Ю. Б. Фарфоровская, Оценка нормы $|f(B) - f(A)|$ для самосопряженных операторов A и B,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1976, том 56, 143–162

Ю.Б.Фарфоровская

ОЦЕНКА НОРМЫ $\|f(B)-f(A)\|$ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ A и B

Пусть H - гильбертово пространство, A, B - самосопряженные ограниченные операторы в H, $\|A\|$ - норма оператора A; E_λ^A, E_λ^B - разложения единицы операторов A и B; $[a,b]$ - интервал, содержащий внутри себя спектры обоих операторов. Пусть $x\in H$. Положим

$$\|((E^A-E^B)x,x)\|_{к.р}=\int_{-\infty}^{\infty}|((E_t^A-E_t^B)x,x)|\,dt \qquad (1)$$

$$\|E^A-E^B\|_{к.р}=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|((E^A-E^B)x,x)\|_{к.р.} \qquad (2)$$

Впервые эту норму - норму Канторовича - Рубинштейна для спектральных функций самосопряженных операторов - рассматривал Ф.Кунерт в работе [2], ограничившись, однако, лишь изучением топологических характеристик (вопросов сходимости) соответствующей метрики в пространстве операторов.

Пусть f - вещественная функция на промежутке $[a,b]$ и пусть $f\in Lip\,1$ на этом промежутке, $\|f\|_1$ - константа Липшица функции f. Следующая теорема указывает на связь между метрикой Канторовича - Рубинштейна и функциями от операторов.

<u>Теорема I</u>. $\|E^A-E^B\|_{к.р.}=\sup_{\|f\|_1\leqslant 1}\|f(B)-f(A)\|.$

Этот факт нетрудно вывести из того, что сопряженным к пространству Канторовича - Рубинштейна (см.[I]) является пространство $Lip\,1$. Подробное доказательство теоремы I имеется в [4]. Теорема I может быть использована для оценки приращения $f(B)-f(A)$ через $\|A-B\|$. Целью данной работы и является доказательство неравенства такого типа, установление точности полученных оценок и обсуждение связанных с этим вопросов. Основной результат составляет следующая

<u>Теорема 2</u>.

$$\|E^A-E^B\|_{к.р.}\leqslant c\left(\log\frac{b-a}{\|B-A\|}+2\right)^2\|B-A\|. \qquad (3)$$

Здесь C - абсолютная постоянная; можно считать, что $C=20$. Отметим, что Т. Като (в неопубликованной работе) получил для функции $f(t)=|t|$ несколько лучший результат (без квадрата логарифма). Если же f - более гладкая функция, например, такая, что ее производная принадлежит классу $Lip\,\alpha$ при некотором $\alpha>0$, то как показали М.Ш.Бирман и М.З.Соломяк [6], имеет место оценка

$$|f(B)-f(A)|\leqslant C|B-A|. \tag{4}$$

Однако, следующая теорема показывает, что оценка типа (4) не может быть верна для всех f, $f\in \mathrm{Lip}\,1$.

Теорема 3. Пусть $\dim H=n=2^k$. Тогда

$$\sup_{A\neq B}\frac{\|E^A-E^B\|_{к.р.}}{|A-B|}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\log n}\,.$$

Теоремы 2 и 3 приведены без доказательства в статье [3]. Здесь мы полностью докажем теорему 2, приведем эскиз доказательства теоремы 3 и наметим основные черты доказательства формулируемой ниже теоремы 3′, которая показывает, что оценка типа (4) не может быть верна для всех $f\in\mathrm{Lip}\,1$ даже с константой, зависящей от $[a,b]$.

Теорема 3′. Существуют последовательность операторов A_n и последовательность возмущений C_n такие, что спектры операторов A_n и A_n+C_n содержатся в промежутке $[0,1]$, $|C_n|\to 0$ и

$$\|E^{A_n+C_n}-E^{A_n}\|_{к.р.}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\log\log\frac{1}{|C_n|}}\cdot|C_n|.$$

§ I. Доказательство теоремы 2

Наметим в самых общих чертах план доказательства. Рассмотрим выражение $\int_{-\infty}^{\infty}|((E_t^A-E_t^B)x,x)|\,dt$, $x\in H$. С помощью нижеследующей основной леммы и одного утверждения Дж. фон Неймана удается свести дело к конечномерному случаю, точнее к некоторой квадратичной форме, а затем ее оценить.

Основная лемма. Пусть $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n$ – некоторые числа, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ – две ортонормированные системы векторов в H, $y=\{y_i\}_{i=1}^n$; $z=\{z_i\}_{i=1}^n$ – векторы в арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$, T – самосопряженный ограниченный оператор в H. Тогда

$$F_n(y,z)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n}y_k z_j\frac{(T\varphi_k,\psi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right|\leqslant(\log n+1)(\log n+2)|T|. \tag{*}$$

Подобная квадратичная форма возникает из явного рассмотрения метрики Канторовича – Рубинштейна в n-мерном пространстве. Доказательство неравенства (ж), представляющее наибольшие технические трудности, я приведу в § 2. А сейчас приступим к доказательству теоремы 2.

Пусть $\Delta=[\alpha,\beta]$ – промежуток вещественной оси $\mathbb{R}$. Положим $E^A(\Delta)=E^A_\beta-E^A_\alpha$ и будем рассматривать $(E^A(\Delta)x,x)=(E^Ax,x)(\Delta)$, $x\in H$, как функцию промежутка Δ, $\Delta\subset\mathbb{R}$. Предположим, что основной промежуток $[a,b]$ разбит точками $t_0\leqslant a\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_{n-1}\leqslant b\leqslant t_n$ на промежутки $\Delta_i=[t_{i-1},t_i]$. Длину Δ_i обозначим $|\Delta_i|$. Тогда верны следующие 2 леммы.

Лемма I. Пусть при этом разбиении и при некотором x, $x\in H$ выполняются равенства

$$(E^A(\Delta_i)x,x)=(E^B(\Delta_i)x,x),\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{5}$$

Тогда $\|((E^A-E^B)x,x)\|_{\text{к.р.}}\leqslant \max|\Delta_i|\cdot\|x\|^2$.

Лемма 2. Пусть $\lambda_i=\frac{t_{i-1}+t_i}{2}$ и выполнены соотношения (5). Предположим еще, что для любого промежутка Δ, $\Delta\subset\Delta_i$: $(E^B(\Delta)x,x)=(E^B(\Delta_i)x,x)$, если $\lambda_i\in\Delta$ и, следовательно, $(E^B(\Delta)x,x)=0$, если $\lambda_i\notin\Delta$. Тогда $\|((E^A-E^B)x,x)\|_{\text{к.р.}}\leqslant\frac{1}{2}\max\Delta_i\cdot\|x\|^2$.

Обе эти леммы следуют из определения метрики Канторовича – Рубинштейна, но могут быть доказаны непосредственно. Докажем первую из них, вторая доказывается аналогично. В самом деле из (5) следует $(E^A_{t_i}x,x)=(E^B_{t_i}x,x)$ $i=1,\ldots,n$. Тогда $\|((E^A-E^B)x,x)\|_{\text{к.р.}}=$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|((E^A_t-E^B_t)x,x)|\,dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|((E^A_t-E^A_{t_{i-1}}+E^B_{t_{i-1}}-E^B_t)x,x)|\,dt.$$
Так как при $t\in\Delta_i$ числа $((E^A_t-E^A_{t_{i-1}})x,x)$ и $((E^B_{t_{i-1}}-E^B_t)x,x)$ имеют разные знаки и каждое из них не превосходит по абсолютной величине $(E^A(\Delta_i)x,x)$, то

$$\|((E^A-E^B)x,x)\|_{\text{к.р.}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|\cdot(E^A(\Delta_i)x,x)\leqslant\max|\Delta_i|\cdot\|x\|^2.$$

Лемма 3. Пусть $\varepsilon>0$. Существует покрытие промежутка $[a,b]$ промежутками $\Delta_i=[\nu_{i-1},\nu_i]$, $i=1,\ldots,e$ $\nu_0\leqslant a$, $\nu_e\geqslant b$, такое что $E^A(\Delta_i)$ и $E^B(\Delta_i)$ равны или не равны $\mathbb{O}$ (нулевому оператору) одновременно, причем $|\Delta_i|$ удовлетворяет неравенству

$$\|A-B\|+\varepsilon\leqslant|\Delta_i|\leqslant 3\|A-B\|+3\varepsilon.$$

852 10

Доказательство. Положим $\delta=|A-B|+\varepsilon$ и разобьем $[a,b]$ на m промежутков равной длины δ ; точнее, положим $\Delta_i'=[\nu_{i-1}',\nu_i']_{i=1}^{m}$, $\nu_0'=a$, $\nu_1'=a+\delta,\ldots,\nu_{m-1}'=a+(m-1)\delta<b$, $\nu_m'=a+m\delta'\geq b$. Доказательство леммы состоит из двух частей.

