ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

НОЯБРЬ 1981 г., ТОМ XVII, № 11

УДК 517.968

В. Д. ДИДЕНКО, Н. Я. ТИХОНЕНКО

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

Пусть Γ — единичная окружность с центром в начале координат. Через D^+ (D^-) обозначаем область плоскости комплексного переменного z, лежащую внутри (вне) Γ.

Кроме того, всюду в дальнейшем через $H^{(r)}_{\alpha,m}$ $(H^{(r)}_{\alpha,\, m\times m})$, $0<\alpha<1$, r — целое неотрицательное число, обозначаем множество m-мерных векторов (квадратных матриц порядка m), r-тые производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α: $H^{(0)}_{\alpha,m}=H_{\alpha,m}$, $H^{(0)}_{\alpha,m\times m}=H_{\alpha,m\times m}$.

Аналогично $L_{p,m}$ $(L_{p,m\times m})$ — множество m-мерных векторов (квадратных матриц порядка m) с элементами из пространства функций, суммируемых в степени p на Γ.

Тогда через $H^+_{\alpha,m}$ $(H^-_{\alpha,m})$ и $L^+_{p,m}$ $(L^-_{p,m})$ обозначаем подпространства соответственно $H_{\alpha,m}$ и $L_{p,m}$, состоящие из функций, аналитических в D^+ (D^-) и исчезающих на бесконечности.

Задача заключается в отыскании кусочно-голоморфного вектор-столбца $\varphi(z)$, удовлетворяющего на Γ граничному условию

$$\varphi^+(t)-G(t)\,\varphi^-(t)=g(t),\ t\in\Gamma, \tag{1}$$

где $G(t)$ — неособенная на Γ квадратная матрица-функция порядка m, $g(t)$ — известный m-мерный вектор, а $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ — неизвестные граничные значения вектора $\varphi(z)$ соответственно из D^+ и D^- *. Как известно, решение задачи (1) может быть построено при помощи левой факторизации матрицы $G(t)$ [1], т. е. представления ее в виде

$$G(t)=G_+(t)\,\Lambda(t)\,G_-(t),\ t\in\Gamma, \tag{2}$$

где $G_\pm(t)$ — матрицы, аналитические в $D^\pm$ и невырожденные в областях $D^\pm\cup\Gamma$ соответственно, а $\Lambda(t)=(t^{\varkappa_j}\delta_{jk})^m_{j,k=1}$. Числа $\varkappa_j$, $j=\overline{1,\ m}$, однозначно определяются по матрице $G(t)$ и называются ее левыми частными индексами. Если в (2) $G_+(t)$ и $G_-(t)$ поменять местами, то полученное разложение называется правой факторизацией матрицы $G(t)$, а $\varkappa_j$ соответственно ее правыми частными индексами. Для удобства в дальнейшем под правой факторизацией матрицы $G(t)$ понимается ее представление в виде

$$G(t)=G_-^{-1}(t)\,\Lambda(t)\,G_+(t),\ t\in\Gamma. \tag{3}$$

В связи с тем что точная факторизация матрицы крайне затруднительна, возникает вопрос о приближенном решении задачи (1). В настоящее время известен достаточно широкий круг работ, посвященных этой проблеме. Так, например, в [2] методом простой итерации строится последовательность приближенных решений однородной задачи (1), сходящаяся к некоторой фундаментальной матрице задачи по норме пространства $H_{\beta,m\times m}$. Следуя [2], в [3] находится приближенное решение задачи (1), поставленной для обобщенных аналитических функций, сходящееся к точному в среднем с показателем p, $1<p<\infty$. Однако практическое применение этого метода вызывает определенные затруднения, поскольку на каждом этапе требует вычисления различных сингулярных интегралов. В этом отношении более удобными оказываются прямые методы решения задачи (1), т. е. методы, приводящие к решению конечных систем алгебраических уравнений.

Сходимость методов такого типа для характеристической системы сингулярных интегральных уравнений, которая может быть сведена к задаче (1), изучается в [4, 5], при этом существенно используется условие равенства нулю правых и левых частных индексов некоторой матрицы. Отметим также работы [6—9], где опять же в

* Условия на гладкость $G(t)$ и $g(t)$ укажем ниже.

случае нулевых левых и правых частных индексов обосновывается сходимость различных прямых методов решения систем сингулярных интегральных уравнений, частным случаем которых является характеристическая система сингулярных интегральных уравнений.

В настоящей заметке для задачи (1) обоснована сходимость коллокационного метода в пространствах $H_{\beta,m}$, $0<\beta<\alpha$, и $L_{p,m}$, причем не предполагается, что правая и левая системы частных индексов состоят только из нулевых элементов.

