УДК 514.765

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ

О. В. Мантуров

§ 1. Некоторые исторические замечания

1. Теория инвариантов в математике XIX века занимала весьма важное и почетное место. Ее изучали в связи с задачами из теории чисел, с чисто алгебраической и геометрической точек зрения Гаусс, Сильвестр, Эрмит, Кэли, Клейн, Гордан, Гильберт.

Линейная группа G, действующая в линейном пространстве L, порождает естественным образом линейные преобразования в пространстве полилинейных функций на L и в пространстве полилинейных отображений в L. При этом особенное значение имеют те полилинейные функции и полилинейные отображения, которые не изменяются под действием G (инвариантные относительно G). С инвариантными полилинейными функциями тесно связаны инвариантные многочлены (от координат векторов пространства L), называемые просто инвариантами. Среди математических проблем, решение которых удобно описывается в терминах инвариантов, находятся такие важные для теории и приложений задачи как классификация гиперповерхностей второго порядка, классификация линейных преобразований (теория Жордана) и др.

Согласно Эрлангенской программе, провозглашенной в 1872 году, предметом изучения всякой геометрии являются свойства пространства M, на котором задано действие группы G, инвариантные относительно этого действия. Конкретные геометрии, изучаемые в XIX веке, имели дело с подгруппами G проективной группы. Инвариантные свойства пространства выражались через инварианты соответствующей группы. В этом смысле вся геометрическая наука XIX века укладывалась в рамки теории инвариантов.

Было замечено, что задача описания инвариантов очень сложна даже для сравнительно простых линейных групп. Развитие теории инвариантов было существенно заторможено тем обстоятельством, что каждый следующий шаг требовал все более громоздких вычислений, а исчерпывающего метода описания инвариантов не нашли и по сей день.

В 1893 г. Гильберт доказал теорему [68], согласно которой кольцо инвариантов для широкого класса линейных групп конечно порождено и имеет конечное число соотношений. После этой работы интерес математиков к вычислению и описанию инвариантов заметно ослабел. Это явление, хотя и было следствием опубликования замечательной работы Гильберта, никак не может считаться обусловленным полученными Гильбертом результатами. В самом деле, работа Гильберта давала ответ на вопрос об алгебраическом строении кольца инвариантов, но не имела отношения к вычислению и описанию самих инвариантов, что составляло главную тему теории инвариантов XIX века.

Через несколько десятилетий после работы Гильберта, интерес к теории инвариантов снова пробудился в связи с теорией представлений классических групп Ли в трудах Вейля и теорией полупростых групп Ли, Картана и Киллинга. К этому времени в математику прочно вошло такое понятие, как тензор, были классифицированы римановы симметрические пространства.

В это время были сформулированы, и в частных случаях решены, задачи теории представлений, связанные с инвариантными тензорами и инвариантами:

1. Задача о разложении на неприводимые компоненты тензорного (кронекеровского) произведения двух неприводимых представлений.

2. Задача о разложении на неприводимые ограничения представления группы G на подгруппу H.

В книге Вейля [13] приведено решение задачи о разложении p-ой тензорной степени простейших нетривиальных представлений классических групп на неприводимые компоненты. Установлено, что тензорные инварианты валентности p возникают лишь в том случае, когда в разложение тензорной степени входит одномерное инвариантное представление. Это разложение описано в терминах симметризаторов Юнга — особых элементов группового кольца группы подстановок.

Значительное усовершенствование методов теории представлений Картана, Вейля дано в работе [27], здесь же решена задача описания максимальных подгрупп в простых группах, что означало одновременное продвижение в теории однородных пространств.

Заметим, что исследование инвариантных тензоров всегда (но по-разному) было связано с однородными пространствами: римановы пространства постоянной кривизны и инварианты соответствующих подгрупп проективной группы (вторая половина XIX века), римановы симметрические пространства и теория представлений полупростых групп Ли Картана, Киллинга, Вейля, однородные пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ с простой группой $\mathfrak{G}$ и максимальной подгруппой $\mathfrak{Y}$ в работе [27].

Ближайшим и естественным обобщением (неприводимых) римановых симметрических пространств являются однородные римановы пространства, у которых стационарная группа точки неприводимо действует на касательном пространстве. (Для неприводимых симметрических римановых пространств указанное свойство имеет место).

Полное описание и классификация этих пространств впервые были даны автором настоящего обзора в работах [38], [39], [40].

Начиная с 1961 года эти пространства изучались различными авторами [21], [36], [59], [60], [65] с разнообразных точек зрения, в том числе с точки зрения теории инвариантных тензоров. Через несколько лет результаты работ [38], [39],]40] были получены Вольфом [71].

2. Основная цель настоящей статьи состоит в том, чтобы описать некоторый новый способ построения тензоров, инвариантных относительно заданного представления (т. н. «принцип включения» [45—48, 51, 52]), указать возможности применения этого метода к различным задачам из алгебры, анализа, топологии, геометрии, дифференциальных уравнений и дать обзор работ, в которых с помощью принципа включения решены те или иные задачи. Эти работы принадлежат в основном участникам семинара кафедры геометрии и топологии МОПИ им. Н. К. Крупской (руководитель — О. В. Мантуров): Т. И. Колесова, А. М. Борзенко, Л. Ж. Паланджанц, С. Н. Дорофеев, И. А. Дегтерев, С. С. Янтранова, Н. Б. Волотова, З. Ю. Батчаев, С. М. Черкашина, И. С. Логунов, Н. И. Гоза, В. А. Козлов, Ж. Гурбанов, Р. М. Сурманидзе, И. И. Пинчук, А. Н. Мартынюк, Т. В. Данеева [6]—[12], [14]—[25], [30]—[33], [37], [52], [53], [59], [62]—[64].

Существенным элементом в «принципе включения» является рассмотрение подходящим образом выбранного однородного пространства. При этом исключительно важную роль играют однородные римановы пространства со стационарной подгруппой неприводимо действующей на касательном пространстве (с неприводимой группой изотропии) [40].

Упомянутый выше метод построения инвариантных тензоров особенно удобен для неприводимых линейных групп — в этом случае дело сводится к известной мере к теории представлений полупростых групп Ли. Общий случай задачи описания инвариантных тензоров по-прежнему остается очень сложным, малообозримым, но исследование частных случаев задачи может быть продвинуто довольно далеко. Последнее нужно понимать в следующем смысле. Общий случай задачи связан с неприводимыми представлениями большой размерности; построение инвариантных тензоров, хотя и сводится к построению и решению некоторой системы линейных уравнений, требует большого объема громоздких вычислений. Описание инвариантных тензоров представлений малой размерности составляет частный случай общей задачи, здесь вычисления более просты и могут быть доведены до конца. Многие прикладные задачи теории инвариантных тензоров связаны как раз с неприводимыми представлениями малой размерности.

Можно ограничивать общую задачу и другими условиями — малой валентностью искомого инвариантного тензора, особым видом рассматриваемого представления, ограничением ранга группы, алгебраическими свойствами искомого полилинейного отображения и др. Каждая из упомянутых постановок задач представляет интерес и может быть в той или иной степени решена с использованием принципа включения.

Ввиду того, что однородные римановы пространства с неприводимой группой изотропии будут играть важную роль в построении инвариантных тензоров, следующий параграф посвящен описанию и классификации этих пространств.