а) Докажем сначала, что промежутки $\{\Delta_i'\}_{i=1}^{m}$ обладают свойством: если $E^B(\Delta_i')\neq 0$, а $E^A(\Delta_i')=0$, то либо $E^A(\Delta_{i-1}')\neq 0$, либо $E^A(\Delta_{i+1}')\neq 0$. В самом деле, предположив противное, получим для некоторого i : $E^B(\Delta_i')\neq 0$, $E^A(\Delta_i')=E^A(\Delta_{i-1}')=E^A(\Delta_{i+1}')=0$ и, следовательно, $E^A([\nu_{i-2}',\nu_{i+1}'])=0$. Таким образом, любой сегмент, содержащийся в интервале (ν_{i-2}',ν_{i+1}') не содержит точек спектра оператора A , а значит не содержит их и сегмент $[\nu_{i-2}'+\frac{\varepsilon}{2},\nu_{i+2}'-\frac{\varepsilon}{2}]$. Длина этого сегмента равна $2\rho_1=3|A-B|+2\varepsilon$, а середина совпадает с серединой промежутка Δ_i' и равна $\lambda_0=\nu_{i-2}'+\frac{\varepsilon}{2}+\rho_1$. Тогда для любого $h\in H$ с $\|h\|=1$ имеем $\|(A-\lambda_0 I)h\|>\rho_1$. Так как $E^B(\Delta_i')\neq 0$, то существует элемент g , $g\in H$, $\|g\|=1$, такой что $\|(B-\lambda_0 I)g\|\leq\frac{\delta}{2}$. (В качестве g можно взять любой нормированный элемент, принадлежащий подпространству $E^B(\Delta_i')H$). Для этого элемента g будем иметь цепочку неравенств

$$|A-B|\geq\|(A-B)g\|=\|(A-\lambda_0 I)g_0-(B-\lambda_0 I)g\|\geq$$

$$\geq\big|\|(A-\lambda_0 I)g\|-\|(B-\lambda_0 I)g\|\big|>\rho_1-\delta=|A-B|+\frac{\varepsilon}{2}$$

и мы пришли к противоречию.

б) Выведем из п.а) утверждение леммы. Будем называть промежуток Δ A - недопустимым, если $E^A(\Delta)=0$ и $E^B(\Delta)\neq 0$, B - недопустимым, если $E^B(\Delta)=0$, $E^A(\Delta)\neq 0$, и - допустимым, если $E^A(\Delta)$ и $E^B(\Delta)$ одновременно равны 0 или нет. Удалим из множества $\{\Delta_i'\}$ те Δ_i' , для которых $E^A(\Delta_i')=E^B(\Delta_i')=0$. Пусть у нас останутся промежутки $\{\Delta_i'\}_{i\in J}$, где $J\subset\{1,\ldots,m\}$. Пусть $q\in J$. Найдем номера s и p такие, что $s+1\leq q\leq s+p$ и $\{s+1,\ldots,s+p\}\subset J$, а s , $s+p+1$ в J не входят. Предположим, что мы сумеем образовать покрытие $[\nu_s',\nu_{s+p}']$ допустимыми промежутками, составленными из объединений промежутков $\{\Delta_k'\}_{k=s+1}^{s+p}$. Тогда, очевидно, мы сумеем образовать покрытие допустимыми промежутками всего множества $\bigcup_{i\in J}\Delta_i'$. Присоединяя к этому покрытию Δ_i' при $i\notin J$ и нумеруя надлежащим образом, мы получим покрытие, удовлетворяющее заключению леммы, если длины промежутков удовлетворяют ему. Таким образом, осталось из $\{\Delta_i'\}_{i=s+1}^{s+p}$ образовать допустимое покрытие сегмента $[\nu_s',\nu_{s+p}']$. Заметим, что если $p=1$, то Δ_{s+1}' допустим, так как если бы Δ'_{s+1} был, например, A -недопустим, то по п.а) либо $E^A(\Delta'_s) \neq \mathbb{O}$, либо $E^A(\Delta'_{s+2}) \neq \mathbb{O}$, что противоречило бы тому, что s, $s+2$ не входят в $\mathfrak{J}$. Если $p>1$, то промежуток $\Delta'_{s+1} \cup \Delta'_{s+2}$ допустим, так как в противном случае Δ'_{s+1} и Δ'_{s+2} были бы либо оба A -недопустимы, либо оба B -недопустимы, что невозможно, так как $E^A(\Delta'_s) = E^B(\Delta'_s) = \mathbb{O}$. Точно также $\Delta'_{s+p-1} \cup \Delta'_{s+p}$ допустим. Кроме того, объединение трех промежутков $\Delta'_{i-1} \cup \Delta'_i \cup \Delta'_{i+1}$ допустимо, если $i-1$, i, $i+1$ входят в $\mathfrak{J}$, так как хотя бы в одном из них $E^A \neq \mathbb{O}$ и хотя бы в одном из них $E^B \neq \mathbb{O}$.

Таким образом, если p кратно трем $(p=3\tau)$, то требуемым покрытием служит: $\Delta''_{s+1} = \Delta'_{s+1} \cup \Delta'_{s+2} \cup \Delta'_{s+3}, \ldots, \Delta''_{s+\tau} = \Delta'_{s+3\tau-2} \cup \Delta'_{s+3\tau-1} \cup \Delta'_{s+3\tau}$. Если $p=3\tau+1$, то $\Delta'_{s+1} \cup \Delta'_{s+2}$ и $\Delta'_{s+p-1} \cup \Delta'_{s+p}$ допустимы, а количество оставшихся промежутков кратно трем и требуемое покрытие выбирается аналогично случаю $p=3\tau$. И, наконец, если $p=3\tau+2$, то $\Delta'_{s+1} \cup \Delta'_{s+2}$ допустим, а количество оставшихся промежутков кратно трем. Так как мы объединяем не более 3-х промежутков, когда образуем покрытие, то длины элементов этого покрытия удовлетворяют заключению леммы.

<u>Следствие</u>. Число n промежутков Δ_i из леммы 3, для которых $E^A(\Delta_i) \neq \mathbb{O}$ и $E^B(\Delta_i) \neq \mathbb{O}$ удовлетворяет неравенству

$$n \leqslant \frac{b-a}{|B-A|}. \tag{6}$$

<u>Замечание I</u>. В приводимых далее оценках вместе с $|\Delta_i|$, разумеется, должно входить и ε. Но ввиду произвольной малости этого ε, оценке сверху можно придать вид $|\Delta_i| \leqslant (3+\varepsilon)|A-B|$. Всюду ниже, где применяется эта оценка правая часть этого неравенства входит линейно и поэтому в окончательной оценке (в доказательстве теоремы 2) можно устремить ε к нулю. Для упрощения записи мы опускаем это ε уже и в промежуточных выкладках.

Следующая лемма принадлежит по существу Дж. фон Нейману [5, стр.320]. Однако мы в явном виде будем пользоваться построениями этой леммы, поэтому приведем ее доказательство.