Введем несколько предложений, используемых в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть матрица $G(t)$ удовлетворяет на Γ условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha<1$, и пусть ее левые частные индексы неотрицательны. Тогда для любого β, $0<\beta\leqslant\alpha$, оператор $K=(I, -G)$, соответствующий краевой задаче (1), $K{:}X_\beta=(H^+_{\beta,m}, H^-_{\beta,m})\to H_{\beta,m}$ обратим справа.*

Лемма 2. *Пусть матрица $G(t)$ непрерывна на Γ и ее левые частные индексы неотрицательны. Тогда для любого p, $1<p<\infty$, оператор $K: X_p=(L^+_{p,m}, L^-_{p,m})\to L_{p,m}$, определенный выше, обратим справа.*

Доказательство последних двух утверждений непосредственно следует из общей теории задачи (1) с гёльдеровскими и непрерывными коэффициентами [1, 10].

Через $P=P_n$ обозначим оператор проектирования функций $\varphi(t)$ на подпространство интерполяционных полиномов $\tilde{Y}$

$$(P_n\varphi)(t)=\sum_{k=-n}^{n}a_kt^k,\quad a_k=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}\varphi(t_j)\,t_j^{-k},\tag{4}$$

по узлам

$$t_j=\exp(is_j),\quad s_j=\frac{2\pi}{2n+1}j,\quad j=\overline{-n,n}.\tag{5}$$

Приближенное решение ищем в конечномерном пространстве $\tilde{X}_{2mn+m}$ многочленов в форме пары $\varphi_n(t)=\{\varphi_n^+(t), \varphi_n^-(t)\}$, где компоненты $\varphi^+_{nk}(t)$ и $\varphi^-_{nk}(t)$ векторов $\varphi_n^+(t)$ и $\varphi_n^-(t)$ имеют вид

$$\varphi^+_{nk}(t)=\sum_{s=0}^{n}a_{ks}t^s,\quad \varphi^-_{nk}(t)=\sum_{s=-n}^{-1}a_{ks}t^s,\quad k=\overline{1,m}.\tag{6}$$

Подставляя $\varphi_n(t)=\{\varphi_n^+(t), \varphi_n^-(t)\}$ в (1) и проектируя правую и левую части найденного выражения на подпространство $\tilde{Y}$, учитывая при этом соотношения $(P_n\varphi)(t_j)=\varphi(t_j)$, $j=\overline{-n, n}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_{ks}

$$\sum_{s=0}^{n}a_{ks}t_j^s-\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=-n}^{-1}a_{rs}G_{kr}(t_j)\,t_j^s=g_k(t_j),\quad j=\overline{-n,n},\quad k=\overline{1,m},\tag{7}$$

где $G_{kr}(t)$ — элементы матрицы $G(t)$, а $g_k(t)$ — компоненты вектора $g(t)$.

Теорема 1. *Пусть r-тые производные вектора $g(t)$ и неособенной на Γ матрицы $G(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha<1$, и правые и левые частные индексы матрицы $G(t)$ неотрицательны. Тогда при достаточно больших n система линейных алгебраических уравнений (7) однозначно разрешима и приближенные решения $\varphi_n(t)=\{\varphi_n^+(t), \varphi_n^-(t)\}$ сходятся в пространстве $H_{\beta,m}$, $0<\beta<1$, $\beta<r+\alpha$, к точному решению задачи Римана со скоростью* *

$$\|\varphi_n(t)-\varphi(t)\|_{H_{\beta,m}}\leqslant\mu_1n^{\beta-\alpha-r}\ln n.\tag{8}$$

Доказательство. Поскольку $G(t)\in H^{(r)}_{\alpha,m\times m}$, то $G_+(t)$ и $G_-(t)$ в (3) также принадлежат $H^{(r)}_{\alpha,m\times m}$ [11]. Так как определитель матрицы $G(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке Γ, то уравнения (1) и (7) сводятся к эквивалентным

* Всюду в дальнейшем через μ_i, $i=1, 2, \ldots$, обозначаются вполне определенные постоянные, не зависящие от n.

$$G_-(t)\,\varphi^+(t) - \Lambda(t)\,G_+(t)\,\varphi^-(t) = G_-(t)\,g(t), \tag{9}$$

$$G_-(t_j)\,\varphi_n^+(t_j) - \Lambda(t_j)\,G_+(t_j)\,\varphi_n^-(t_j) = G_-(t_j)\,g(t_j), j = \overline{-n, n}, \tag{10}$$

которые можно рассматривать как функциональные уравнения

$$K\varphi \equiv G_-\varphi^+ - \Lambda G_+\varphi^- = y,\ y(t) = G_-(t)\,g(t), \tag{11}$$

$$\tilde{K}_n\varphi_n \equiv P_nK\varphi_n = P_nG_-\varphi_n^+ - P_n\Lambda G_+\varphi_n^- = P_ny. \tag{12}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует оператор K_n такой, что*

$$1)\ \|K - K_n\|_{X_\beta \to H_{\beta,m}} \leqslant \mu_2 n^{\beta-\alpha-r},\ 0 < \beta < \alpha + r, \tag{13}$$

$$2)\ \forall\varphi_n \in \tilde{X}_{2mn+m},\ P_nK_n\varphi_n \equiv K_n\varphi_n. \tag{14}$$