§ 2. Однородные римановы пространства с неприводимой группой изотропии

1. Пусть $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ — однородное пространство, $\mathfrak{G}$ — группа Ли, а $\mathfrak{Y}$ — ее замкнутая подгруппа, не содержащая нетривиальных нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$. Элементы g группы $\mathfrak{G}$ действуют на классы смежности $g_1\mathfrak{Y}\in\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ по закону $g(g_1\mathfrak{Y})=(gg_1)\mathfrak{Y}$. Всякий элемент h из подгруппы $\mathfrak{G}$ оставляет «начальную» точку $e\mathfrak{Y}$ неподвижной, т. е. $h(e\mathfrak{Y})=h\mathfrak{Y}=\mathfrak{Y}=e\mathfrak{Y}$, где e — единица группы $\mathfrak{G}$. Обратно, всякий элемент $g\in\mathfrak{G}$, оставляющий точку $e\mathfrak{Y}$ неподвижной, принадлежит $\mathfrak{Y}$. Действия группы $\mathfrak{Y}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ порождают линейные преобразования касательного пространства к $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ в точке $e\mathfrak{Y}$. Множество таких линейных преобразований является линейной группой Γ относительно естественной операции суперпозиции линейных преобразований. Эта линейная группа называется группой изотропии однородного пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$. Очевидно, что группа изотропии определяется некоторым представлением Φ группы $\mathfrak{Y}$; это представление называется изотропным представлением группы $\mathfrak{Y}$ (для однородного пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$).

Множество элементов $g\in\mathfrak{G}$, обладающих тем свойством, что $gx=x$, $x\in\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ имеет вид $g\gamma g^{-1}$, $\gamma\in\Gamma$. Это множество образует группу (стационарную подгруппу точки x) и порождает линейную подгруппу Γ_x преобразований касательного пространства к $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ в точке x. Эта подгруппа определяется представлением Φ_x группы $\mathfrak{Y}$. Очевидно, что представление Φ_x эквивалентно изотропному представлению Φ.

Если речь идет о римановом однородном пространстве, то группа изотропии Γ является подгруппой ортогональной группы

$O(n)$, где n — размерность однородного пространства; другими словами, изотропное представление Φ — ортогонально.

Известно, что неприводимые симметрические римановы пространства Картана обладают тем свойством, что их группа изотропии является неприводимой линейной группой, действующей в n-мерном вещественном касательном пространстве (к симметрическому пространству $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ в точке $e\mathfrak{Y}$) [29].

Естественным образом возникает вопрос об описании всех однородных римановых пространств с неприводимой группой изотропии. Этот вопрос был открытым на протяжении довольно долгого времени и решен автором в работах [38], [39], [40]. Через несколько лет к этим же результатам пришел Вольф [71].

Однородные римановы пространства с неприводимой группой изотропии являются с некоторой точки зрения «наиболее однородными». Действительно, известно, что однородные римановы пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ постоянной кривизны имеют в качестве группы изотропии связную компоненту $SO(n)$ ортогональной группы $O(n)$. Это значит, что движениями в этих пространствах можно не только перевести точку (всякую) во всякую точку $x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$, но, более того, всякий ортонормированный репер из касательного пространства в одной точке можно перевести во всякий ортонормированный репер той же ориентации касательного пространства в другой точке.

Если группа изотропии однородного пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ является приводимой, то возникает «неоднородность» касательного про странства, заключающаяся в следующем. Пусть L_x касательное протранство к $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ в точке x, L_{x_0} — касательное пространство в точке $x_0 = e\mathfrak{Y}$; M — подпространство в L_{x_0} инвариантное относительно Γ; g — движение, переводящее x_0 в x. Тогда дифференциал $\dot{g}$ отображения g переводит L_{x_0} в L_x и подпространство M в $\dot{g}M \subset L_{x_0}$. При этом $\dot{g}M$ определено однозначно, вне зависимости от конкретного движения g, переводящего x_0 в x. Таким образом, на однородном пространстве $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ возникает поле подпространств $\dot{g}M$ касательного пространства. Векторы из этих подпространств обладают упомянутыми выше свойствами: всякое движение переводит такой вектор снова в вектор из подпространства вида $\dot{g}M$. Это свойство и имеется в виду при упоминании о «неоднородности» касательного пространства.

Для однородных пространств $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ с неприводимой группой изотропии поля собственных пространств инвариантных относительно группы $\mathfrak{G}$ не существует, что делает такие пространства «более однородными» по сравнению со случаем приводимой группы изотропии.

Разумеется, не всякие два касательных вектора одинаковой длины могут быть переведены один в другой движением однородного пространства с неприводимой группой изотропии. Однако линейные комбинации векторов вида $\dot{g}\xi$, $g\in\mathfrak{G}$, $gx_0=x$, заполняют все пространство L_x при любом $\xi\neq 0$ $\xi\in L_{x_0}$.

2. Задача описания всех однородных римановых пространств с неприводимой группой изотропии может быть следующим образом сведена к некоторой задаче из теории представлений полупростых алгебр Ли.

Пусть G и H означают алгебры Ли групп Ли $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$, и Ad_h — линейное отображение $G\to G$, определенное формулой

$$\mathrm{Ad}_h g=[h,\ g]\ h\in H,\ g\in G, \tag{1}$$

где $[\cdot,\ \cdot]$ обозначает коммутатор алгебры Ли G. Соответствие $h\mapsto\mathrm{Ad}_h$ является представлением алгебры Ли H в линейном пространстве G. Линейное пространство H является инвариантным подпространством этого представления. Существует Ad_h-инвариантное подпространство B в G, такое, что

$$B\cap H=\{0\},\ B+H=G. \tag{2}$$

(Это утверждение вытекает из того, что каждое представление группы Ли $\mathfrak{H}$ является вполне приводимым по причине компактности $\mathfrak{H}$; компактность $\mathfrak{H}$ обусловлена тем, обстоятельством, что $\mathfrak{H}$ является стационарной группой однородного риманова пространства).

Линейные пространства G, H, B в (2) могут быть естественным образом отождествлены с касательными пространствами к $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ в точках e, e, $e\mathfrak{H}$. При этом изотропному представлению Φ для однородного пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ соответствует представление $\dot{\Phi}$ алгебры Ли H, определенное формулой

$$\dot{\Phi}: h\to\mathrm{Ad}_h|_B,\quad \mathrm{Ad}_h b=[h,\ b] \tag{3}$$

(представление Φ группы Ли $\mathfrak{H}$ и соответствующее ему представление $\dot{\Phi}$ алгебры Ли H одновременно приводимы или неприводимы).

Все сказанное выше позволяет следующим образом формулировать задачу классификации однородных римановых пространств с неприводимой группой изотропии:

Найти все пары $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ — компактна, такие, что представление $\dot{\Phi}=\mathrm{Ad}_h|_B$ неприводимо. (Речь идет о представлении в вещественном пространстве B, вещественной алгебры Ли H).

3. Задачу из теории представлений компактных групп Ли, поставленную в конце п. 2, можно свести к некоторой задаче о разложении кронекеровского (тензорного) произведения двух представлений на неприводимые [38], [39], [40]. Это можно сделать на основании следующих соображений. Прежде всего для искомого пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ (или для соответствующей пары алгебр $H\subset G$) справедливо (за некоторыми очевидными исключениями) утверждение:

группа $\mathfrak{G}$ — проста.

Основная причина справедливости утверждения состоит в том, что H является максимальной подалгеброй в G. Действительно, если H не максимальна, то $H \subset G_0 \subset G$, и Ad_h на B приводимо, поскольку подпространство пространства B, равное пересечению B и G_0, инвариантно.

Исключения исчерпываются следующим списком:

1) $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0 \times \mathfrak{G}_0$ — прямое произведение двух одинаковых экземпляров группы $\mathfrak{G}_0$; $\mathfrak{H}$ изоморфна на $\mathfrak{G}_0$ и вложена в прямое произведение $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0 \times \mathfrak{G}_0$ диагонально.

