленным и рассмотрим одну из областей G_δ.

Отметим в G_δ точку ω_0 такую, что G_δ лежит в круге $|\omega-\omega_0|<\delta$ (что возможно в силу (3.7)) и введем в G_δ по формуле (3.4) функцию $Z(\omega)$*.

Положим $Y(\omega)=Z(\omega)$ при $\omega\in\Gamma_\delta$ и продолжим $Y(\omega)$ на оставшуюся часть ∂G_δ так, чтобы

$$|Y(\omega)|\leqslant 1;\quad Y(\omega)\in C^1_\alpha(\partial G_\delta);$$
$$\|Y(\omega)\|_{C^1(\partial G_\delta)}\leqslant K_4(a, \lambda_1, \lambda_2)=\text{const};\tag{3.9}$$
$$\|Y(\omega)\|_{C^1_\alpha(\partial G_\delta\setminus\Gamma_\delta)}\leqslant K_5(a, \lambda_1, \lambda_2)=\text{const}.$$

Конструирование такого сорта продолжений несложно и здесь мы его опускаем (см. [13]).

Далее положим $F(\omega)=|Z(\omega)|^2$ при $\omega\in\mathscr{L}_\delta$ и продолжим $F(\omega)$ на ∂G_δ так, чтобы

$$F(\omega)\geqslant|Z(\omega)|^2,\quad \omega\in\partial G_\delta;\quad F(\omega)\geqslant 13,\quad \omega\in\partial G_\delta\setminus\Gamma_\delta;$$
$$F(\omega)\in C^1_\alpha(\partial G_\delta);\quad \|F(\omega)\|_{C^1_\alpha(\partial G_\delta)}\leqslant K_6(a, \lambda_1, \lambda_2)=\text{const};\tag{3.10}$$
$$\|F(\omega)\|_{C^1_\alpha(\partial G_\delta\setminus\mathscr{L}_\delta)}\leqslant K_7(a, \lambda_1, \lambda_2)=\text{const}.$$

Отобразим конформно G_δ на единичный круг $Q:|\zeta|<1$. Этим отображением функции, определенные в G_δ и на ∂G_δ будут превращены в функции, определенные в Q и на ∂Q; за этими новыми функциями сохраним прежние обозначения.

В круге Q, $\zeta=\xi+i\eta$, функции $Z(\zeta)$ будет удовлетворять неравенству

$$|\Delta Z|\leqslant\frac{1}{4}(|Z_\xi|^2+|Z_\eta|^2)+c,\tag{3.11}$$

где $c=c(a, b, \lambda_1)=\text{const}$. Через $\mathscr{L}_0\subset\partial Q$ обозначим образ дуги $\mathscr{L}^\delta$.

Далее нам понадобятся две леммы:

Лемма 1. Пусть

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}+\zeta}{e^{i\varphi}-\zeta}\right)F(e^{i\varphi})\,d\varphi\equiv S\,[F(e^{i\varphi})],\tag{3.12}$$

* Ниже (см. лемму 2), выбор точки ω_0 будет осуществляться более конкретно, что, однако, не повлияет на константы в оценках.

$$Y_*(\zeta)=S\,[Y(e^{i\varphi})],\quad |\zeta|\leqslant 1.$$

Тогда при $e^{i\varphi}\in\mathscr{L}_0$ имеет место неравенство

$$|Z(\zeta)-Y(e^{i\varphi})|\leqslant\frac{3}{2}|Y(\zeta)-Y(e^{i\varphi})|+$$
$$+\frac{1}{4}|F(\zeta)-F(e^{i\varphi})|+c(1-|\zeta|). \qquad (3.13)$$

Доказательство леммы 1*. В силу (3.5) и (3.11) для $|\zeta|\leqslant 1$ имеем

$$\Delta(|Z(\zeta)|^2)=2(|Z_\xi|^2+|Z_\eta|^2)+2\mathrm{Re}(\bar{Z}\cdot\Delta Z)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{3}{2}(|Z_\xi|^2+|Z_\eta|^2)-2c, \qquad (3.14)$$

откуда $|Z_\xi|^2+|Z_\eta|^2\leqslant\frac{2}{3}\Delta(|Z(\zeta)|^2)+\frac{4}{3}c$.

Подставляя это неравенство в (3.11), получим

$$|\Delta Z|\leqslant\frac{1}{6}\Delta(|Z(\zeta)|^2)+\frac{4}{3}c. \qquad (3.15)$$

Пусть W — произвольное фиксированное комплексное число такое, что $|W|=1$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mu(\zeta)=\frac{1}{6}(|Z(\zeta)|^2-F(\zeta))+\mathrm{Re}\,[\overline{W}\cdot(Y(\zeta)-Z(\zeta))]+\frac{c}{3}(|\zeta|^2-1).$$