<u>Лемма 4</u>. Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\ell}$ - покрытие сегмента $[a,b]$. Тогда для любого элемента x, $x \in H$, существуют конечномерный самосопряженный оператор R и подпространство G_n, $G_n \subset H$ размерности n, где n - число интервалов, для которых $E^A(\Delta_i) \neq \mathbb{O}$ такие, что $x \in G_n$, G_n инвариантно относительно $A+R$ и

$$|R| \leq \max_i |\Delta_i|. \quad (7)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{\Delta_{k_p}\}_{p=1}^n$ – множество тех Δ_i, для которых $E^A(\Delta_i) \neq 0$. Положим $g_p = \frac{E^A(\Delta_{k_p})x}{\|E^A(\Delta_{k_p})x\|}$, если $E^A(\Delta_{k_p})x \neq 0$ и g_p – произвольный нормированный элемент, принадлежащий подпространству $E^A(\Delta_{k_p})H$, если $E^A(\Delta_{k_p})x = 0$. Система $\{g_i\}_{i=1}^n$ ортонормальна. Обозначим линейную оболочку $\{g_i\}_{i=1}^n$ через G_n. Подпространство G_n имеет размерность n, и $\{g_i\}_{i=1}^n$ – базис G_n. Очевидно, $x \in G_n$. Пусть P – оператор проектирования на G_n. Положим $R_1 = (P - I)AP$ и $R = R_1 + R_1^*$. R – самосопряженный оператор. Докажем, что оператор $A+R$ перестановочен с P. Имеем $A+R = (I-P)A(I-P) + PAP$ и $R = -PA - AP + 2PAP$, $(A+R)P = P(A+R) = PAP$. Таким образом, подпространство G_n инвариантно относительно $A+R$. Для завершения доказательства остается оценить норму $|R|$. По построению $g_j \in E^A(\Delta_{k_j})H$ и, следовательно, $Ag_j \in E^A(\Delta_{k_j})H$. Пусть λ_j – середина соответстсующего элементу g_j промежутка Δ_{k_j}. Тогда, так как $\|g_j\| = 1$, то для $f_j = Ag_j - \lambda_j g_j$ имеем

$$\|f_j\| = \|Ag_j - \lambda_j g_j\| \leq \frac{|\Delta_{kj}|}{2}. \quad (8)$$

Ясно, что $\{f_j\}$ – ортогональная система и $(f_j, g_i) = 0$ при $j \neq i$. Отсюда $Pf_j = (f_j, g_j)g_j$ и $(Pf_j, Pf_i) = 0$ при $j \neq i$ $R_1 g_j = (P-I)APg_j = (P-I)f_j$. Оценим $|R_1|$. Пусть $u \in H$ и $\|u\| \leq 1$. Тогда $R_1 u = R_1(Pu) = \sum_{i=1}^n (u, g_j) R_1 g_j = \sum_{i=1}^n (u, g_j)(P-I)f_j$. Так как $(P-I)f_j$ ортогонально $(P-I)f_i$ при $i \neq j$, то

$$\|R_1 u\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |(u, g_j)|^2} \max_{1 \leq i \leq n} \|(P-I)f_i\| \leq \max_i \|f_i\|$$

Используя (8), получаем

$$|R| \leq |R_1| + |R_1^*| \leq 2 \max_i \|f_i\| \leq \max_i |\Delta_i|.$$

<u>Замечание 2</u>. Векторы $\{g_j\}_{j=1}^n$ являются собственными векторами оператора $A+R$, так как

$$(A+R)g_j = Ag_j - PAg_j - APg_j + 2PAPg_j = PAg_j = P(\lambda_j g_j + f_j) =$$

$$= [\lambda_j + (f_j, g_j)]g_j = \mu_j g_j.$$

Кроме того, из $\mu_j g_j - \lambda_j g_j - Pf_j = 0$ следует

$$|\mu_j - \lambda_j| \leqslant \|Pf_j\| \leqslant \frac{|\Delta_{kj}|}{2}, \qquad \mu_j \in \Delta_{kj}. \tag{9}$$

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. В дальнейшем полагаем фиксированным x, $x \in H$, $\|x\| \leqslant 1$, и оцениваем $\|((E^A - E^B)x, x)\|_{к.р.}$. Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^{e}$ – покрытие сегмента $[a, b]_n$, существование которого утверждается леммой 3, и пусть $\{\Delta_{k_p}\}_{p=1}^{n}$ – множество тех промежутков, для которых $E^A(\Delta_{k_p}) \neq 0$ и $E^B(\Delta_{k_p}) \neq 0$. Применим лемму 4 к этому покрытию, элементу x и к операторам A и B. Тогда будут построены два оператора R^A и R^B и два подпространства G^A и G^B одной и той же размерности n такие, что $x \in G^A$ и $x \in G^B$, причем G^A (соотв. G^B) инвариантно относительно $A + R^A$ (соотв. $B + R^B$). Далее, имеем $|R^A| \leqslant max|\Delta_j| \leqslant 3|A-B|$ и $|R^B| \leqslant 3|A-B|$, следовательно,

$$|A + R^A - B - R^B| \leqslant 7|A-B|. \tag{10}$$

Обозначим символом A_n сужение оператора $A + R^A$ на G^A. Заметим, что A_n имеет собственные векторы $g_j^A = \varphi_j$ ($\{g_j^A\}_{j=1}^{n}$ построены в лемме 4) с собственными числами μ_j^A, где $\mu_j^A \in \Delta_{k_j}$. Тогда $(E^{A_n}(\Delta_j)x, x) = (E^A(\Delta_j)x, x)$, $j = 1, \ldots, e$. Все это с надлежащими видоизменениями верно и для B_n –сужения $B + R^B$ на G^B. Собственные векторы B_n будем обозначать через $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Так как $x \in G^A$ и $x \in G^B$, то $(E_t^{A+R^A}x, x) = (E_t^{A_n}x, x)$ и $(E_t^{B+R^B}x, x) = (E_t^{B_n}x, x)$ при любых t. Отсюда и из формулы (I) следует, что $\|((E^{A+R^A} - E^A)x, x)\|_{к.р.} = \|((E^{A_n} - E^A)x, x)\|_{к.р.}$. В силу того, что $(E^{A_n}(\Delta_j)x, x) = (E^A(\Delta_j)x, x)$ лемма I дает $\|((E^{A+R^A} - E^A)x, x)\|_{к.р.} \leqslant max|\Delta_j| \leqslant 3|A-B|$ и аналогично $\|((E^{B+R^B} - E^B)x, x)\|_{к.р.} \leqslant 3|A-B|$. Тогда получим

$$\|((E^A - E^B)x, x)\|_{к.р.} \leqslant 6|A-B| + \|((E^{A+R^A} - E^{B+R^B})x, x)\|_{к.р.} \tag{II}$$

Далее построим новый оператор A' следующим образом. Пусть $h \in H$, h^A – проекция h на G^A и h_1 – проекция h на ортогональное дополнение G^A. Справедливо равенство

$$(A+R^A)h = A_n h^A + (A+R^A)h_1 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^A (h^A, \varphi_j)\varphi_j + (A+R^A)h_1.$$

Напомним, что $\mu_j^A \in \Delta_{k_j}$ и λ_j – середина промежутка Δ_{k_j}. Полагаем,

$$A'h=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(h^A,\varphi_j)\varphi_j+(A+R^A)h_1 .$$

Очевидно, что G^A инвариантно относительно A'. Пусть A'_n – сужение оператора A' на G^A. Тогда

$$|A'-A-R^A|\leqslant|A'_n-A_n|\leqslant max|\mu_j^A-\lambda_j|\leqslant\frac{3}{2}|A-B|. \tag{I2}$$

Аналогично построим оператор B'; B'_n – сужение B' на G^B. Используя лемму 2, получим

$$\|((E^{A'}-E^{A+R^A})x,x)\|_{к.р.}\leqslant\frac{3}{2}|A-B|,\ \|((E^{B'}-E^{B+R^B})x,x)\|_{к.р.}\leqslant\frac{3}{2}|A-B| \tag{I3}$$

Суммируем оценки (I0) и (I2):

$$|A'-B'|\leqslant|A+R^A-B-R^B|+|A'-A-R^A|+|B'-B-R^B|\leqslant I0|A-B|. \tag{I4}$$

Из неравенств (II) и (I3) следует

$$\|((E^A-E^B)x,x)\|_{к.р.}\leqslant 9\|A-B\|+\|((E^{A'}-E^{B'})x,x)\|_{к.р.} \tag{I5}$$