2) $\mathfrak{H}$ — произвольная компактная группа, действующая в линейном пространстве L с помощью неприводимого представления Ψ; $\mathfrak{G}$ — есть множество пар $(\Psi(h), \xi)$, где $\Psi(h)$ — линейный оператор представления Ψ, а ξ — вектор из L. Закон группового умножения имеет вид:

$$(\Psi(h_1), \xi) \cdot (\Psi(h_2), \eta) = (\Psi(h_1 h_2), \Psi(h_1)\eta).$$

В исследовании пар алгебр Ли $H \subset G$ таких, что $G=H+B$ и $\mathrm{Ad}_h|_B$ неприводимо, в силу сформулированного выше утверждения, можно ограничиться случаем четырех серий простых алгебр A_n, B_n, C_n, D_n и пяти особых алгебр Ли E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

При этом нет необходимости перебирать все вещественные простые формы перечисленных выше простых комплексных алгебр Ли; достаточно исследовать только те случаи, когда $\mathfrak{G}$ (соответственно, G) является компактной формой простой вещественной алгебры. Дело в том, что если $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ — однородное риманово несимметрическое пространство с неприводимой группой изотропии и простой $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ — компактна. Основная причина, по которой это утверждение имеет место, заключается в том, что $\mathfrak{H}$ является максимальной компактной подгруппой группы $\mathfrak{G}$, при условии, что $\dim\mathfrak{H} < \dim\mathfrak{G}$. Если бы $\mathfrak{H}$ не была максимальной компактной, то $\mathfrak{H}$ не была бы и максимальной, что, как указывалось выше, невозможно. Если же группа $\mathfrak{G}$ проста и некомпактна, а $\mathfrak{H}$ — максимальная компактная подгруппа в $\mathfrak{G}$, то однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ является. как известно, симметрическим римановым пространством Картана [29]. При рассмотрении в качестве G компактных форм простых алгебр Ли особое место занимает случай $G=\mathrm{SU}(n)$ (G — типа A_{n-1}). В этом случае подгруппа $\mathfrak{H}$ (подалгебра H) вложена в $\mathrm{SU}(n)$ (линейную алгебру Ли $\mathrm{su}(n)$ группы $\mathrm{SU}(n)$) с помощью некоторого представления χ.

Рассмотрим представление $\Phi=\mathrm{Ad}_h|_B$ в пространстве B^+, комплексной оболочке пространства B. Для этого распространим Ad_h с G на G^+ — комплексную алгебру Ли, соответствующую вещественной алгебре Ли G. В случае $\mathfrak{G}=\mathrm{SU}(n)$, алгебра G является алгеброй всех косоэрмитовых матриц порядка n со следом нуль, а G^+ — алгеброй Ли всех комплексных матриц со следом нуль. Пусть T — одномерное комплексное линейное пространство, состоящее из диагональных $n \times n$ матриц. Тогда $G^+ + T$ совпадает с линейным пространством всех $n \times n$ комплексных матриц.

Пусть $h \mapsto \widetilde{\mathrm{Ad}}_h$ соответствие, относящее каждому $h \in H$ линейное преобразование пространства $G^+ + T$, определенное формулой

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_h(\tilde{g}) = \chi(h)\tilde{g} - \tilde{g}\chi(h), \quad \tilde{g} \in G^+ + T, \quad h \in H. \tag{4}$$

Очевидно, что Ad_h на G^+ совпадает с Ad_h и $\widetilde{\mathrm{Ad}}_h$ на T тривиально, т. е. $\widetilde{\mathrm{Ad}}_h(t) = 0$.

Формула (4) задает представление алгебры Ли H в пространстве $G^+ + T$. Это представление, как нетрудно показать, эквивалентно тензорному (кронекеровскому) произведению $\chi \otimes \bar{\chi}$ представления χ на представление $\tilde{\chi}$, контрагредиентное χ ($\tilde{\chi}(h) = -\chi(h)'$), штрих означает транспонирование. При этом представление $\chi \otimes \tilde{\chi}$ имеет такие инвариантные пространства: H^+ и T. В этих пространствах $\widetilde{\mathrm{Ad}}_h = \chi \otimes \tilde{\chi}$ индуцирует соответственно присоединенное представление T и нулевое (одномерное) представление ν.

Представление $\Phi = \mathrm{Ad}_h|_B$, о котором идет речь в задаче п. 2, удовлетворяет, таким образом, следующему условию: комплексификация представления Φ в прямой сумме с присоединенным представлением и нулевым (одномерным) представлением эквивалентно тензорному произведению представления χ на $\bar{\chi}$.

Уточнение сформулированного условия требует сравнения неприводимости представлений Φ и его комплексификации. Имеет место следующая теорема:

Пусть Φ — представление компактной группы Ли $\mathfrak{H}$ ($\dot{\Phi}$ — соответствующее представление алгебры Ли H) в вещественном пространстве L, и Φ^+ — представление группы Ли $\mathfrak{H}$ ($\dot{\Phi}^+$ — соответствующее представление алгебры Ли H). Тогда Φ неприводимо тогда и только тогда, когда Φ^+ либо неприводимо, либо разлагается в сумму двух неэквивалентных взаимно контрагредиентных неприводимых представлений, либо в сумму двух эквивалентных симплектических неприводимых представлений.

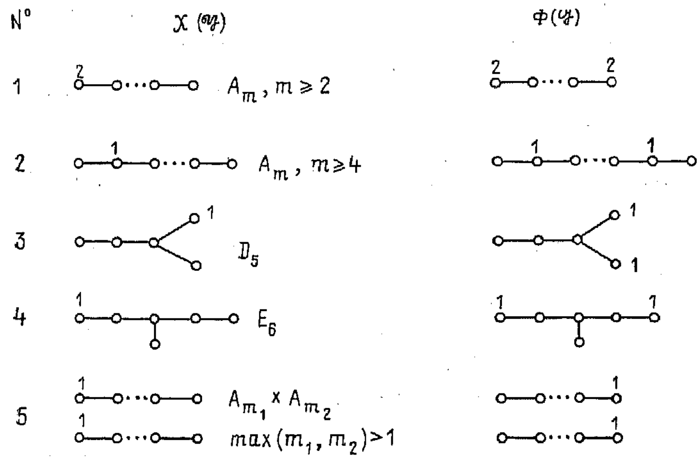
С учетом этой теоремы, задача классификации однородных римановых пространств с неприводимой группой изотропии в случае $\mathfrak{G} = \mathrm{SU}(n)$ сводится к следующей задаче из теории представлений компактных групп (алгебр) Ли:

(*) Найти такие представления $\chi : \mathfrak{H} \to \mathrm{SU}(n)$, что разложение представления $\chi \otimes \bar{\chi}$ на неприводимые содержит, кроме присоединенного представления τ и нулевого (одномерного) представления ν, либо только одно неприводимое представление, либо два неприводимых неэквивалентных взаимно контрагредиентных представления, либо два неприводимых, эквивалентных симплектических представления.

В задаче (*) главную трудность представляет собой случай неприводимого представления χ. Решение задачи (*) основано на том факте, что большинство неприводимых представлений χ обладает тем свойством, что разложение $\chi\otimes\bar{\chi}$ содержит несколько представлений, явно указываемых, и условие, сформулированное в задаче (*), может быть выполнено лишь в том случае, когда некоторые из этих явно указываемых представлений совпадают с присоединенным или нулевым представлением. Такие совпадения имеют место только для представлений с малыми числовыми отметками их старшего веса. Это обстоятельство делает возможным полное перечисление представлений χ, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Окончательный ответ на задачу (*) дан в таблице 1 списком представлений $\chi:\mathfrak{Y}\to SU(n)$ таких, что $SU(n)/\chi(\mathfrak{Y})$ является несимметрическим однородным пространством с неприводимой группой изотропии. Для каждого χ указано изотропное представление Φ соответствующего однородного несимметрического пространства.

Таблица 1



4. Если $\mathfrak{G}$ проста и имеет тип B_n, D_n, C_n, то представление χ, вкладывающее $\mathfrak{Y}$ в $\mathfrak{G}$, является самоконтрагредиентным. При этом $\chi\otimes\bar{\chi}$ эквивалентно $\chi\otimes\chi$. Последнее представление действует в пространстве всех дважды контравариантных тензоров. Пространство всех симметрических (кососимметрических) тензоров инвариантно относительно $\chi\otimes\chi$. Легко видеть, что в случае, когда $\mathfrak{G}$ изоморфна $SO(n)$ (тип B_m, D_m), представление Ad_h на линейном пространстве G^+ эквивалентно представлению, которое индуцирует $\chi\otimes\chi$ на инвариантном пространстве комплексных кососимметрических двухвалентных тензоров; в случае, когда $\mathfrak{G}$ изоморфна $USp(2m)$ (тип C_m), представление Ad_h на линейном пространстве G^+ эквивалентно представлению, которое индуцирует $\chi\otimes\chi$ на инвариантном пространстве всех комплексных симметрических тензоров валентности два.