В силу (3.9), (3.10), (3.12) и свойств интеграла типа Коши [7, с. 38], функция $\mu(\zeta)\in C^2(Q)\cap C^1_\alpha(\overline{Q})$ и, по определению $F(\zeta)$, $Y(\zeta)$ (см. (3.9), (3.10))

$$\mu(\zeta)\leqslant 0,\quad \zeta\in\partial Q. \qquad (3.16)$$

Далее, из (3.12) и (3.15) имеем

$$\Delta\mu=\frac{1}{6}\Delta(|Z(\zeta)|^2)-\mathrm{Re}(\overline{W}\cdot\Delta Z)+\frac{4}{3}c\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{6}\Delta(|Z(\zeta)|^2)-|\Delta Z|+\frac{4}{3}c\geqslant 0, \qquad (3.17)$$

то есть функция $\mu(\zeta)$ субгармонична в Q, откуда с учетом (3.16), получим (см. [36, с. 308])

$$\mu(\zeta)\leqslant 0,\quad \zeta\in\overline{Q}, \qquad (3.18)$$

или

$$\mathrm{Re}\,[\overline{W}(Y(\zeta)-Z(\zeta))]\leqslant\frac{1}{6}(F(\zeta)-|Z(\zeta)|^2)+\frac{c}{3}(1-|\zeta|^2).$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого комплексного числа W такого, что $|W|=1$, отсюда выводим

$$|Y(\zeta)-Z(\zeta)|\leqslant\frac{1}{6}(|Y(\zeta)|^2-|Z(\zeta)|^2)+$$

* С некоторыми изменениями заимствовано у Хайнца [39, с. 230—232].

$$+\frac{1}{6}(F(\zeta)-|Y(\zeta)|^2)+\frac{c}{3}(1-|\zeta|^2). \quad (3.19)$$

Поскольку $|Z|\leqslant 1$, $|Y|\leqslant 1$ и $|\zeta|\leqslant 1$, из (3.19) имеем

$$|Y(\zeta)-Z(\zeta)|\leqslant\frac{1}{3}|Y(\zeta)-Z(\zeta)|+$$

$$+\frac{1}{6}(F(\zeta)-|Y(\zeta)|^2)+\frac{2}{3}c(1-|\zeta|),$$

откуда

$$|Y(\zeta)-Z(\zeta)|\leqslant\frac{1}{4}(F(\zeta)-|Y(\zeta)|^2)+c(1-|\zeta|)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}|F(\zeta)-F(e^{i\varphi})|+\frac{1}{4}||Y(\zeta)|^2-F(e^{i\varphi})|+c(1-|\zeta|). \quad (3.20)$$

Пусть $e^{i\varphi}\in\mathscr{L}_0$, тогда $F(e^{i\varphi})=|Y(e^{i\varphi})|^2$ и из (3.20), добавляя и вычитая в левой части $Y(e^{i\varphi})$, получим (3.13).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Имеют место оценки

$$|\operatorname{grad} F(\zeta)|^2\leqslant K_8(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\text{const}, \quad (3.21)$$

$$|\operatorname{grad} Y(\zeta)|^2\leqslant K_9(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\text{const}, \ \zeta\in\overline{Q}. \quad (3.22)$$

Доказательство леммы 2. В силу (3.9), (3.10) и (3.8) функции $F_\varphi'(e^{i\varphi})$ и $Y_\varphi'(e^{i\varphi})$ ограничены константами, зависящими лишь от a, λ_1, λ_2; следовательно, для доказательства леммы достаточно оценить нормальные производные функций F и Y в точках контура $\mathscr{L}$.

Начнем с оценки нормальной производной функции F в точках дуги $\mathscr{L}_0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mu_1(\zeta)=(|Z(\zeta)|^2-F(\zeta))+c(|\zeta|^2-1).$$

Функция $\mu_1(\zeta)\in C^2(Q)\cap C^1_\alpha(\overline{Q})$ и

$$\mu_1(\zeta)\leqslant 0, \quad \zeta\in\mathscr{L}. \quad (3.23)$$

В силу (3.14) также имеем

$$\Delta\mu_1\geqslant 0, \quad \zeta\in Q,$$

откуда, аналогично (3.19), имеем

$$Z|(\zeta)|^2-F(\zeta)\leqslant c(1-|\zeta|^2),$$

или

$$F(e^{i\varphi})-F(\zeta)\leqslant|Z(e^{i\varphi})|^2-|Z(\zeta)|^2+c(1-|\zeta|^2), \quad e^{i\varphi}\in\mathscr{L}_0. \quad (3.24)$$

Из неравенства (3.24) и из (2.4) получаем оценку сверху для нормальной производной функции F в точках $\mathscr{L}_0$:

$$\frac{dF(e^{i\varphi})}{dn}\leqslant K_{10}(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\text{const}, \quad e^{i\varphi}\in\mathscr{L}_0. \quad (3.25)$$