Для любых t имеем $(E_t^{A'}x,x)=(E_t^{A_n}x,x)$ и $(E_t^{B'}x,x)=$ $=(E_t^{B_n}x,x)$. Поэтому

$$\|((E^{A'}-E^{B'})x,x)\|_{к.р.}=\int_a^b|((E_t^{A'_n}-E_t^{B'_n})x,x)|\,dt .$$

Собственные векторы оператора A'_n суть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$, а собственные векторы $B'_n-\{\psi_k\}_{k=1}^{n}$, причем соответствующие собственные числа одинаковы и равны $\lambda_1<\lambda_2\ldots<\lambda_n$. Далее, при $\lambda_i\leqslant t<\lambda_{i+1}$ имеем

$$(E_t^{A'_n}x,x)=(E_{\lambda_i}^{A'_n}x,x)=\sum_{k=1}^{i}|(x,\varphi_k)|^2\quad(E_t^{B'_n}x,x)=\sum_{k=1}^{i}|(x,\psi_k)|^2$$

что дает

$$\|((E^{A'}-E^{B'})x,x)\|_{к.р.}=\sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}|((E_t^{A'_n}-E_t^{B'_n})x,x)|\,dt =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)|((E_{\lambda_i}^{A'_n}-E_{\lambda_i}^{B'_n})x,x)|=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\Big|\sum_{k=1}^{n}|(x,\psi_k)|^2-|(x,\varphi_k)|^2\Big|. \tag{I6}$$

Преобразуем последнее выражение, пользуясь ортонормальностью систем $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$. Рассмотрим выражение

$$\sum_{k=1}^{i}(|(x,\varphi_k)|^2-|(x,\psi_k)|^2)=\sum_{k=1}^{i}(x,\varphi_k)(\varphi_k,x)-\sum_{k=1}^{i}(x,\psi_k)(\psi_k,x).$$

Представим x в первой сумме во втором сомножителе в виде $x=\sum_{j=1}^{n}(x,\psi_j)\psi_j$ и во второй сумме в первом сомножителе в виде $x=\sum_{j=1}^{n}(x,\varphi_j)\varphi_j$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{i}\left(|(x,\varphi_k)|^2-|(x,\psi_k)|^2\right)=\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{n}(x,\varphi_k)(\psi_j,x)(\varphi_k,\psi_j)-$$

$$-\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{n}(x,\varphi_j)(\psi_k,x)(\varphi_j,\psi_k)=\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n}(x,\varphi_k)(\psi_j,x)(\varphi_k,\psi_j)- \tag{17}$$

$$-\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n}(x,\varphi_j)(\psi_k,x)(\varphi_j,\psi_k).$$

Далее, векторы φ_i (соотв. ψ_i) являются собственными векторами как оператора A_n' (соотв. B_n') так и собственными векторами A' (соотв. B') с одними и теми же собственными числами λ_i. Рассмотрим разность $B'-A'=T$. Самосопряженный оператор T определен во всем пространстве H. Имеем $A'\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$ и $(A'+T)\psi_j=\lambda_j\psi_j$. Вычитая из первого равенства второе и умножая полученное равенство скалярно на φ_k, получим при $j\neq k$: $(A'(\varphi_j-\psi_j),\varphi_k)-(T\psi_j,\varphi_k)=\lambda_j(\varphi_j-\psi_j,\varphi_k)$ и далее $(T\psi_j,\varphi_k)=(\varphi_j-\psi_j,A'\varphi_k)-\lambda_j(\varphi_j-\psi_j,\varphi_k)=(\lambda_j-\lambda_k)(\psi_j-\varphi_j,\varphi_k)=$ $=(\lambda_j-\lambda_k)(\psi_j,\varphi_k)$. Таким образом

$$(\psi_j,\varphi_k)=\frac{(T\psi_j,\varphi_k)}{\lambda_j-\lambda_k} \quad \text{и} \quad (\varphi_k,\psi_j)=\frac{(T\varphi_k,\psi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}.$$

Тогда, используя (17), получим из (16)

$$\|((E^{A'}-E^{B'})x,x)\|_{\text{к.р.}}\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n}(x,\varphi_k)(\psi_j,x)\frac{(T\varphi_k,\psi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right|+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n}(x,\varphi_j)(\psi_k,x)\frac{(T\varphi_j,\psi_k)}{\lambda_j-\lambda_k}\right|.$$

Дальнейшая оценка основана на неравенстве (ж). Если положить $y=\{y_i\}=\{(x,\varphi_i)\}_{i=1}^{n}$; $z=\{z_i\}=\{(\psi_i,x)\}_{i=1}^{n}$, то $\|y\|\leqslant 1$ и $\|z\|\leqslant 1$, и мы получим, используя (14) и неравенство (ж),

$$\|((E^{A'}-E^{B'})x,x)\|_{\text{к.р.}}\leqslant 2(\log n+1)(\log n+2)|T|\leqslant$$

$$\leqslant 20(\log n+1)(\log n+2)|A-B|.$$

Используя теперь оценку для числа n (следствие к лемме 3) и неравенство (15), получаем

$$\|((E^{A}-E^{B})x,x)\|_{\text{к.р.}}\leqslant 9|A-B|+20(\log n+1)(\log n+2)|A-B|\leqslant$$

$$\leqslant 20\left(\log\frac{b-a}{|A-B|}+2\right)^2|A-B|$$

что и дает искомый результат.

Следствие. Число n из доказательства теоремы 2 не превосходит числа интервалов, для которых $E^A(\Delta_i) \neq 0$. Следовательно, если оператор A конечномерен размерности p, то $n \leqslant p$ и

$$\|E^A - E^B\|_{\kappa.p.} \leqslant 20(\log p + 2)^2 |A-B| .$$

§ 2. Доказательство основной леммы

Лемма 5. Пусть имеются вектор $y = \{y_i\}_{i=1}^n$ в $\mathbb{C}^n$ и две квадратичные формы $G_1(y) = g_1(y_{i_1}, \ldots, y_{i_j})$ и $G_2(y) = g_2(y_{k_1}, \ldots, y_{k_e})$. Предположим, что множества индексов $M = \{i_1, \ldots, i_j\}$ и $N = \{k_1, \ldots, k_e\}$ не пересекаются. Тогда существует такой вектор $z \in \mathbb{C}^n$, что $\|z\| \leqslant \|y\|$ и $|G_1(y)| + |G_2(y)| \leqslant \max(|G_1(z)|, |G_2(z)|)$.

Доказательство. Будем считать, что $G_1(y) \neq 0$ и $G_2(y) \neq 0$, так как в противном случае $y = z$ и доказываемое утверждение очевидно. Пусть $|y_{i_1}|^2 + \ldots + |y_{i_j}|^2 = \gamma^2$ и $|y_{k_1}|^2 + \ldots + |y_{k_e}|^2 = \delta^2$. Тогда $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$ и $\gamma^2 + \delta^2 \leqslant \|y\|^2$. Введем два вектора. Пусть $q = \{q_i\}_{i=1}^n$ таков, что $q_i = y_i$, если $i \in M$ и $q_i = 0$, если $i \notin M$, и $h = \{h_i\}_{i=1}^n$, причем $h_i = y_i$, если $i \in N$ и $h_i = 0$ в противном случае. Тогда $G_1(y) = G_1(q)$, $G_2(y) = G_2(h)$ $\|q\|^2 = \gamma^2$, $\|h\|^2 = \delta^2$. Так как g_1 и g_2 квадратичные формы, то $|G_1(\frac{1}{\gamma} q)| = \frac{1}{\gamma^2}|G_1(q)|$ и $|G_2(\frac{1}{\delta} h)| = \frac{1}{\delta^2}|G_2(h)|$

Предположим, что $|G_1(\frac{1}{\gamma} q)| \geqslant |G_2(\frac{1}{\delta} h)|$. Тогда

$$|G_1(y)| + |G_2(y)| \leqslant \gamma^2 |G_1(\tfrac{1}{\gamma} q)| + \delta^2 |G_2(\tfrac{1}{\delta} h)| + \delta^2 [|G_1(\tfrac{1}{\gamma} q) - |G_2(\tfrac{1}{\delta} h)|] = (\gamma^2 + \delta^2)|G_1(\tfrac{1}{\gamma} q)| = |G_1(\tfrac{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}{\gamma} q)| .$$

Таким образом, можно положить $z = \frac{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}{\gamma} q$, что и приводит к утверждению леммы, так как $\|z\| \leqslant \|y\|$. Аналогично рассматривается случай $|G_1(\frac{1}{\gamma} q)| \leqslant |G_2(\frac{1}{\delta} h)|$.