Задача п. 2 для рассматриваемого случая сведена тем самым к следующей задаче о разложении кронекеровского представления $\chi\otimes\chi$ на неприводимые.

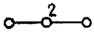
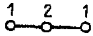
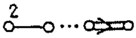
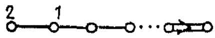
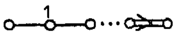
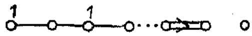
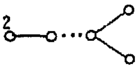
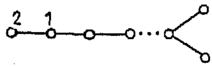
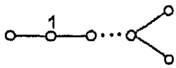
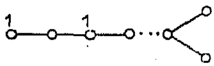
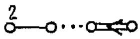
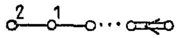
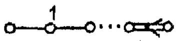
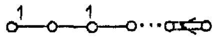
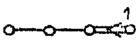
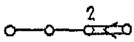
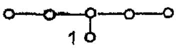
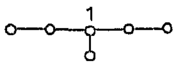
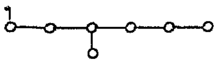
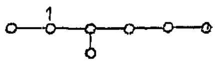
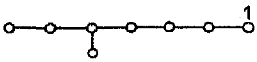
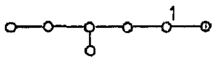
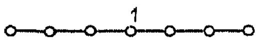
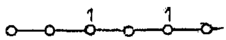
(**) Найти такие ортогональные (симплектические) представления компактной группы Ли $\mathfrak{H}$ (алгебры Ли H), что разложение $\chi\otimes\chi$ в пространстве всех комплексных кососимметрических (симметрических) двухвалентных тензоров содержит, кроме присоединенного представления, либо только одно неприводимое представление, либо два неэквивалентных неприводимых взаимно контрагредиентных представления, либо два эквивалентных неприводимых симплектических представления.

Главную трудность в этой задаче представляет случай неприводимого χ. Решение задачи (**) основано на том факте, что большинство представлений χ обладает тем свойством, что разложение $\chi\otimes\chi$ в инвариантном пространстве кососимметрических (симметрических) двухвалентных тензоров содержит несколько представлений, явно указываемых, и условие, сформулированное в (**) может быть выполнено лишь в том случае, когда некоторые из этих явно указываемых представлений совпадают с присоединенным в случае $\mathfrak{G}=\mathrm{SO}(n)$ и с присоединенным или нулевым одномерным в случае $\mathfrak{G}=\mathrm{USp}(m)$. Такие совпадения имеют место только для представлений с малыми числовыми отметками их старшего веса. Это обстоятельство делает возможным полное перечисление представлений χ, удовлетворяющих описанным выше условиям.

Окончательный ответ на задачу (**) дан в таблице 2, содержащей списки представлений $\chi:\mathfrak{H}\to\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}=\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{USp}(m)$. Для каждого χ указано изотропное представление соответствующего однородного несимметрического пространства.

5. Описание однородных римановых несимметрических пространств $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ с неприводимой группой изотропии $\mathfrak{H}$ с простой особой $\mathfrak{G}$ может быть осуществлено с помощью известного списка максимальных подгрупп $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ (максимальных подалгебр H в G); см., например, [27].

В таблице 3 приведены списки таких пространств для каждой особой группы $\mathfrak{G}$. Эту группу будем считать линейной, заданной своим присоединенным представлением. При этом подгруппа $\mathfrak{H}$ является линейной группой, заданной (приводимым) представлением — прямой суммой присоединенного представления группы $\mathfrak{H}$ и изотропного представления. Если все упомянутые представления считать заданными в комплексном линейном пространстве, то, как было отмечено выше, изотропное представление является либо неприводимым, либо суммой двух неэквивалентных взаимноконтрагредиентных представлений, либо суммой двух эквивалентных неприводимых симметрических представлений.

N°	$\mathfrak{x}(\mathfrak{g})$		$\mathfrak{G}$	$\Phi(\mathfrak{g})$
1		A_3	SO	
2		A_1	SO	
3		$B_m, m \geq 2$	SO	
4		$B_m, m \geq 3$	SO	
5		$D_m, m \geq 4$	SO	
6		$D_m, m \geq 4$	SO	
7		$C_m, m \geq 2$	SO	
8		$C_m, m \geq 3$	SO	
9		C_4	SO	
10		E_6	SO	
11		E_7	SO	
12		E_8	SO	
13			SO	

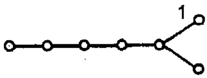
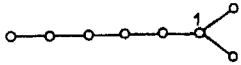
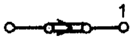
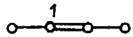
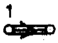
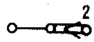
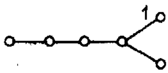
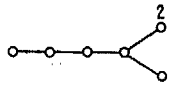
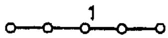
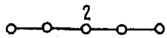
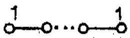
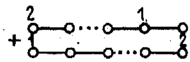
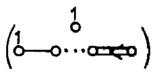
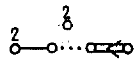
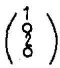
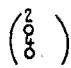
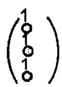
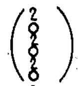
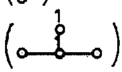
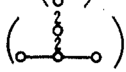
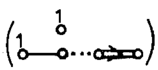
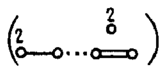
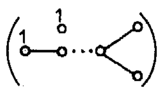
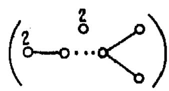
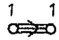
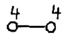
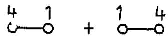
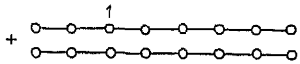
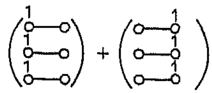
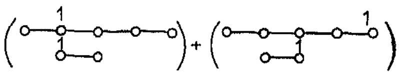
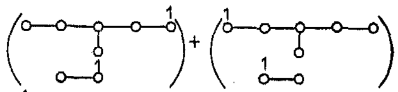
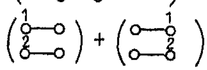
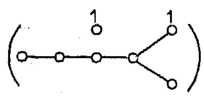
№	$\mathfrak{X}(\mathfrak{g})$		$\mathfrak{G}$	$\Phi(\mathfrak{g})$
14		D_8	SO	
15		F_4	SO	
16		F_4	SO	
17		G_2	SO	
18		C_3	Sp	
19		D_6	Sp	
20		A_5	Sp	
21		$A_m,\ m \geqslant 2$	SO	
22		$A_1 \times C_m,\ m \geqslant 3$	SO	
23		$A_1 \times A_1$	Sp	
24		$A_1 \times A_1 \times A_1$	Sp	
25		$A_1 \times A_3$	Sp	
26		$A_1 \times B_m$, $m \geqslant 2$	Sp	
27		$A_1 \times D_m$, $m \geqslant 4$	Sp	

Таблица 3

N°	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{G}$	$\Phi(\mathfrak{V})$
1	G_2	E_6	
2	A_1	G_2	
3	A_2	E_7	
4	G_2	B_3	
5	A_2	E_6	
6	A_8	E_8	
7	$A_2 \times A_2 \times A_2$	E_6	
8	$A_5 \times A_2$	E_7	
9	$E_6 \times A_2$	E_8	
10	$A_2 \times A_2$	F_4	
11	$D_6 \times A_1$	E_7	
12	A_2	G_2	

6. Свойства однородных римановых пространств с неприводимой группой изотропии изучались различными авторами.

Как видно из приведенных выше списков, существуют однородные римановы несимметрические пространства, с неприводимой группой изотропии, для которых изотропное представление в комплексной оболочке касательного пространства приводимо (распадается в точности на два неприводимых неортогональных представления). В таких пространствах существует почти-комплексная структура, инвариантная относительно действия группы [40], [71].