Далее введем в рассмотрение функцию $F^*=F^*(\zeta)$, которая определяется условиями (в понятном смысле двойственными к (3.10)):

$$F^*(\zeta)\leqslant|Z(\zeta)|^2,\quad \zeta\in\mathscr{L};\quad F^*(\zeta)=|Z(\zeta)|^2,\quad \zeta\in\mathscr{L}_0;$$
$$\|F^*(\zeta)\|_{C^1(\mathscr{L})}\leqslant K_{11}(a,\lambda_1,\lambda_2); \tag{3.26}$$
$$\|F^*(\zeta)\|_{C^1_\alpha(\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_0)}\leqslant K_{12}(a,\lambda_1,\lambda_2);$$
$$F^*(\zeta)=S[F^*(e^{i\varphi})],\quad \zeta\in\overline{Q}.$$

Зафиксируем произвольную точку $e^{i\varphi}\in\mathscr{L}_0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mu_2(\zeta)=(|Z(\zeta)|^2-F^*(\zeta))+c(|\zeta|^2-1)+2(|Z(e^{i\varphi})|^2-|Z(\zeta)|^2).$$

Точку ω_0 в формуле (3.4) выберем принадлежащей ∂G_δ и так, чтобы функция $|Z(\zeta)|^2$ в точке $\zeta=e^{i\varphi}$ достигала наибольшего значения при $\zeta\in\mathscr{L}$. С учетом такого выбора ω_0, в силу (3.26) будем иметь

$$\mu_2(\zeta)\geqslant 0,\ \zeta\in\mathscr{L} \tag{3.27}$$

и

$$\Delta\mu_2(\zeta)=-\Delta(|Z(\zeta)|^2)+4c,\ \zeta\in Q. \tag{3.28}$$

Из (3.28) и (3.14) получаем

$$\Delta\mu_2(\zeta)\leqslant 6c,\ \zeta\in Q. \tag{3.29}$$

Воспользовавшись формулой [39, с. 206]

$$\mu_2(\zeta)=S[\mu_2(e^{i\theta})]-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_Q\ln\left|\frac{1-\bar\zeta t}{t-\zeta}\right|\Delta\mu_2(t)\,dxdy,\quad t=x+iy,$$

из (3.27)—(3.29) получим

$$\mu_2(\zeta)\geqslant-\frac{3c}{\pi}\iint\limits_Q\ln\left|\frac{1-\bar\zeta t}{\zeta-t}\right|dxdy=\frac{3c}{2}(|\zeta|^2-1),$$

то есть

$$|Z(\zeta)|^2-F^*(\zeta)\geqslant 2(|Z(\zeta)|^2-|Z(e^{i\varphi})|^2)+\frac{c}{2}(|\zeta|^2-1),$$

откуда, аналогично (3.25), получим оценку снизу

$$\frac{dF^*(e^{i\varphi})}{dn}\geqslant K_{13}(a,c,\lambda_1,\lambda_2)=\text{const},\quad e^{i\varphi}\in\mathscr{L}_0. \tag{3.30}$$

Отметим, что константа в правой части неравенства (3.30) зависит лишь от значения нормальной производной функции $Z(\zeta)$ в точке $e^{i\varphi}$, а от значения самой этой функции не зависит, откуда можем заключить, что неравенство (3.30) не зависит от выбора точки ω_0, а следовательно, выполнено для произвольной точки $e^{i\varphi}\in\mathscr{L}_0$.

В силу (3.26), (3.10) и свойств интеграла типа Коши [7, с. 39], выполнена оценка

$$\| F(\zeta)-F^*(\zeta)\|_{C^1_\alpha(\overline{Q})} \leqslant K_{14}(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\mathrm{const}. \qquad (3.31)$$

Так как $F(\zeta)=F^*(\zeta)+F(\zeta)-F^*(\zeta)$, из (3.30) и (3.31) получаем оценку снизу

$$\frac{dF(e^{i\varphi})}{dn} \geqslant K_{15}(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\mathrm{const}, \quad e^{i\varphi}\in\mathscr{L}_0. \qquad (3.32)$$

Оценим теперь нормальную производную функции $F(\zeta)$ в точках множества $\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_0$.

Обозначим $F_1(\zeta)$ гармоническую в Q функцию удовлетворяющую следующим условиям:

$$F_1(\zeta)=F(\zeta),\ \zeta\in\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_0; \qquad (3.33)$$

$$F_1(\zeta)\leqslant F(\zeta),\ \zeta\in\mathscr{L}_0; \qquad (3.34)$$

$$\| F_1(\zeta)\|_{C^1_\alpha(\mathscr{L})} \leqslant K_{16}(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\mathrm{const}. \qquad (3.35)$$

По принципу максимума $F_1(\zeta)\leqslant F(\zeta)$, $\zeta\in\overline{Q}$, и

$$F_1(e^{i\varphi})-F_1(\zeta)\geqslant F(e^{i\varphi})-F(\zeta), \quad e^{i\varphi}\in\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_0, \qquad (3.36)$$

а по свойствам интеграла типа Коши из (3.35) имеем

$$\| F_1(\zeta)\|_{C^1_\alpha(\overline{Q})} \leqslant K_{17}(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\mathrm{const}. \qquad (3.37)$$

Из (3.36) и (3.37) получаем оценку сверху

$$\frac{dF(e^{i\varphi})}{dn} \leqslant K_{18}(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\mathrm{const}, \quad e^{i\varphi}\in\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_0. \qquad (3.38)$$