Лемма 6. Пусть $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $v = \{v_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$. Рассмотрим выражение

$$S(u,v) = \sum_{i=p}^{p+k} \sum_{j=e}^{l_i} u_i v_j (T\varphi_i, \psi_j); \quad 1 \leqslant p \leqslant p+k < l \leqslant l_i \leqslant n; \quad i = p, \ldots, p+k$$

здесь T – оператор в H, $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ – ортонормированные системы. Предположим, что имеют место неравенства $l_p \geqslant l_{p+1} \geqslant \ldots \geqslant l_{p+k}$. Пусть $\tau_s = \tau$ – число строгих неравенств в этой систем е н е р а в е н с т в. Т о г д а

$$|S(u,v)| \leqslant \frac{1}{2}\|T\|\cdot \log[2(\tau+1)]\Big(\sum_{i=p}^{p+k}|u_i|^2+\sum_{j=e}^{\ell_p}|v_j|^2\Big).$$

<u>Доказательство</u>. Пусть вектор y, $y=\{y_i\}_{i=1}^{n}\in\mathbb{C}^n$ таков, что $y_i=u_i$, если $i=p,\dots,p+k$; $y_i=v_i$, если $i=1,\dots,\ell_p$, и $y_i=0$ при остальных i. Тогда

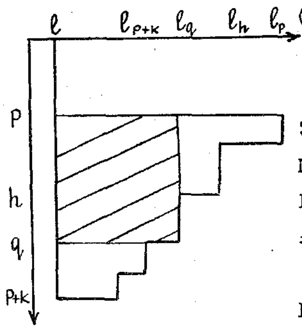
$$S(u,v)=S(y)=\sum_{i=p}^{p+k}\sum_{j=\ell}^{\ell_i} y_i y_j (T\varphi_i,\psi_j).$$

Доказательство будем вести по индукции по числу $\tau_S=\tau$. Если $\tau=0$, то очевидно, что

$$|S(u,v)| \leqslant \|T\|\sqrt{\sum_{i=p}^{p+k}|u_i|^2}\sqrt{\sum_{j=e}^{\ell_p}|v_j|^2} \leqslant \frac{1}{2}\|T\|\Big(\sum_{i=p}^{p+k}|u_i|^2+\sum_{j=e}^{\ell_p}|v_j|^2\Big).$$

Пусть $\tau>0$ и пусть лемма верна для всех $S'(u,v)$, у которых $\tau_{S'}\leqslant\tau-1$ и в этом предположении докажем ее для $S(u,v)=$ $=S(y)$. Найдем такой номер q, что система неравенств $\ell_p\geqslant\ell_{p+1}\geqslant\dots\geqslant\ell_q$ содержит ровно $[\frac{\tau}{2}]$ (целая часть $\frac{\tau}{2}$) строгих неравенств и $\ell_q>\ell_{q+1}$. Тогда система неравенств $\ell_q>\ell_{q+1}\geqslant\dots\geqslant\ell_{p+k}$ содержит $[\frac{\tau}{2}]$ строгих неравенств, если τ – четное число и $[\frac{\tau}{2}]+1$ строгих неравенств, если τ – нечетное число. Далее, пусть h такой номер, что $h<q$, $\ell_h>\ell_q$ и $\ell_i=\ell_q$ для $h<i\leqslant q$. Представим $S(y)$ в виде суммы 3-х слагаемых (см. рисунок):

$$S(y)=\sum_{i=p}^{q}\sum_{j=\ell}^{\ell_q}+\sum_{i=p}^{h}\sum_{j=\ell_q+1}^{\ell_i}+\sum_{i=q+1}^{p+k}\sum_{j=\ell}^{\ell_i} \stackrel{def}{=\!=} S_1(y)+S_2(y)+S_3(y)$$



Область (i,ℓ_i) этого рисунка соответствует $S(y)$. Заштрихованная часть соответствует $S_1(y)$, область вверху справа – $S_2(y)$, внизу слева – $S_3(y)$. На рисунке $\tau_S=4$. Слагаемое $S_1(y)$ удовлетворяет условиям этой леммы при $\tau_{S_1}=0$, $u=v=y$. Следовательно, $|S_1(y)|\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{2}\|T\|\cdot\|y\|^2$.

Рассмотрим $S_2(y)$ и $S_3(y)$. Отвечающие им множества индексов, очевидно, не пересекаются. По лемме 5 найдется такой вектор z, что $\|z\|\leqslant\|y\|$ и $|S_2(y)|+|S_3(y)|\leqslant|S_\nu(z)|$, где $\nu=2$, либо $\nu=3$. Очевидно, кроме того, что $S_2(z)$ и $S_3(z)$ удовлетворяют индукционному предположению этой леммы.

Пусть $\nu=2$. Так как система $\ell_p\geqslant\dots\geqslant\ell_h$ содержит $[\frac{\tau}{2}]-1$ строгих неравенств, то $\tau_{S_2}=[\frac{\tau}{2}]-1$ и

$$|S(y)| \leqslant |S_1(y)| + |S_2(z)| \leqslant \frac{1}{2}|T|\|y\|^2 + \frac{1}{2}|T|\|y\|^2 \log_2[2(\tau_{S_2}+1)] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|T|\cdot\|y\|^2 + \frac{1}{2}|T|\cdot\|y\|^2 \log 2\left[\frac{\tau}{2}\right] \leqslant \frac{1}{2}|T|\|y\|^2 \log_2 4\left[\frac{\tau}{2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\log[2(\tau+1)]|T|\cdot\|y\|^2$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\nu=3$. Если τ - четное число, то, очевидно, имеем ту же оценку, что и при $\nu=2$. Пусть τ - нечетно. Тогда $\tau_{S_3} = \left[\frac{\tau}{2}\right] = \frac{\tau-1}{2}$ и $|S(y)| \leqslant |S_1(y)| + |S_3(z)| \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2|T| + \frac{1}{2}\|y\|^2|T|\log\left(2\frac{\tau-1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\log[2(\tau+1)]|T|\cdot\|y\|^2$$

что и требовалось доказать.

Цель следующей леммы - оценить выражение

$$D \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{\tau}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=s}^{r}\frac{d_{kj}}{\lambda_j-\lambda_k}.$$

Здесь предполагается, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, все d_{kj} вещественны и $1 \leqslant \tau < s \leqslant n$. Обозначим $Y_i^s = \sum_{j=s}^{n}\frac{d_{ij}}{\lambda_j-\lambda_i}$ $1 \leqslant i \leqslant \tau$.

<u>Лемма 7</u>. Если $\sum_{i=1}^{\tau} Y_i^s \geqslant 0$, то существует такой набор чисел $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \ldots \geqslant \ell_\tau \geqslant s$, что $D \leqslant \sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{\ell_i} d_{ij}$.

<u>Доказательство</u>. а) Докажем сначала, что если $\sum_{j=1}^{m} a_j \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$,то существует такой номер k , что $1 \leqslant k-1 \leqslant m$ и при всех t , для которых $1 \leqslant t \leqslant k-1$, будем иметь $\sum_{j=t}^{k-1} a_j \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ и $\sum_{j=k}^{m} a_j < 0$ (>0) , если $k-1<m$. В самом деле, пусть для определенности $\sum_{j=1}^{m} a_j \geqslant 0$. Рассмотрим числа $\sum_{j=i}^{m} a_j$, $i=1,\ldots,m$. Если среди них нет отрицательных, то $k-1=m$. Пусть среди этих чисел есть как отрицательные, так и положительные, например, $\sum_{i=1}^{m} a_j > 0$. Существует $k (\leqslant m)$ такое, что $\sum_{j=k}^{m} a_j < 0$ и $\sum_{j=t}^{m} a_j \geqslant 0$ при $t \leqslant k-1$. Тогда при $1 \leqslant t \leqslant k-1$ получаем

$$\sum_{j=t}^{k-1} a_j = \sum_{j=t}^{m} a_j - \sum_{j=k}^{m} a_j \geqslant 0$$ и п.а) доказан.