Изучение инвариантных почти-комплексных структур на однородных пространствах, основанное на классификации таких структур в случае изотропной неприводимости, было предпринято в работе [35].

Разложение алгебры Ли в сумму (2) $G=H+B$ для однородного риманова несимметрического пространства с неприводимой группой изотропии связано со следующими структурными соотношениями

$$[H, H]=H,\ [H, B]=B,\ [B, B]=H+B=G. \tag{5}$$

(В алгебре G всего два Ad_h-инвариантных неприводимых пространства — H и B, коммутатор всяких двух Ad_h-инвариантных пространств является Ad_h-инвариантным пространством; отсюда следует, что в несимметрическом случае коммутатор $[B, B]$ совпадает со всей G).

На пространстве B определена алгебра, закон умножения в которой Ad_h-инвариантен:

$$b_1 \square b_2 = \mathrm{Пр}_B[b_1, b_2] \tag{6}$$

($\mathrm{Пр}_B$ означает проекцию на B относительно метрики Картана).

Трехиндексный тензор структурных констант этой алгебры инвариантен относительно изотропного (неприводимого) представления.

Обзор исследований по тематике, связанной с такими тензорами см. в § 3, п. 1.

Рассмотрим в алгебре A, обладающей неприводимой группой автоморфизмов, орбиту какого-либо вектора x под действием группы автоморфизмов. На этой орбите определена билинейная форма B:

$$B_x(\xi, \eta) = (\xi \square \eta, x), \tag{7}$$

где ξ, η — векторы из G, касательные к орбите, x — вектор, задающий точку орбиты, $(,)$ — скалярное произведение Картана. Форма B кососимметрична и задает внешнюю дифференциальную форму степени 2, как можно показать, замкнутую. Эта форма является обобщением известной формы Кириллова. Это обстоятельство открывает возможности для исследования геометрических свойств средствами симплектической геометрии.

Однородные римановы пространства с неприводимой группой изотропии изучались с топологической точки зрения. В частности, ряд работ посвящен вычислению кольца когомологий этих пространств, основанном на применении теоремы Картана и спектральных последовательностях [5]. Вычисления для неприводимых компактных симметрических пространств проведены еще Борелем в 50-х годах [5]. Когомологии несимметрических пространств изучались в [21], [43], [44], [60]. В этих вычислениях существенное значение имеют коэффициенты $d_j(\chi)$, с помощью которых образ $\chi^*(x)$ разлагается по $y_1, y_2, \ldots, y_l$ (χ —

представление группы $\mathfrak{H}$, вкладывающее $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ $\chi:\mathfrak{H}\to\mathfrak{G}$, x — примитивный класс когомологий группы $\mathfrak{G}$, $y_1, y_2, \ldots, y_l$ — примитивные классы когомологий подгруппы $\mathfrak{H}$, $\chi^*: H^*(\mathfrak{G}, \mathbf{R})\to\to H^*(\mathfrak{H}, \mathbf{R})$

$$\chi^*(x) = d_1y_1 + d_2y_2 + \ldots + d_ly_l.$$

Подробнее см. [28], [41]. Коэффициенты $d_j(\chi)$ причудливым образом зависят от χ и порождают любопытные уравнения в целых числах [41], [44].

Некоторые геометрические свойства однородных римановых несимметрических пространств описаны в [54], [65].

Однородные римановы пространства с малым числом неприводимых компонент группы изотропии изучались в работах [31]—[33].

Несимметрические римановы пространства, обладающие некоторыми специальными «симметрическими» структурами, описаны в монографии [34].

§ 3. Принцип включения

Как отмечалось выше, теория инвариантных тензоров развивалась в тесной связи с теорией однородных римановых пространств.

В этом параграфе будет указана новая сторона такой связи.

Пусть $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ однородное пространство, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ — группы Ли, G и H — соответствующие им комплексные алгебры Ли. Обозначим через Ad_G представление алгебры Ли G на линейном пространстве G, определенное формулой

$$g_1\mapsto \mathrm{Ad}_G(g_1): g\mapsto [g_1, g], \quad g\in G. \tag{1}$$

Предположим, что ограничение Ad_H представления Ad_G на подалгебру H

$$h\mapsto \mathrm{Ad}_h: g\mapsto [h, g] \tag{2}$$

вполне приводимо, т. е. разлагается в прямую сумму неприводимых инвариантных относительно преобразований Ad_h (2). Имеем

$$G = H + B_1 + B_2 + \ldots + B_m, \tag{3}$$

где подпространства $H, B_1, B_2, \ldots, B_m$ линейного пространства G Ad_h-инвариантны и неприводимы. Всякое представление Ψ алгебры Ли G определяет разложение

$$\Psi(G) = \Psi(H) + \Psi(B_1) + \Psi(B_2) + \ldots + \Psi(B_m), \tag{4}$$

где $\Psi(H)$ и $\Psi(B_i)$, $(i=1, 2, \ldots, m)$ — ограничения представления Ψ алгебры Ли G на H и B_i соответственно; заметим еще, что линейные операторы $\Psi(g)$, $g\in G$, принадлежат алгебре Ли $\mathrm{GL}(N)$, $N=\dim\Psi$.

Полилинейные функции

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_p) = \mathrm{Sp}\, X_1 X_2 \ldots X_p, \tag{5}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_p \in \mathrm{GL}(N)$ и $f(X_1, X_2, \ldots, X_p) \in \mathbf{C}$, Sp — означает след, инвариантны относительно присоединенного представления группы $\mathfrak{GL}(N)$, т. е.

$$f(CX_1C^{-1}, CX_2C^{-1}, \ldots, CX_pC^{-1}) = f(X_1, X_2, \ldots, X_p) \tag{6}$$

для всякого $C \in \mathfrak{GL}(N)$. По этой причине функции (4) инвариантны относительно ограничения присоединенного представления $\mathfrak{GL}(N)$ на подгруппы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{Y}$. Легко видеть, что ограничения присоединенного представления $\mathfrak{GL}(N)$ на $\mathfrak{G}$ имеют в качестве инвариантного подпространства линейное пространство $\Psi(G)$, в котором ограничение присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{GL}(n)$ на G совпадает с Ad_G (1); ограничение присоединенного представления алгебры Ли $\mathrm{GL}(N)$ на алгебру Ли H на пространстве $\Psi(G)$ эквивалентно представлению Ad_H на G.

Поскольку линейные пространства $\Psi(H)$, $\Psi(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ Ad_H-инвариантны, то функции

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_p) = \mathrm{Sp}(X_1 X_2 \ldots X_p), \tag{7}$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_p \in \Psi(H),\ X_1, X_2, \ldots, X_p \in \Psi(B_i),$$

инвариантны относительно того неприводимого представления, которому эквивалентно ограничение Ad_H на H или B_i.

Из предыдущего рассуждения вытекает следующий способ построения тензоров, инвариантных относительно неприводимого представления Ф.

Если для заданного неприводимого представления Ф алгебры Ли H существует однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ такое, что ограничение Ad_H на одно из линейных пространств $H, B_1, B_2, \ldots, B_m$ в (3) эквивалентно представлению Ф, то для любого представления Ψ алгебры Ли G функции (7), где $X_1, X_2, \ldots, X_p$ принадлежат соответствующему линейному пространству из числа $\Psi(H)$, $\Psi(B_1)$, $\Psi(B_2), \ldots, \Psi(B_m)$, задают Ф-инвариантные тензоры валентности p.

Очевидно, что для всякой подстановки π из p-индексов функции

$$f_\pi(X_1, X_2, \ldots, X_p) = f(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \ldots, X_{\pi(p)}) \tag{8}$$

Ф-инвариантны, если этим же свойством обладает функция $f(X_1, X_2, \ldots, X_p)$. Столь же очевидно, что для любого набора коэффициентов $a_\pi \in \mathrm{C}$, $\pi \in S_p$ (S_p — группа подстановок из p символов) линейная комбинация

$$\sum_\pi a_\pi f_\pi(X_1, X_2, \ldots, X_p) \tag{9}$$

функций f_π инвариантна относительно Φ (для Φ-инвариантной функции f).