Рассмотрев гармоническую в Q функцию $F_2(\zeta)$, определяемую условиями, аналогичными (3.33) и (3.35), и неравенством $F_2(\zeta)\geqslant F(\zeta)$, $\zeta\in\mathscr{L}_0$, вместо (3.34), аналогично (3.38), получим оценку снизу

$$\frac{dF(e^{i\varphi})}{dn} \geqslant K_{19}(a, c, \lambda_1, \lambda_2)=\mathrm{const}, \quad e^{i\varphi}\in\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_0. \qquad (3.39)$$

Сопоставляя неравенства (3.25), (3.32), (3.38), (3.39), получим оценку (3.21).

Для доказательства (3.22) сначала с помощью (3.18) устанавливается ограниченность нормальной производной функции $\Upsilon(\zeta)$ в точках контура $\mathscr{L}_0$, а затем приемами, аналогичными тем, с помощью которых получены неравенства (3.38)—(3.39), получаем оценку $|d\Upsilon/dn|$ в точках $\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_0$ (эти приемы следует применять отдельно к действительной и мнимой частям функции $\Upsilon(\zeta)$).

Лемма 2 доказана.

Перейдем к окончанию доказательства теоремы 7.

Пусть точка ω^* принадлежит кольцу $1-\rho<|\omega|<1$. Выберем область G_δ такую, чтобы круг с центром в ω^*, касающийся окружности $|\omega|=1$, принадлежал G_δ, а точка касания $\omega=e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$ принадлежала $\mathscr{L}_\delta$ (это возможно в силу выбора числа ρ). Обозначим $1-|\omega^*|=\varepsilon$. Для области G_δ рассмотрим функцию $Z(\omega)$, определенную выше. Известно, что

$$|\operatorname{grad} Z|_{\omega=\omega^*}\leqslant K_{20}\left[1+\frac{\max\limits_{|\omega-\omega^*|\leqslant\varepsilon}|Z(\omega)-Z(\omega^*)|}{\varepsilon}\right], \tag{3.40}$$

где $K_{20}=K_{20}(c)=\mathrm{const}$ [39, с. 228]. Далее

$$|Z(\omega)-Z(\omega^*)|\leqslant|Z(\omega)-Z(e^{i\theta})|+|Z(\omega^*)-Z(e^{i\theta})|.$$

По лемме 1 отсюда имеем

$$|Z(\omega)-Z(\omega^*)|\leqslant\frac{3}{2}[|Y(\omega)-Y(e^{i\theta})|+|Y(\omega^*)-Y(e^{i\theta})|]+$$
$$+\frac{1}{4}[|F(\omega)-F(e^{i\theta})|+|F(\omega^*)-F(e^{i\theta})|]+$$
$$+c[1-|\omega|)+(1-|\omega^*|)], \tag{3.41}$$

где $Y(\omega)=Y(\zeta(\omega))$, $F(\omega)=F(\zeta(\omega))$.

Применяя теорему о среднем к правой части (3.41), с учетом (3.8) и леммы 2, получим оценку

$$|Z(\omega)-Z(\omega^*)|\leqslant K_{21}(a, b, \lambda_1, \lambda_2)\,\varepsilon. \tag{3.42}$$

Сопоставляя (3.40) и (3.42), будем иметь

$$|\operatorname{grad} Z|_{\omega=\omega^*}\leqslant K_{22}(a, b, \lambda_1, \lambda_2),$$

откуда

$$|\operatorname{grad} z|_{\omega=\omega^*}\leqslant K_{23}(a, b, \lambda_1, \lambda_2). \tag{3.43}$$

Из (3.2) и (3.43) окончательно получаем (2.5).

Теорема 7 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 8. По теореме 7 в $\overline{G}$ справедливо неравенство

$$|z_x|^2+|z_y|^2\leqslant K_{24}(a, \lambda_1, \lambda_2). \tag{3.44}$$

Далее, в силу (2.7),

$$|z_\omega|\geqslant\frac{1}{2}(|z_\omega|+|z_{\overline{\omega}}|)\geqslant\frac{1}{4}(|z_x|+|z_y|). \tag{3.45}$$

Из (2.2) (при $b=0$), (3.44) и (3.45) получаем

$$|z_{\omega\overline{\omega}}|\leqslant K_{25}(a, \lambda_1, \lambda_2)\,|z_\omega|. \tag{3.46}$$

Из (2.6) и (3.45) имеем

$$|z_\omega|_{|\omega|=1}\geqslant K_{26}(\lambda_4)=\mathrm{const}>0. \tag{3.47}$$

Поскольку для решений неравенства $|f_{\overline{\omega}}|\leqslant\mathrm{const}\,|f|$ справедлив принцип максимума [4, с. 170], а в силу (2.7) $z_\omega\neq0$,

$\omega \in \overline{G}$, полагая $f=\frac{1}{z_\omega}$, из (3.46) и (3.47) получаем

$$|z_\omega| \geqslant K_{27}(a, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4) = \text{const} > 0.$$

Учитывая неравенство $|z_\omega| \leqslant \frac{1}{2}(|z_x| + |z_y|)$, отсюда выводим (2.8).