В оставшейся части доказательства используем индукцию по числу $\tau=\tau_0$. Обозначение: $Z_j^\tau = \sum_{i=1}^{\tau}\frac{d_{ij}}{\lambda_j-\lambda_i}$; $s \leqslant j \leqslant n$

б) Пусть $\tau=1$. Тогда $D = Y_1^s(\lambda_2-\lambda_1) = \sum_{j=s}^{n}\frac{d_{1j}}{\lambda_j-\lambda_1}(\lambda_2-\lambda_1) = \sum_{j=s}^{n} Z_j^1(\lambda_2-\lambda_1)$. Применим п.а) к числам $Z_j^1 = \frac{d_{1j}}{\lambda_j-\lambda_1}$. Так как по условию $Y_1^s = \sum_{j=s}^{n}\frac{d_{1j}}{\lambda_j-\lambda_1} \geqslant 0$, то найдется такой номер k , что $\sum_{j=t}^{k-1} Z_j^1 \geqslant 0$ при $s \leqslant t \leqslant k-1$ и $\sum_{j=k}^{n} Z_j^1 < 0$, если $k-1 < n$. Считая $s \geqslant 2$, $\lambda_s \geqslant 2$, получаем, что будет неотрицательным следующее выражение

$$\sum_{j=s}^{k-1} Z_j^1 (\lambda_j - \lambda_2) = \sum_{t=s+1}^{k-1} \Big(\sum_{j=t}^{k-1} Z_j^1\Big)(\lambda_t - \lambda_{t-1}) + \sum_{j=s}^{k-1} Z_j^1 (\lambda_s - \lambda_2) \geqslant 0 .$$

Прибавляя последнее выражение к D получим

$$D \leqslant \sum_{j=s}^{n} Z_j^1 (\lambda_2 - \lambda_1) + \sum_{j=s}^{k-1} Z_j^1 (\lambda_j - \lambda_2) = \sum_{j=s}^{k-1} Z_j^1 (\lambda_j - \lambda_1) +$$

$$+ \sum_{j=k}^{n} Z_j^1 (\lambda_2 - \lambda_1) = \sum_{j=s}^{k-1} d_{1j} + (\lambda_2 - \lambda_1) \sum_{j=k}^{n} Z_j^1 .$$

Так как последняя сумма неположительна, то полагая $\ell_1 = k-1$, получаем $D \leqslant \sum_{j=s}^{k-1} d_{1j}$, и нужное неравенство при $\tau = 1$ установлено.

в) Предположим, что лемма верна при всех D^1 , удовлетворяющих условию леммы, и у которых $\tau_{D'} \leqslant \tau - 1$ и будем доказывать при $\tau_D = \tau$. Представим D в виде

$$D = \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{k=1}^{i} Y_k^s (\lambda_{i+1} - \lambda_i) = \sum_{k=1}^{\tau} \sum_{i=k}^{\tau} Y_k^s (\lambda_{i+1} - \lambda_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\tau} Y_k^s (\lambda_{\tau+1} - \lambda_k) = \sum_{i=1}^{\tau} Y_i^s (\lambda_{\tau+1} - \lambda_i) . \qquad (18)$$

Рассмотрим величины $\sum_{j=t}^{n} Z_j^{\tau}$, $s \leqslant t \leqslant n$. По п.а) найдется такой номер k , что $\sum_{j=t}^{k-1} Z_j^{\tau} \geqslant 0$ при $k-1 \geqslant t \geqslant s$ и $\sum_{j=k}^{n} Z_j^{\tau} < 0$ при $k-1 < n$. Отсюда

$$\sum_{j=s}^{k-1} Z_j^{\tau} (\lambda_j - \lambda_{\tau+1}) = \sum_{j=s+1}^{k-1} Z_j^{\tau} (\lambda_j - \lambda_s) + \sum_{j=s}^{k-1} Z_j^{\tau} (\lambda_s - \lambda_{\tau+1}) =$$

$$= \sum_{j=s+1}^{k-1} \sum_{t=s+1}^{j} Z_j^{\tau} (\lambda_t - \lambda_{t-1}) + \sum_{j=s}^{k-1} Z_j^{\tau} (\lambda_s - \lambda_{\tau+1}) = \sum_{t=s+1}^{k-1} \Big(\sum_{j=t}^{k-1} Z_j^{\tau}\Big)(\lambda_t - \lambda_{t-1}) +$$

$$+ \sum_{j=s}^{k-1} Z_j^{\tau} (\lambda_s - \lambda_{\tau+1}) \geqslant 0 .$$

Прибавляя эту величину к D , записанному в виде (18), получим

$$D \leqslant D + \sum_{j=s}^{k-1} Z_j^{\tau} (\lambda_j - \lambda_{\tau+1}) = \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=s}^{n} \frac{d_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i} (\lambda_{\tau+1} - \lambda_i) + \sum_{j=s}^{k-1} \sum_{i=1}^{\tau} \frac{d_{ij} (\lambda_j - \lambda_{\tau+1})}{\lambda_j - \lambda_i} =$$

$$=\sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{k-1} d_{ij} + \sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=k}^{n} d_{ij}\,\frac{(\lambda_{\tau+1}-\lambda_i)}{\lambda_j-\lambda_i} = \sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{k-1} d_{ij} + \sum_{i=1}^{\tau} Y_i^k(\lambda_{\tau+1}-\lambda_i). \quad (19)$$

Заметим, что если $k-1=n$, то последняя сумма отсутствует. В этом случае $\ell_1=\ldots=\ell_\tau=n\geqslant s$ и утверждение леммы, очевидно, выполняется.

Пусть $k-1<n$. Так как $\sum_{i=1}^{\tau} Y_i^k=\sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=k}^{n}\frac{d_{ij}}{\lambda_j-\lambda_i}=\sum_{j=k}^{n} Z_j^{\tau}<0$, то среди величин $\sum_{i=1}^{t} Y_i^k$, $1\leqslant t\leqslant\tau$, есть отрицательные. Тогда снова применяя п.а), найдем такой номер p , что $\sum_{i=p+1}^{t} Y_i^k\leqslant 0$, при $p+1\leqslant t\leqslant\tau$, и $\sum_{i=p}^{p} Y_i^k>0$ при $p>0$. Тогда будет неположительна и величина

$$\sum_{i=p+1}^{\tau} Y_i^k(\lambda_{\tau+1}-\lambda_i)=\sum_{i=p+1}^{\tau}\sum_{t=i}^{\tau} Y_i(\lambda_{t+1}-\lambda_t)=\sum_{t=p+1}^{\tau}\Big(\sum_{i=p+1}^{t} Y_i^k\Big)(\lambda_{t+1}-\lambda_t)\leqslant 0.$$

Вычитая последнее выражение из неравенства (I9), получим

$$D\leqslant\sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{k-1} d_{ij}+\sum_{i=1}^{\tau} Y_i^k(\lambda_{\tau+1}-\lambda_i)-\sum_{i=p+1}^{\tau} Y_i^k(\lambda_{\tau+1}-\lambda_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{k-1} d_{ij}+\sum_{i=1}^{p} Y_i^k(\lambda_{\tau+1}-\lambda_i). \quad (20)$$

В случае, если $p=0$ последняя сумма отсутствует, поэтому в этом случае $\ell_1=\ell_2=\ldots=\ell_\tau=k-1\geqslant s$ и лемма доказана. Пусть $p>0$. Тогда полагаем $D'=\sum_{i=1}^{p} Y_i^k(\lambda_{\tau+1}-\lambda_i)$. Имеем, кроме того, $1\leqslant p<\tau<$ $<k\leqslant n$ и $\sum_{i=1}^{p} Y_i^k\geqslant 0$. Следовательно, D' удовлетворяет условиям доказываемой леммы и индукционному предположению, и поэтому существует такой набор чисел $\ell_1'\geqslant\ell_2\geqslant\ldots\geqslant\ell_p\geqslant k$,что $D'\leqslant\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=k}^{\ell_i} d_{ij}$. Таким образом,получаем, используя (20),

$$D\leqslant\sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{k-1} d_{ij}+D'\leqslant\sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{k-1} d_{ij}+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=k}^{\ell_i} d_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=s}^{\ell_i} d_{ij}+\sum_{i=p+1}^{\tau}\sum_{j=s}^{k-1} d_{ij}.$$

Теперь, положив $\ell_{p+1}=\ldots=\ell_\tau=k-1$, будем иметь $\ell_1\geqslant\ell_2\geqslant$ $\geqslant\ldots\geqslant\ell_p\geqslant k>\ell_{p+1}=\ldots=\ell_\tau=k-1$ и $D\leqslant\sum_{i=1}^{\tau}\sum_{j=s}^{\ell_i} d_{ij}$ что и требовалось доказать.