Среди элементов $\Sigma a_\pi \cdot \pi$ группового кольца группы S_p примечательны элементы α, β, $\gamma, \ldots$, называемые симметризаторами Юнга. Они обладают свойством идемпотентности, т. е.

$$\alpha^2=\alpha,\ \beta^2=\beta,\ \gamma^2=\gamma, \ldots \qquad (10)$$

и не могут быть разложены в сумму двух ненулевых идемпотентов. Со всякой Φ-инвариантной полилинейной функцией f симметризатор Юнга $\Sigma a_\pi \pi$ связывает новую Φ-инвариантную полилинейную функцию (9), при этом повторное применение симметризатора к функции (9) оставляет ее без изменения в силу (10). В этом смысле говорят, что функция (9) обладает типом симметрии $\Sigma a_\pi \pi$. Частными случаями симметризаторов Юнга являются следующие элементы группового кольца группы

$$\alpha=\Sigma \frac{\pi}{p!}, \quad \beta=\Sigma(-1)^{\deg \pi}\frac{\pi}{p!};$$

первый из этих симметризаторов переводит полилинейную функцию в симметрическую функцию, а второй переводит полилинейную функцию в кососимметрическую функцию.

Построение Φ-инвариантного тензора с симметрией, задаваемой симметризатором Юнга, связано с задачами теории представлений, описанными в § 1. Действительно, Φ-инвариантный ненулевой p-валентный тензор порождает одномерное инвариантное пространство в $\underbrace{L\otimes L\otimes\ldots\otimes L}_{p \text{ раз}}=L^{\otimes p}$ относительно тензорной степени $\Phi^{\otimes p}$, где L — пространство, в котором действует представление Φ. Поскольку в L действует также и $\mathfrak{GL}(N)$, $N=\dim \Phi$, то пространство $L\otimes L\otimes\ldots\otimes L$ разлагается в прямую сумму неприводимых подпространств, каждое из которых согласно Вейлю определено тем или иным симметризатором Юнга. Ограничение представления $\mathfrak{GL}(N)^{\otimes p}$ на G разлагается на неприводимые таким образом, что каждая неприводимая компонента принадлежит одной из юнговских компонент разложения $\mathfrak{GL}^{\otimes p}(N)$. Таким образом, тензоры (9) принадлежат пространству неприводимой компоненты (соответствующей симметризатору Юнга) в разложении $\mathfrak{GL}(N)^{\otimes p}$.

Для практического применения указанного способа вычисления инвариантных тензоров существенны два момента:

1. Как для данного Φ найти однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ так, чтобы ограничение Ad_H на одном из пространств H, B_1, $B_2, \ldots, B_m$ в (3) совпадало бы с Φ (если это вообще возможно).

2. Как вычислить подпространства $\Psi(H)$, $\Psi(B_i)$, $i=1, 2, \ldots, m$, матричного пространства $\Psi(G)$, ограничение на

которые представления Ad_H было бы эквивалентно Φ. Какова здесь роль представления Ψ (зависящего от нашего произвола).

В общих чертах ответы на поставленные вопросы таковы.

Для большого класса представлений Φ построение однородного пространства с нужным свойством оказывается сравнительно легкой задачей (см. теорему 1). Вычисление подпространств $\Psi(H)$, $\Psi(B_i)$ удовлетворяющих нужному условию, представляет собой задачу, сводящуюся к решению некоторой системы однородных линейных уравнений. При этом для построения системы уравнений можно указать явный алгоритм.

Заметим, что инвариантные тензоры, конструируемые указанным способом при различных Ψ могут совпадать. Весьма содержательны вычисления уже для простейших нетривиальных представлений Ψ. Обычно бывает так, что простейшие Ψ позволяют построить большой запас инвариантных тензоров, и другие представления применяются в поисках остальных инвариантных тензоров.

Описанный выше метод построения инвариантных тензоров мы называем принципом включения, поскольку существенной частью метода является нахождение алгебры Ли G, содержащей алгебру H в качестве подалгебры, т. е. включение алгебры H в алгебру Ли G с выполнением определенных свойств.

Принцип включения был сформулирован автором в 1984 году. Его описание было дано в докладах на семинарах по тензорному и векторному анализу, МГУ им. М. В. Ломоносова, по дифференциальной геометрии, КГУ им. В. И. Ульянова-Ленина, по прикладным вопросам геометрии, МОПИ им. Н. К. Крупской, семинаре ВИНИТИ, а также на конференциях в Одессе 1984 г. и в Тирасполе 1985 г.

Описание принципа включения было опубликовано в [47], [49], [52].

В заключение параграфа сформулируем и докажем теорему, устанавливающую, что для широкого класса неприводимых представлений Φ алгебры Ли H существует однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ такое, что представление Φ входит в разложение Ad_H на G.

Теорема 1. Пусть Φ неприводимое ортогональное или симплектическое представление, полупростой алгебры Ли H, и в пространстве L представления Φ существует ненулевая трилинейная форма, инвариантная относительно Φ. Тогда однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{G}=\mathfrak{GL}(N)$, $N=\dim\Phi$ и $\mathfrak{H}$ — группа Ли, соответствующая линейной алгебре Ли $\Phi(H)$, обладает следующим свойством: разложение представления Ad_H на алгебре Ли группы $\mathfrak{G}$ на неприводимые компоненты

$$G=H+B_1+B_2+\ldots+B_p \qquad (11)$$

содержит такую неприводимую компоненту B_i, что ограничение представления Ad_H на B_i эквивалентно Φ.

Доказательство. По условию, представление Φ обладает ненулевым инвариантным тензором валентности три. Это значит, что разложение тензорной степени $\Phi\otimes\Phi\otimes\Phi$ на неприводимые компоненты содержит одномерную тривиальную компоненту. Пусть

$$\Phi\otimes\Phi=\sum_{k=1}^{p} a_k\Phi_k \tag{12}$$

— разложение тензорного квадрата $\Phi\otimes\Phi$ на неприводимые компоненты (Φ_k, $k=1, 2, \ldots, p$, — неприводимые попарно неэквивалентные представления, а a_k — натуральные числа). Тензорная степень $\Phi\otimes\Phi\otimes\Phi$ содержит те и только те неприводимые компоненты, которые присутствуют в разложениях $\Phi_k\otimes\Phi$, $k=1, 2. \ldots, p$. В силу леммы Шура, тензорное произведение двух неприводимых представлений содержит одномерную тривиальную компоненту тогда и только тогда, когда перемножаемые представления взаимно контрагредиентны. Поскольку Φ самоконтрагредиентно, то, в условиях теоремы одно из Φ_k в (12) эквивалентно Φ. С другой стороны, представление Ad_H на $\mathrm{GL}(N)$ эквивалентно тензорному произведению представления Φ на представление, контрагредиентное Φ, которое, по условию теоремы, эквивалентно Φ. Таким образом, разложение Ad_H на $G=\mathrm{GL}(N)$, эквивалентное $\Phi\otimes\Phi$, содержит неприводимое подпространство, в котором ограничение Ad_H эквивалентно Φ.

Вопрос о том, каковы те неприводимые представления Φ, которые обладают трехвалентным инвариантным тензором обсуждается ниже.

§ 4. Применение принципа включения

В этом параграфе будут рассмотрены различные задачи, связанные с инвариантными тензорами и инвариантами, которые могут быть решены с помощью принципа включения; будут описаны результаты исследований, где принцип включения играл роль основного инструмента.

Тема «Однородные пространства и инвариантные тензоры» является главной темой исследования кафедры геометрии и топологии МОПИ им. Н. К. Крупской. Результаты работ кафедры в 1981—1986 годах опубликованы в восьми сборниках трудов кафедры, депонированных в ВИНИТИ; при этом один из сборников был назван «Принцип включения и инвариантные тензоры».