Теорема 8 доказана.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9

Замечание. Гомеоморфизмы $\omega_n(z) \in W_p^2(\overline{D}) \subset C_\beta^1(\overline{D})$, $\beta=\frac{p-2}{p}$ (см. [18, с. 232]), поэтому граничные значения якобианов $J_n\left(\frac{x;\, y}{u;\, v}\right)$ определены корректно.

Покажем, что не ограничивая общности, можно считать, что $q_n(0)=0$. Следуя [7, гл. 2, § 4], совершим невырожденное аффинное преобразование z — плоскости $\zeta = z + q_n(0)\bar{z}$. При этом уравнение (2.10) перейдет в уравнение

$$\begin{gathered} \partial_{\bar{\xi}}\omega_n + \rho_n(\zeta)\,\partial_\xi \omega_n = 0, \\ \rho_n(\zeta) = \frac{q_n(z) - q_n(0)}{1 - q_n(z)\overline{q_n(0)}}, \\ |\rho_n(\zeta)| \leqslant \text{const} < 1. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Круг $|z| \leqslant 1$ перейдет в эллипс $Э_n$ с центром в точке $\zeta=0$. Легко убедиться, что для $\rho_n(\zeta)$ выполнены условия, аналогичные (2.11)—(2.12), причем $\rho_n(0)=0$.

Отобразим конформно эллипс $Э_n$ на единичный круг $|\xi| \leqslant 1$ с нормировкой $\xi(0)=0$, $\xi(\zeta(1))=1$. Уравнение (4.1) перейдет в уравнение

$$\partial_{\bar{\xi}}\omega + \tilde{\rho}(\xi)\,\partial_\xi \omega = 0, \tag{4.2}$$

$$\tilde{\rho}(\xi) = \rho(\zeta(\xi)) \frac{\overline{\xi'(\zeta)}}{\xi'(\zeta)}.$$

В силу (4.2) для $\tilde{\rho}$ выполнены условия, аналогичные (2.11)—(2.12) и $\tilde{\rho}(0)=0$. В дальнейшем, чтобы не загромождать запись, вернемся к первоначальным обозначениям.

Итак, будем считать, что $q_n(0)=0$. Продолжим функцию $q_n(z)$ вне круга $|z| \leqslant 1$ по формуле

$$q_n(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 \overline{q_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad |z| > 1, \tag{4.3}$$

и сохраним за продолженной функцией прежнее обозначение. Построим для уравнения Бельтрами (2.10) с продолженным по формуле (4.3) коэффициентом, решение $\omega=\omega_n^1(z)$, гомеоморфно отображающее z-плоскость на ω-плоскость и такое, что

$$\omega_n^1(0)=0; \quad \omega_n^1(1)=1; \quad \left|\omega_n^1\right|\Big|_{|z|=1}=1; \quad \omega_n^1(\infty)=\infty. \tag{4.4}$$

Сначала построим $\omega_n^1(z)$ для $|z|\leqslant 1$. Решение $\omega=\omega_n^1(z)$ уравнения (2.10) будем искать в виде

$$\omega_n^1(z)=ze^{T\varphi}, \tag{4.5}$$

где

$$T\varphi(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\left[\frac{\varphi(t)}{t-z}-\frac{z\overline{\varphi(t)}}{z\bar{t}-1}-\frac{\varphi(t)}{t-1}+\frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}-1}\right]dxdy, \quad t=x+iy; \tag{4.6}$$

и $\varphi\in L_q(\overline{D})$ при некотором $q>2$. Отметим, что

$$\operatorname{Re}T\varphi\,|_{|z|=1}=0; \quad T\varphi(1)=0. \tag{4.7}$$

Подставив (4.5) в (2.10), получим для нахождения $\varphi(z)$ двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(z)+q_n(z)\Pi\varphi=-\frac{q_n(z)}{z}; \quad |z|\leqslant 1, \tag{4.8}$$

где $\Pi f=\frac{\partial}{\partial z}Tf$; $\frac{\partial}{\partial z}$ — производная в смысле С. Л. Соболева. Поскольку $q_n(z)$ можно считать класса $C_\beta(\overline{D})$, $\beta=\frac{p-2}{p}$, [7, с. 57] и $q_n(0)=0$,

$$|q_n(z)|\leqslant \mathrm{const}\,|\,|z|^\beta,$$

в связи с чем

$$\frac{q_n(z)}{z}\in L_s(\overline{D}), \quad \forall s:2<s<p.$$

Норма $q_n\Pi$ как линейного оператора из $L_s(\overline{D})$ в $L_s(\overline{D})$ при некотором $s>2$ будет меньше единицы (см. [5], [7, с. 338] или [18, с. 206—210]). Зафиксировав такое s, по принципу сжатых отображений получим решение $\varphi(z)\in L_s(\overline{D})$ уравнения (4.8) и решение $\omega=\omega_n^1(z)\in W_s^1(\overline{D})$ уравнения (2.10) в круге $\overline{D}$, $\omega_n^1(z)\neq 0$ при $z\neq 0$.