Действительно, в качестве оператора, обладающего указанными свойствами, может быть взят оператор

$$K_n\varphi \equiv (G_n^- + \Theta_n^-)\,\varphi^+ - (\Lambda G_n^+ + \Theta_n^+)\,\varphi^-, \tag{15}$$

где $G_n^-(t)$ и $G_n^+(t)$ — матрицы многочленов наилучшего равномерного приближения матриц $G_-(t)$ и $G_+(t)$ степени не выше n и $n - \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} \varkappa_j$ соответственно; $\varkappa_j$ — правые частные индексы матрицы $G(t)$, а $\Theta_n^\pm$ — последовательности числовых матриц такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Theta_n^\pm\| = 0$ и для любого $n = 1, 2, \ldots$ определители коэффициентов в $G_n^- + \Theta_n^-$ и $\Lambda G_n^+ + \Theta_n^+$ при t в нулевой степени отличны от нуля.

Из (14) легко получить оценку

$$\|K_n - \hat{K}_n\|_{\tilde{X}_{2mn+m} \to \hat{Y}} \leqslant \mu_3 n^{\beta-\alpha-r} \ln n. \tag{16}$$

Таким образом, оператор K_n удовлетворяет всем условиям теоремы 3 из [12]. Поэтому при достаточно больших n оператор K_n так же, как и оператор K, обратим справа. Учитывая теперь, что он действует из одного конечномерного пространства в другое, размерности которых совпадают, заключаем, что он просто обратим. Отсюда и из (16) следует, что при достаточно больших n обратим и оператор $\tilde{K}_n$. Поэтому система (7) также оказывается разрешимой при достаточно больших n. Для оценки скорости сходимости последовательности приближенных решений к точному решению следует воспользоваться неравенством (26) из [12].

Теорема 2. *Пусть матрица $G(t)$ такова, что $G_+(t)$ и $G_-(t)$ как в (2), так и в (3) непрерывны. Если, кроме того, правые и левые частные индексы $G(t)$ неотрицательны и вектор $g(t)$ непрерывен на Γ, то система линейных уравнений (7) при достаточно больших n имеет единственное решение, и приближенные решения задачи (1), построенные по формулам (6), сходятся к ее точному решению в смысле*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\|_{L_{p,m}} = 0,\ 1 < p < \infty.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично предыдущему. При этом учитывается, что если матрицы $G_+(t)$ и $G_-(t)$ в (3) непрерывны, то существует оператор K_n такой, что

$$\|K - K_n\|_{X_p \to L_{p,m}} \leqslant \varepsilon_1,\ \|\tilde{K}_n - K_n\|_{\tilde{X}_{2mn+m}} \leqslant \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Следствие 1. *Если каждый элемент матрицы $G(t)$ представим в виде свертки двух функций из L_2, то имеет место теорема 2.*

Действительно, в этом случае матрица $G(t)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. Как известно, для таких матриц $G_+(t)$ и $G_-(t)$ также разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Следовательно, они непрерывны. Дальнейшее следует из теоремы 2.

Отметим, что если правые и левые частные индексы матрицы $G(t)$ неотрицательны и все равны между собой, то за счет выбора пространства X задачу можно рассматривать как задачу с обратимым оператором.

Замечание 1. Полученные результаты могут быть использованы для приближенного решения некоторых многоэлементных задач в частности для задачи Маркушевича, которая, как известно [13], сводится к матричной задаче Римана.

Литература

1. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений.— М.: Наука, 1970.
2. Манджавидзе Г. Ф.— В сб.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.
3. Lubowicz H., Wieprzkowicz B. Demonst. math., 1977, vol. 10, N 1.
4. Золотаревский В. А.— Мат. исслед., 1974, т. 9, № 1.
5. Золотаревский В. А.— Мат. исслед., 1974, т. 9, № 2.
6. Золотаревский В. А.— Мат. исслед., 1974, т. 9, № 3.
7. Пресдорф З., Зильберман Б.— Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3.
8. Кадушин В. П.— Изв. вузов. Математика, 1976, № 6.
9. Кадушин В. П.— Изв. вузов. Математика, 1976, № 11.
10. Симоненко И. Б.— Изв. вузов. Математика, 1961, № 1.
11. Будяну М. С., Гохберг И. Ц.— Мат. исслед., 1968, т. 3, № 3.
12. Габдулхаев Б. Г.— Изв. вузов. Математика, 1971, № 6.
13. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М.: Наука, 1977.

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

Поступила в редакцию 23 апреля 1979 г.