1. Алгебры с неприводимой группой автоморфизмов. Пусть в линейном пространстве L над полем $\mathbf{C}$ определена билинейная операция.

$$f: L\otimes L\to L \tag{1}$$

и c_{jk}^{i} — тензор структурных констант этой операции. Пусть в L действует линейная группа $\Phi(\mathfrak{Y})$, где Φ — неприводимое представление группы Ли $\mathfrak{Y}$ и операция (1) инвариантна относительно этой линейной группы. При этих условиях говорят, что задана (бинарная) алгебра с неприводимой группой автоморфизмов. (Инвариантность операции (1) тождественна инвариантности тензора структурных констант; каждое преобразование из $\Phi(\mathfrak{Y})$ является автоморфизмом алгебры). Известно, что для неприводимого представления Φ группы Ли $\mathfrak{Y}$ неприводимой линейной группой является полупростая часть $\Phi(\mathfrak{Y})$. Поэтому задача описания алгебр с неприводимой группой автоморфизмов сводится к следующей задаче из теории представлений полупростых групп (алгебр) Ли:

Найти такие неприводимые представления Φ полупростых алгебр Ли H, что тензорное произведение

$$\Phi \otimes \Phi \otimes \tilde{\Phi},$$

где $\tilde{\Phi}$ — представление, контрагредиентное Φ, в разложении на неприводимые содержит по крайней мере одномерное тривиальное представление; исследовать алгебраические свойства алгебр, задаваемых тензором $c_{jk}{}^{i}$ структурных констант, инвариантного относительно Φ.

Такая задача поставлена и, при определенных ограничениях, решена в [48], [51]; частные случаи этой задачи были исследованы в [14], [20], [25].

Опишем в общих чертах результаты работ [14], [20], [25], [48], [51].

Оказывается, прежде всего, что необходимым условием существования алгебры с неприводимой группой автоморфизмов $\Phi(\mathfrak{Y})$ является условие целочисленности представления Φ. Неприводимое представление Φ полупростой группы (алгебры) Ли называется целочисленным, если старший вес этого представления является целочисленной линейной комбинацией простых корней. Для простых алгебр Ли H нетривиальным целочисленным представлением наименьшей размерности является присоединенное представление. Присоединенное представление Φ простой группы (алгебры) Ли обладает инвариантным тензором c_{jk}^{i} структурных констант. Этот тензор — единственный с точностью до множителя для всех простых алгебр Ли, кроме A_n, $n \geqslant 2$, где имеется двумерное пространство тензоров вида c_{jk}^{i}, инвариантных относительно присоединенного представления. Соответствующие алгебры с неприводимой простой группой автоморфизмов типа отличного от A_n, $n \geqslant 2$, являются простыми алгебрами Ли (в которых действует рассматриваемое присоединенное представление Φ); для группы (алгебры) Ли типа A_n, $n \geqslant 2$, в пространстве действия присоединенного представления имеется двумерное пространство инвариантных тензоров типа $c_{j\,k}^{\,l}$: кроме билинейного отображения, задаваемого коммутированием в алгебре Ли A_n, существует инвариантная билинейная операция, описываемая следующим образом. Если пространство, в котором действует присоединенное представление алгебры Ли A_n истолковать как линейное пространство всех $(n+1)\times(n+1)$ матриц со следом нуль, то операция (1) имеет вид

$$f(A\otimes B)=AB+BA-\frac{1}{n+1}(\mathrm{Sp}\,AB)E,\quad A,\,B\in L. \tag{3}$$

При этом всякая инвариантная билинейная операция в пространстве L действия присоединенного представления является линейной комбинацией операции коммутирования и операции (3).

Таким образом, простейшим целочисленным неприводимым представлениям соответствуют хорошо известные алгебры — простые алгебры Ли и алгебра, задаваемая умножением (3).

Отметим, что для простых алгебр Ли H легко указать следующие за присоединенным представлением целочисленные представления минимальной размерности, допускающие инвариантный тензор $c_{j\,k}^{\,l}$.

Оказывается, что такими представлениями являются представления группы изотропии некоторых неприводимых симметрических пространств, а также изотропные представления однородных римановых пространств с неприводимой группой изотропии, описанных в § 3. В том и в другом случае имеет место одно из Ad_H-инвариантных разложений

$$G=H+B,\quad G=H+B_1+B_2. \tag{4}$$

Если Ψ — представление алгебры Ли G, то

$$\Psi(G)=\Psi(H)+\Psi(B),\quad \Psi(G)=\Psi(H)+\Psi(B_1)+\Psi(B_2). \tag{5}$$

Рассмотрим линейное матричное пространство $\Psi(B)$ (или $\Psi(B_1)$ или $\Psi(B_2)$). Положим

$$b_1\Box b_2=\mathrm{Пр}_B b_1b_2\ (b_1\Box b_2=\mathrm{Пр}_{B_1}b_1b_2,\ b_1\Box b_2=\mathrm{Пр}_{B_2}b_1b_2), \tag{6}$$

где b_1, $b_2\in\Psi(B)$, b_1b_2 — произведение матриц b_1 и b_2, $\mathrm{Пр}_B b_1b_2$ означает проекцию элемента b_1b_2 на подпространство B относительно метрики Картана—Киллинга.

Легко видеть, что умножение $\Box$ инвариантно относительно ограничения Ad_H на B (т. е. относительно группы (алгебры) Ли изотропии пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$). Для симметрических пространств умножение $\Box$ часто тривиально, а для пространств несимметрических и с неприводимой группой изотропии умножение $\Box$ всегда нетривиально.

Отметим, что алгебры с неприводимой группой автоморфизмов, построенные по однородным пространствам с неприводимой группой изотропии с помощью формул и разложений (4), (5), (6), по-видимому, в основном, не были известны до работ [47], [48], [49].

В то же время, эти алгебры представляют несомненный интерес со следующей точки зрения.

Для каждой алгебры можно рассмотреть число r/n, где r — размерность группы автоморфизмов алгебры, а n — размерность алгебры. Применительно к алгебрам с неприводимой (полупростой) алгеброй автоморфизмов имеет место следующий факт.

Наибольшая величина отношения r/n достигается в простых алгебрах Ли ($r/n=1$); следующие по величине значения r/n соответствуют алгебрам, построенным с помощью принципа включения по симметрическим пространствам (эти алгебры часто рассматриваются в математической литературе, они тесно связаны с простыми йордановыми алгебрами); следующие значения r/n реализуются на алгебрах, построенных с помощью принципа включения из однородных пространств с неприводимой группой изотропии; эти алгебры многочисленны и практически неизвестны. Таким образом, эти алгебры интересны тем, что имеют очень широкую группу автоморфизмов и в этом отношении они идут сразу за хорошо известными алгебрами.

Простейшими алгебрами из описанного класса являются алгебры, построенные с помощью принципа включения из однородных пространств $1m=2$ табл. 1; 5 табл. 3; $21m=3$; эти алгебры имеют размерность 27, 35, 45 соответственно и их группа автоморфизмов определена соответственно представлениями $\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}$, $\overset{4}{\circ}-\overset{1}{\circ}$, $\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ$. Эти алгебры изучены участниками семинара при кафедре геометрии Ж. Гурбановым и И. А. Дегтеревым. В пространстве указанных выше представлений был выбран базис из весовых векторов и вычислены структурные константы исследуемых алгебр в этом базисе. Описание алгебры с группой автоморфизмов, определяемой представлением $\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ$ см. в [20].

Отметим, что эта алгебра входит в серию алгебр с группой автоморфизмов, определяемой представлением $\overset{2}{\circ}-\circ\ldots\circ-\overset{1}{\circ}-\circ$. Алгебры, с группой автоморфизмов, определяемой представлениями $\overset{4}{\circ}-\overset{1}{\circ}$, $\overset{2}{\circ}-\overset{1}{\circ}-\circ$ определены однозначно с точностью до автоморфизма; эти алгебры кососимметричны. Существуют две алгебры с группой автоморфизмов, определяемой представлением $\overset{2}{\circ}-\overset{2}{\circ}$ — одна коммутативна, другая косокоммутативна: каждая определена однозначно с точностью до автоморфизма; всякая алгебра с указанной группой автоморфизмов имеет в качестве тензора структурных констант линейную комбинацию тензоров структурных констант, упомянутых двух однозначно определенных алгебр.