<u>Доказательство основной леммы</u>. Будем считать сначала, что $n=2^p$, $p\geqslant 1$ и докажем, что $F_n(y,z)\leqslant\frac{p(p+1)}{2}|T|\sum_{k=1}^{n}|v_k|^2$ где $v_k^2=max(|y_k|^2,|z_k|^2)$. Применим индукцию по числу p .

При $p=1$ имеем $F_2(y,z) = (\lambda_2-\lambda_1)\left| y_1 z_2 \frac{(T\psi_1,\varphi_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\right| =$
$=|y_1 z_2 (T\psi_2,\varphi_1)| \leqslant \frac{1}{2}|T|(|y_1|^2+|z_2|^2) \leqslant \frac{1}{2}|T|(v_1^2+v_2^2).$

Пусть $p>1$. Предположим, что наше утверждение верно при $n=2^{p-1}$ и будем доказывать его при $n=2^p$. Имеем

$$F_n(y,z)\leqslant \sum_{i=1}^{n/2}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right| +$$

$$+\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n/2}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right| + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{n/2}\sum_{j=i+1}^{n} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right| +$$

$$+\sum_{i=1}^{n/2-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n/2} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right| + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right| = \tag{21}$$

$$= M(y,z)+M'(y,z)+F^1_{\frac{n}{2}}(y,z)+F^2_{\frac{n}{2}}(y,z),$$

где обозначения естественны. Оценим каждое слагаемое в отдельности. Сумма

$$F^1_{\frac{n}{2}} = \sum_{i=1}^{n/2-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n/2} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right|$$

удовлетворяет индукционному предположению и, следовательно, $F^1_{\frac{n}{2}} \leqslant \frac{(p-1)p}{2}|T|\sum_{k=1}^{n/2} v_k^2$. Далее, положим $i_1=i-\frac{n}{2}$, $k_1=k-\frac{n}{2}$, $j_1=j-\frac{n}{2}$. Тогда $F^2_{\frac{n}{2}}$ преобразуется к виду

$$F^2_{\frac{n}{2}} = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right| =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n/2-1}(\lambda_{i_1+1+n/2}-\lambda_{i_1+\frac{n}{2}})\left|\sum_{k_1=1}^{i_1}\sum_{j_1=i_1+1}^{n/2} y_{k_1+\frac{n}{2}}\, z_{j_1+\frac{n}{2}} \frac{(T\psi_{k_1+\frac{n}{2}},\varphi_{j_1+\frac{n}{2}})}{\lambda_{j_1+\frac{n}{2}}-\lambda_{k_1+\frac{n}{2}}}\right|.$$

Здесь $F^2_{\frac{n}{2}}$ также удовлетворяет индукционному предположению и, следовательно,

$$F_{\frac{n}{2}}(y,z)\leqslant \frac{(p-1)p}{2}|T|\sum_{k_1=1}^{n/2} v^2_{k_1+\frac{n}{2}} = \frac{(p-1)p}{2}|T|\sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} v_k^2 .$$

Таким образом,

$$F^1_{\frac{n}{2}} + F^2_{\frac{n}{2}} \leqslant \frac{(p-1)p}{2}|T|\sum_{k=1}^{n} v_k^2 . \tag{22}$$

Оценим $M(y,z)$:

$$M(y,z)=\sum_{i=1}^{n/2}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n/2}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\left|\sum_{k=1}^{i} Y_k^{\frac{n}{2}+1}(y,z)\right|,$$

где $Y_k^{\frac{n}{2}+1}(y,z)=\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} y_k z_j \frac{(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}$. Выберем вектор $u=\{u_i\}_{i=1}^{n}$ так, чтобы $|u_k|=|y_k|$ при $k=1,2,\dots,n$, и чтобы сумма $Y_k^{\frac{n}{2}+1}$ стала положительной, сохранив при этом свой модуль. Очевидно, что это возможно и при этом $M(y,z)=M(u,z)$. Тогда

$$M(y,z)=M(u,z)=\sum_{i=1}^{n/2}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\sum_{k=1}^{i} Y_k^{\frac{n}{2}+1}(u,z)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n/2}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n}\frac{u_k z_j(T\psi_k,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}.$$

Это выражение вещественно, поэтому, положив $d_{kj}=Re\,[u_k z_j(T\psi_k,\varphi_j)]$, получим

$$M(u,z)=\sum_{k=1}^{n/2}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n}\frac{d_{kj}}{\lambda_j-\lambda_k};$$

при этом сохраняется положительность суммы $\sum_{k=1}^{n/2}\sum_{j=n/2+1}^{n}\frac{d_{kj}}{\lambda_j-\lambda_k}$. Таким образом, сумма $M(u,z)$ удовлетворяет условиям леммы 7. Следовательно, найдется такой набор чисел $\ell_1\geqslant\ell_2\geqslant\dots\geqslant\ell_{\frac{n}{2}}\geqslant\frac{n}{2}+1$, что

$$M(u,z)\leqslant\sum_{k=1}^{n/2}\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{\ell_k} d_{kj}=\sum_{k=1}^{n/2}\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{\ell_k} Re[u_k,z_j(T\psi_k,\varphi_j)]=$$

$$=Re\left[\sum_{k=1}^{n/2}\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{\ell_k} u_k z_j(T\psi_k,\varphi_j)\right]\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n/2}\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{\ell_k} u_k z_j(T\psi_k,\varphi_j)\right|.$$

Теперь последнее выражение удовлетворяет условиям леммы 6. Так как система $\ell_1\geqslant\ell_2\geqslant\dots\geqslant\ell_{\frac{n}{2}}$ содержит не более $\frac{n}{2}-1$ строгих неравенств, то имеем следующую оценку для $M(y,z)$

$$M(y,z)=M(u,z)\leqslant\frac{1}{2}\log n\,\|T\|\Big(\sum_{k=1}^{n/2}|u_k|^2+\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n}|z_k|^2\Big)\leqslant\frac{1}{2}\rho\|T\|\sum_{k=1}^{n} v_k^2. \tag{23}$$

Осталось оценить $M'(y,z)$. Легко проверить, что если положить $i_1=n-i$, $k_1=n+1-j$, $j_1=n-k+1$, $\lambda_{n+1-i_1}=-\mu_{i_1}$ $(i=1,2,\dots,n)$

$$y_{n+1-j_1}=y'_{j_1},\quad z_{n+1-k_1}=z'_{k_1},\quad \psi_{n+1-j_1}=\psi'_{j_1},\quad \varphi_{n+1-k_1}=\varphi'_{k_1},$$

то

$$M'(y,z)=\sum_{i_1=1}^{\frac{n}{2}-1}(\mu_{i_1+1}-\mu_{i_1})\left|\sum_{k_1=1}^{i_1}\sum_{j_1=\frac{n}{2}+1}^{n} y'_{j_1} z'_{k_1}\frac{(T\psi'_{j_1},\varphi'_{k_1})}{\mu_{j_1}-\mu_{k_1}}\right|$$

Таким образом, $M'(y,z)$ с точностью до обозначений имеет тот же вид, что и $M(y,z)$ с той разницей, что в $M'(y,z)$ индекс i_1 принимает $\frac{n}{2}-1$ значений, а в $M(y,z)$ аналогичный индекс i принимает $\frac{n}{2}$ значений. Следовательно,

$$M'(y,z)\leq\frac{1}{2}\rho|T|\sum_{k=1}^{n}v_k^2. \tag{24}$$

Суммируя все оценки, то есть используя формулы (2I), (22), (23) и (24), получим

$$F_n(y,z)\leq\rho|T|\sum_{k=1}^{n}v_k^2+\frac{(\rho-1)\rho}{2}|T|\sum_{k=1}^{n}v_k^2=\frac{\rho(\rho+1)}{2}|T|\sum_{k=1}^{n}v_k^2,$$

что и доказывает возможность индукционного шага $(\rho-1)\to\rho$.

В случае $2^{\rho-1}<n\leq 2^{\rho}$ можно воспользоваться неравенством

$$F_n(y,z)\leq\frac{\rho(\rho+1)}{2}|T|\sum_{k=1}^{n}v_k^2\leq\frac{(\log n+1)(\log n+2)}{2}|T|\sum_{k=1}^{n}v_k^2.$$

Так как $\sum_{k=1}^{n}v_k^2\leq 2$, то $F_n(y,z)\leq(\log n+1)(\log n+2)|T|$.