Продолжим функцию $\omega_n^1(z)$ вне круга $\overline{D}$ по формуле

$$\omega_n^1(z)=\frac{1}{\overline{\omega_n^1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}}, \quad |z|>1, \tag{4.9}$$

и сохраним за продолженной функцией прежнее обозначение. В силу (4.5)—(4.7) функция ω_n^1 непрерывна в z — плоскости E и удовлетворяет условиям (4.4). Легко проверить, что вне круга D функция $\omega_n^1(z)$ также задается формулой (4.5). Отсюда, из свойств оператора $T\varphi$ (см. [7, гл. 1, §6]) и формулы (4.3) заключаем, что $\omega_n^1(z)$ — обобщенное в смысле С. Л. Соболева решение уравнения (2.10), непрерывное на E и класса W_s^1 в любой конечной части плоскости E.

Докажем гомеоморфность отображения $\omega=\omega_n^1(z)$ z-плоскости на ω-плоскость. Рассмотрим функцию $W(z)=\omega_n^1(z)-a$, где a — произвольное фиксированное комплексное число. Из формул (4.5), (4.6) видно, что на окружности $|z|=R$ при R, достаточно большом, $|\omega_n^1|$ сколь угодно велик и что $\omega_n^1(z)\neq 0$ при $z\neq 0$. Отсюда, по принципу аргумента для решений уравнения Бельтрами с разрывным коэффициентом [5]

$$\operatorname{ind}_{|z|=R} W(z)=\operatorname{ind}_{|z|=R}\omega_n^1(z)=\operatorname{ind}_{|z|=\frac{1}{R}}\omega_n^1(z)=1, \qquad (4.10)$$

где

$$\operatorname{ind} f(z)=\frac{1}{2\pi}\Delta\arg f(z).$$

Последнее равенство в (4.10) вытекает из гомеоморфности отображения $\omega=\omega_n^1(z)$ в окрестности нуля, следующей из соотношения

$$J_n^1(0)=|\partial_z\omega_n^1|^2-|\partial_{\bar z}\omega_n^1|^2=|e^{T\varphi(0)}|\neq 0.$$

Таким образом, функция $W(z)$ имеет единственный нуль в круге достаточно большого радиуса, откуда следует биективность отображения $\omega=\omega_n^1(z)$. Биективность влечет за собой гомеоморфность [7, гл. 2, §4].

Отметим, что два отображения круга D: $\omega=\omega_n(z)$ и $\omega=\omega_n^1(z)$ отличаются на конформный автоморфизм единичного круга, удовлетворяющий нормировке (2.9) [7, гл. 2, §4], откуда

$$\omega_n(z)\equiv\omega_n^1(z), \quad z\in\bar{D}. \qquad (4.11)$$

Построим теперь несколько иначе гомеоморфное отображение $\omega=\omega_n^2(z)$ z-плоскости на ω-плоскость, удовлетворяющее уравнению (2.10) (с продолженным по формуле (4.3) коэффициентом) и условиям

$$\omega_n^2(0)=0, \quad \omega_n^2(\infty)=\infty \qquad (4.12)$$

(Используемый ниже способ построения гомеоморфизма плоскости применялся В. Н. Монаховым [18, с. 214].) Сравнение отображений $\omega=\omega_n^1(z)$ и $\omega=\omega_n^2(z)$ позволит нам доказать теорему.

Будем искать функцию $\psi(z)\in L_s(\bar{D})$ для некоторого $s>2$ такую, чтобы в D решение уравнения (2.10) $\omega=\omega_n^2(z)$ можно было представить в виде

$$\frac{\partial\omega_n^2}{\partial z}=e^{T\psi}; \quad \frac{\partial\omega_n^2}{\partial\bar z}=q_n(z)\,e^{T\psi}. \qquad (4.13)$$

При $\psi\in L_s(\overline{D})$ функция $T\psi\in W_s^1(\overline{D})$ и для возможности (4.13) необходимо и достаточно выполнение равенств [7, гл. I, § 7]:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}e^{T\psi}=\frac{\partial}{\partial z}(q_n(z)e^{T\psi}), \tag{4.14}$$

или, эквивалентно,

$$\psi(z)-q_n(z)\Pi\psi=\frac{\partial q_n}{\partial z}. \tag{4.15}$$

Из (4.15) как и выше, при подходящем $s>2$ по принципу сжатых отображений получим решение $\psi(z)\in L_s(\overline{D})$ и по формуле

$$\omega_n^2(z)=\int_0^z e^{T\psi}dz+q_n(z)e^{T\psi}d\bar{z} \tag{4.16}$$

получим решение уравнения (2.10) в круге D. В силу (4.14) интеграл в (4.16) не зависит от контура интегрирования. По формуле (4.16) (с учетом (4.3)), $\omega_n^2(z)$ можно непрерывно продолжить на всю плоскость, при этом очевидно будет получено решение уравнения (2.10) на всей плоскости, удовлетворяющее условиям (4.12). Поскольку при $z\to\infty$ $q_n(z)\to 0$, $e^{T\psi}\to\text{const}\neq 0$, из (4.16) имеем $|\omega_n^2(z)|=O(|z|)$ при $z\to\infty$, откуда рассуждениями, аналогичными проделанным для $\omega_n^1(z)$, доказывается гомеоморфность $\omega_n^2(z)$.

Гомеоморфизмы $\omega_n^1(z)$ и $\omega_n^2(z)$ отличаются конформным автоморфизмом ω-плоскости, при котором точки 0 и ∞ неподвижны. Как известно, такой автоморфизм имеет вид

$$\omega_n^2=\alpha\cdot\omega_n^1, \tag{4.17}$$

где α — комплексная постоянная. Из (4.16), считая $|z|=1$, для α имеем оценку

$$1-\varkappa_0\leqslant|\alpha|\leqslant 1+\varkappa_0.$$

Из (4.13), (4.17) и (4.11) имеем

$$\frac{1}{1+\varkappa_0}\leqslant|\partial_z\omega|\big|_{|z|=1}=\text{const}\leqslant\frac{1}{1-\varkappa_0},$$

откуда для якобиана $J_n\left(\frac{x,\,y}{u,\,v}\right)$ получаем

$$\frac{1-\varkappa_0}{1+\varkappa_0}\leqslant J_n\left(\frac{x,\,y}{u,\,v}\right)\bigg|_{|z|=1}=|\partial_z\omega_n|^2(1-|q_n|^2)\leqslant\frac{1}{(1-\varkappa_0)^2}.$$

Теорема 9 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.*, Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой. Мат. сб., 1941, *11*, № 1, 15—61
2. —, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехиздат, 1948, 387 с.

3. *Бернштейн С. Н.*, Собрание сочинений. Т. 3. Дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и геометрия (1903—1947). М.: АН СССР, 1960, 439 с. (РЖМат, 1961, 10А88К)
4. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.*, Уравнения с частными производными. Перев. с англ. М.: Мир, 1966, 351 с. (РЖМат, 1968, 3Б276К). (*Bers L., John F., Schehter M.*, Partial differential equations. New York—London—Sidney, Interscience, 1964, xiv, 343 pp. (РЖМат, 1965, 6Б273К)
5. *Боярский Б. В.*, Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. Мат. сб., 1957, *43*, № 4, 451—503 (РЖМат, 1959, 9125)
6. *Вейль Г.*, Об определении замкнутой выпуклой поверхности ее линейным элементом. Успехи мат. наук, 1948, *3*, вып. 2, 159—190 (*Weyl H.*, Über die Bestimmung einer geschlossen Konvexen Fläche durch ihr Linienelement. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1916, 40—72)
7. *Векуа И. Н.*, Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959, 628 с. (РЖМат, 1962, 2Б172К)
8. *Гейсберг С. П.*, Реализация выпуклой поверхности с краем по данной метрике. Укр. геометр. сб., 1970, вып. 7, 11—18 (РЖМат, 1970, 8А570)
9. *Гильберт Д.*, О поверхностях постоянной гауссовой кривизны. В кн. Гильберт Д., Основания геометрии. М.-Л.: Гостехиздат, 1948, 304—314 (Giornale di Matematiche, 6, 1868)
10. *Дубровин А. А.*, О регулярности изометрического погружения двумерного риманова многообразия в трехмерное риманово пространство. Укр. геометр. сб., 1966, вып. 2, 19—27 (РЖМат, 1967, 12А627)
11. *Климентов С. Б.*, О структуре множества всех изометрических преобразований диффеоморфно йкругу поверхности положительной кривизны. Докл. АН СССР, 1982, *262*, № 1, 19—21 (РЖМат, 1982, 4А707)
12. —, О строении множества решений основных уравнений теории поверхностей. Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, 69—82 (РЖМат, 1983, 1А752)
13. —, Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны. Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, 56—82 (РЖМат, 1986, 6А980)
14. *Кон-Фоссен С. Э.*, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М.: Физматгиз, 1959, 303 с. (РЖМат, 1960, 10919К)
15. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд. 2-е, перераб. М.: Наука, 1973, 576 с. (РЖМат, 1973, 12Б442К)
16. *Леви Г.*, Априорные ограничения для решений уравнений Монжа—Ампера. Успехи мат. наук, 1948, *3*, вып. 2, 191—215 (*Lewy H.*, A priori limitations for solutions of Monge-Ampere equations. I. Trans. Amer. Math. Soc., 1935, *37*, 417—434 II. 1937, *41*, 365)
17. *Леви Г.*, О необращении в нуль якобиана при некоторых взаимнооднозначных отображениях. Успехи мат. наук, 1948, *3*, вып. 2, 216—219 (*Lewy H.* On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 1936, *42*, 689—692)
18. *Монахов В. Н.*, Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977, 424 с. (РЖМат, 1978, 1Б247К)
19. *Николаев И. Г., Шефель С. З.*, Гладкость выпуклых поверхностей на основе дифференциальных свойств квазиконформных отображений. Докл. АН СССР, 1982, *267*, № 2, 296—300 (РЖМат, 1983, 4А836)
20. —, —, Выпуклые поверхности с положительной ограниченной удельной кривизной и априорные оценки для решений уравнений Монжа—Ампера. Сиб. мат. ж., 1985, *26*, № 4, 120—136 (РЖМат, 1985, 12А849)
21. *Ниренберг Л.*, О нелинейных эллиптических дифференциальных уравнениях в частных производных и непрерывности по Гёльдеру. Период. сб. пер. ин. статей», Математика, 1959, *3*, № 3, 9—55 (РЖМат, 1960, 8919) (*Nirenberg L.*, On nonlinear elliptic partial differential equations and