§ 3. Эскиз доказательства теоремы 3.

Теорема 3 показывает, что оценка типа (4) не может быть верна для всех $f\in \mathrm{Lip}\,1$. Этот факт можно получить из косвенных соображений (как это делается в упомянутой работе Т.Като), но я укажу явную конструкцию операторов A и B, реализующих оценку теоремы 3.

Пусть

$$T_4=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad D_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Если $n=2^k$, то $D_n=D_{2^k}$ – матрица, у которой по побочной диагонали стоят, чередуясь парами, числа +I и –I, а остальные элементы равны нулю. Определим по индукции матрицы $T_{2^k}=T_n$ $(T_n=\{t_{ij}\}_{i,j=1}^{n})$ равенством:

$$T_{2^k}=\begin{pmatrix}T_{2^{k-1}}&D_{2^{k-1}}\\D_{2^{k-1}}&T_2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, T_n – симметричная ортогональная матрица. У матрицы T_n^2 по главной диагонали стоят $\log^2 n$, остальные элементы равны нулю. Следовательно, $|T_n|=\sqrt{\log n}$. Рассмотрим матрицы $M_n=\{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, полагая $m_{ij}=|t_{ij}|$. Так как в каждой строчке матрицы M_n стоит $\log_2 n$ ненулевых элементов (единиц), то ясно, что $|M_n| \geqslant \log_2 n$.

Введем диагональный оператор A_n с собственными числами $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Выберем λ_1 произвольно и определим λ_i по формулам

$$\lambda_i = n^{3(n-1)} - n^{3(n-i)} + \lambda_1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \quad \lambda_n = n^{3(n-1)} + \lambda_1 .$$

Имеют место соотношения

$$\lambda_n - \lambda_i = n^{3(n-i)}; \quad \lambda_{i+1} - \lambda_i = n^{3(n-i)}\left(1 - \frac{1}{n^3}\right). \tag{25}$$

Таким образом, основную часть интервала $[\lambda_i, \lambda_n]$ занимает интервал $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$.

Определим теперь функцию f_n : $f_n(\lambda_1)$ выбираем произвольно, и если $f_n(\lambda_i)$ уже определено, то $f_n(\lambda_{i+1})$ находим из соотношения

$$\frac{f_n(\lambda_{i+1}) - f_n(\lambda_i)}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} = (-1)^{\left[\frac{i+1}{2}\right]+1} .$$

На дополнительные интервалы множества $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ функция f продолжается линейно. Ясно, что $\|f\|_1 = 1$. Повторяя рассуждения работы [7], предшествующие формуле (3) (стр.148-149), получим, что для достаточно малых ε, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_n$, выполняется неравенство

$$|f_n(A_n + \varepsilon T_n) - f_n(A_n)| \geqslant \varepsilon(|F_n| - 1), \tag{26}$$

где $F_n = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $f_{ij} = \dfrac{f_n(\lambda_j) - f_n(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} t_{ij}$, $f_{ii} = 0$.

Заметим, что при фиксированном i и $j > i$ числа t_{ij} имеют одинаковый знак, равный $(-1)^{\left[\frac{i+1}{2}\right]+1}$. Поэтому

$$m_{ij} = (-1)^{\left[\frac{i+1}{2}\right]+1} t_{ij} = \frac{f_n(\lambda_{i+1}) - f_n(\lambda_i)}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} t_{ij} .$$

После этого замечания легко проводится оценка $|f_{ij} - m_{ij}| \leqslant \frac{2}{n^3}$. (При этом используются соотношения (25)). Поэтому $|F_n - M_n| \leqslant \frac{2}{n^3}$, т.е. $|F_n| \geqslant |M_n| - 1$ при $n > 1$. Далее, так как $|M_n| \geqslant \log_2 n$, получаем из (26), что при $n \geqslant 4$ существует число $\varepsilon_n > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_n$

$$|f_n(A_n + \varepsilon T_n) - f_n(A_n)| \geqslant \varepsilon(\log n - 2) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log n} = \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\log n}\,|T_n|. \tag{27}$$

§ 4. Эскиз доказательства теоремы 3′.

Используя явный вид метрики Канторовича – Рубинштейна для n-мерного пространства в случае, когда оператор A имеет различные собственные числа, можно получить

$$\|((E^{A+\varepsilon T}-E^{A})x,x)\|_{к.р.}=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 t_{ii}+$$

$$+2\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\cdot\left|\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n}t_{kj}\frac{x_k\bar{x}_j}{\lambda_j-\lambda_k}\right)\right|+\tau(n,A,T,x,\varepsilon). \qquad (28)$$

Здесь $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n$ – собственные числа оператора A, $x=\{x_i\}_{i=1}^{n}$ – вектор в n-мерном пространстве, причем

$$|\tau(n,A,T,x,\varepsilon)|\leqslant\left[8n^2K+2(\lambda_n-\lambda_1)n^2K^2\right]\varepsilon^2\|T\|^2, \qquad (29)$$

где $K=\max\limits_{j\neq i}\frac{n}{|\lambda_j-\lambda_i|}$.

Используя формулу (28) и, главное, оценку (29), можно получить для $x=\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, что неравенство

$$\|((E^{A_n+\varepsilon_n T_n}-E^{A_n})x,x)\|_{к.р.}\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon_n\sqrt{\log_2 n}\,\|T_n\| \qquad (30)$$

верно при $\varepsilon_n\|T_n\|=\frac{1}{n^{6n}}$, где операторы A_n, B_n те же, что и в теореме 3. Положив затем $A_n'=\frac{1}{n^{3n}}A_n$, $\varepsilon_n'=\frac{1}{n^{3n}}\varepsilon_n=\frac{1}{n^{9n}\|T\|}$ получим из (30)

$$\|((E^{A_n'+\varepsilon_n'T_n}-E^{A_n'})x,x)\|_{к.р.}\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon_n'\sqrt{\log_2 n}\,\|T_n\|.$$

Спектры операторов A_n' содержатся в промежутке $[0,1]$. Используя очевидное неравенство $\sqrt{\log n}\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\log\log n^{9n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\log\log\frac{1}{\varepsilon_n'\|T\|}}$, получим при $n\geqslant 9$

$$\|E^{A_n'+\varepsilon_n'T_n}-E^{A_n'}\|_{к.р.}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon_n'\|T_n\|}\right]^{\frac{1}{2}}\varepsilon_n'\|T_n\|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций.–Вестник ЛГУ, сер.матем., мех.астрон., 1958, № 7 Вып.2,
2. Кунерт Ф. Метрика Канторовича – Рубинштейна и сходимость самосопряженных операторов.–Вестник ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. 1965, № 13 вып.3

852 11

3. Фарфоровская Ю.Б. Оценка близости спектральных разложений самосопряженных операторов в метрике Канторовича – Рубинштейна. – Вестник ЛГУ сер.матем. мех. астрон., 1967, № 19, вып.4. 155-156.
4. Фарфоровская Ю.Б. О связи метрики Канторовича – Рубинштейна для спектральных разложений самосопряженных операторов с функциями от операторов. – Вестник ЛГУ, сер.матем., мех.,астрон., 1968, № 19, вып.4, 94-97.
5. Ахиезер Н.И. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., "Наука", 1966, 543 с.
6. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Двойные операторные интегралы Стилтьеса. – В кн.: Проблемы математической физики, Л., Изд.ЛГУ, 1966, Вып.1,
7. Фарфоровская Ю.Б. Пример липшицевой функции от самосопряженных операторов дающей неядерное приращение при ядерном возмущении.–Записки научн.семинаров ЛОМИ, Л., 1973, т.30, 146-153.

Yu.B.Farforovskaja. An estimate of the norm $|f(B)-f(A)|$ for selfadjoint operators A and B.

Summary

Let A and B be selfadjoint operators in a Hilbert space $\mathcal{A}$, f a lipschitzian function of a real variable, $\|f_1\|$ its Lipschitz constant. If the interval $[a,b]$ contains the spectra of A and B, then

$$|f(B)-f(A)| \leqslant c\|f\|_1\left(\log\frac{b-a}{|A-B|}+2\right)^2 |A-B|,$$

where $|\cdot|$ denotes the operator norm. Examples are given showing the preciseness of the above inequality.