Hölder continuity. Communs Pure and Appl. Math., 1953, *6*, № 1, 103—157 (РЖМат, 1954, 1662)
22. *Погорелов А. В.*, Априорные оценки для производных регулярного решения уравнения в частных производных эллиптического типа. Успехи мат. наук, 1949, *4*, вып. 4, 179—182
23. —, К доказательству Вейля теоремы о существовании замкнутой аналитической выпуклой поверхности, реализующей заданную на сфере аналитическую метрику с положительной кривизной. Успехи мат. наук, 1949, *4*, вып. 4, 183—186
24. —, О выпуклых поверхностях с регулярной метрикой. Докл. АН СССР, 1949, *67*, № 5, 791—794
25. —, О регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой. Докл. АН СССР, 1949, *66*, № 6, 1051—1053
26. —, Внутренние оценки для производных радиуса-вектора точки замкнутой регулярной выпуклой поверхности. Докл. АН СССР, 1949, *66*, № 5, 805—808
27. —, О регулярности выпуклых поверхностей. Успехи мат. наук, 1950, *5*, вып. 3, 188—189
28. —, Регулярность выпуклых поверхностей. Харьков, Зап. Мат. о-ва, 1950, (*4*) *22*, 5—49
29. —, Изгибание выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехиздат, 1951, 183 с.
30. —, Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве. Харьков: Харьковск. ун-т, 1957, 90 с. (РЖМат, 1958, 7159К)
31. —, Некоторые результаты по геометрии в целом. Харьков: Харьковск. ун-т, 1961, 90 с. (РЖМат, 1962, 8А406К)
32. —, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969, 759 с. (РЖМат, 1969, 9А495К)
33. —, Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975, 96 с. (РЖМат, 1975, 9А536К)
34. *Сабитов И. Х.*, Регулярность выпуклых областей с регулярной в классах Гёльдера метрикой. Сиб. мат. ж., 1976, *17*, № 4, 907—915 (РЖМат, 1977, 2А761)
35. —, *Шефель С. З.*, О связях между порядками гладкости поверхности и ее метрики. Сиб. мат. ж., 1976, *17*, № 4, 916—925 (РЖМат, 1977, 2А742)
36. *Шабат Б. В.*, Введение в комплексный анализ. Ч. I. Функции одного переменного. М.: Наука, 1976, 320 с. (РЖМат, 1977, 1Б132)
37. *Cacciоppoli R.*, Ovaloidi di Metricce Assegnata. Pontificia academia scientiarum, Commentationes, 1940, *4*, 1—20
38. *Darboux G.*, Lecons sur la Theorie generale Des Surfaces. Paris, Gauthier-Villars, 1896
39. *Heinz E.*, On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappins. J. analyse math. 1956—57, *5*, 197—272 (РЖМат, 1960, 1704)
40. —, On elliptic Monge-Ampere equations and Weyl's embedding problem. J. analyse math., 1959, *7*, № 1, 1—52 (РЖМат, 1961, 4Б239)
41. —, Über die Differentialungleichung $0<\alpha\leqslant rt-s^2\leqslant\beta<\infty$. Math. Z., 1959, *72*, № 2, 107—126 (РЖМат, 1960, 11623)
42. —, Neue a-priori-Abschätzungen für den Ortsvector einer Fläche positiver Gaußcher Krümmung durch ihr Linienelement. Math. Z., 1960, *74*, № 2, 129—157 (РЖМат, 1961, 10А453)
43. —, On Weyl's embedding problem, J. Math. and Mech., 1962, *11*, № 3, 421—454 (РЖМат, 1963, 3А378)
44. —, A-priori-Abschatzungen für isometrische Einbettungen zweidimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeiten in dreidimenscher Riemannsche Räume. Math. Z., 1967, *100*, № 1, 1—16 (РЖМат, 1968, 2А594)
45. *Lewy H.* On the existance of a closed surface realising a given Riemannian metric. Proc. Nat. Acad. Scient. USA, 1938, *24*, 104—106
46. *Nirenberg L.*, The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. Communs Pure and Appl. Math., 1953, *6*, № 3, 337—394 (РЖМат 1955. 2384)