Весьма интересна задача описания алгебраических свойств этих алгебр. В настоящее время об этом известно совсем немного.

Отметим еще одну алгебру с неприводимой группой автоморфизмов, определяемой семимерным предствлением группы G_2. Эта алгебра связана с однородным пространством $SO(7)/G_2$. В отличие от других алгебр, определяемых изотропно неприводимыми пространствами, эта алгебра и ее алгебраические свойства известны: она изоморфна алгебре бесконечно малых преобразований лупы, представляющей собой множество чисел Кэли по модулю равных единице.

Алгебры с неприводимой группой автоморфизмов могут быть определены с помощью всякого однородного пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, такого, что представление Ad_H вполне приводимо на G (H и G алгебры Ли групп Ли $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$). В этом случае

$$G=H+B_1+B_2+\ldots+B_m, \tag{7}$$

где B_i, $i=1, 2, \ldots, m$ — инвариантные пространства в G. Если Ψ — представление алгебры Ли G, то (7) порождает разложение

$$\Psi(G)=\Psi(H)+\Psi(B_1)+\ldots+\Psi(B_m) \tag{8}$$

и на каждом матричном пространстве $\Psi(B_i)$ определена Ad_H-инвариантная билинейная операция

$$b_1\Box b_2=\mathrm{Пр}_{B_i}b_1b_2, \tag{9}$$

где $b_1, b_2\in\Psi(B_i)$, а $\mathrm{Пр}_{B_i}b_1b_2$ означает проектирование на $\Psi(B_i)$ в прямом разложении (8).

Для H типа A_1, G типа A_n и однородного пространства, определенного парой $H\subset G$, где H вложена в $G=SL(n+1)$ с помощью неприводимого представления $\overset{n}{\circ}$, разложение (8) имеет вид

$$SL(n+1,\ \mathbf{C})=H+B_1+B_2+\ldots+B_n. \tag{10}$$

При этом в пространствах B_i ограничение Ad_H эквивалентно неприводимому представлению $\overset{2i}{\circ}$ Из формулы Шлебша—Гордана, устанавливающей разложение на неприводимые компоненты тензорного произведения неприводимых представлений алгебры Ли A_1, следует, что каждое представление вида $\overset{2m}{\circ}$ задает группу автоморфизмов некоторой алгебры, определенной в пространстве представления, причем эта алгебра определена однозначно с точностью до изоморфизма. Пространства B_i, $i=1, 2, \ldots, n$, в (10) могут быть вычислены в явном виде (задача сводится к решению некоторой системы однородных линейных уравнений). Согласно принципу включения, структурные константы умножения (9) c_{jk}^{l} (в некотором базисе) определяют инвариантный тензор. Вычисление пространств B_i позволяет найти c_{jk}^{l} в явном виде (см., например, [20], [25], [62]).

Интересно отметить, что алгебры, рассмотренные Диксмье в серии статей 1982—1984 годов [66], [67], тесно связаны с описанными выше алгебрами, обладающими неприводимой группой автоморфизмов типа A_1. Рассмотрим линейные пространства L_{2m} полиномов от двух переменных x, y четной степени $2m$. В этом пространстве определена билинейная операция

$$f*g=\sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^{k} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \frac{\partial^{2m-k} g}{\partial y^{2m-k}} (-1)^k; \qquad (11)$$

так определенная алгебра изоморфна алгебре с неприводимой группой автоморфизмов, определяемой представлением $\overset{2m}{\circ}$

В упомянутых работах Диксмье рассмотрены алгебры, построенные в линейном пространстве полиномов от двух переменных степени $2m$ вида

$$f=a_0+\sum_{k=0}^{2m} a_k x^k y^{2m-k}$$

с законом умножения (11).

Исследованы алгебраические свойства этих алгебр, доказано, что для $m=2$, 3 эти алгебры изоморфны соответственно алгебре Йордана симметрических матриц третьего порядка и алгебре октав. Для $m>3$ группа автоморфизмов, задаваемая представлением $\overset{2m}{\circ}$ является максимальной.

Важная задача в общей проблеме описания алгебр с неприводимой группой автоморфизмов состоит в описании тех неприводимых представлений, которые оставляют инвариантным ненулевой тензор $c_{jk}^{\,l}$.

Эта задача эквивалентна следующей задаче из теории представлений:

Найти кратность, с которой неприводимое представление Φ полупростой алгебры Ли H входит в разложение $\Phi\otimes\Phi$.

Эта задача довольно сложна. Для алгебр H типа A_2, A_3 она решена в работах [14], [47], [48]. Есть частные результаты, относящиеся к A_u, A_n и другим простым алгебрам.

Известно, что множество Ω неприводимых представлений, оставляющих инвариантным тензор типа c_{jk}^{l} обладает полугрупповым свойством: если Φ_1, $\Phi_2\in\Omega$, то неприводимое представление $\Phi_1+\Phi_2$, старший вес которого равен сумме старших весов представлений Φ_1 и Φ_2, также принадлежит множеству Ω.

2. О тензорах, инвариантных относительно групп изотропии симметрических пространств. В работах А. М. Борзенко [6]—[12] рассмотрены неприводимые римановы симметрические пространства и группы изотропии этих пространств. Вычислена размерность пространств тензоров валентности $p\leqslant 6$, инвариантных относительно этих групп. Для тензоров валентности $p\leqslant 4$ установлено распределение инвариантных тензоров по «типам симметрии ортогональной группы». Это значит в частности, что для группы изотропии всякого симметрического пространства решена следующая задача. Группа изотропии $\Phi(H)$ является подгруппой ортогональной группы $SO(n)$, где n размерность симметрического пространства, $\Phi(H) \subset SO(n)$, и линейная группа $\Phi^{\otimes p}(H)$ является подгруппой $SO^{\otimes p}(n)$; всякое пространство, инвариантное относительно тензорной степени $\Phi^{\otimes p}(H)$, принадлежит тензорному линейному пространству, инвариантному относительно $SO^{\otimes p}(n)$, в частности каждый $\Phi^{\otimes p}(H)$-инвариантный тензор принадлежит некоторому $SO^{\otimes p}(n)$-инвариантному пространству, определяющему «тип симметрии ортогональной группы». Последний термин образован по аналогии с названием тензоров, составляющих неприводимое $GL^{\otimes p}(n)$-инвариантное пространство; как известно, эти тензоры обладают типом симметрии, характеризуемым некоторыми симметризаторами Юнга — «тип симметрии группы $GL(n)$».

Каждое неприводимое симметрическое риманово пространство имеет единственный (с точностью до множителя) симметрический, инвариантный относительно группы изотропии, тензор второй валентности. Если на этом пространстве имеется инвариантная почти комплексная структура, то группа изотропии оставляет инвариантным еще и кососимметрический тензор второй валентности.

Некоторые неприводимые симметрические пространства имеют тензор третьей валентности, определенный в касательном пространстве и инвариантный относительно группы изотропии. В работах [6], [8], [10] указаны такие симметрические пространства и вычислены компоненты инвариантных тензоров в специальном базисе.

Тензоры четвертой валентности, инвариантные относительно группы изотропии, имеются в каждом симметрическом пространстве, любой такой тензор может быть разложен в сумму инвариантных тензоров, принадлежащих определенному «типу симметрии ортогональной группы». В работах [6]—[12] вычислены размерности пространств тензоров валентности $\leqslant 6$, инвариантных относительно группы изотропии, и обладающих некоторым типом симметрии (для каждого неприводимого симметрического пространства и каждого типа симметрии). В таблице 4 приведены данные о размерности пространства тензоров валентности 3 и 4, инвариантных относительно групп изотропии симметрических пространств.

3. Теория инвариантных относительно группы изотропии тензоров применима к задаче вычисления алгебр когомологий компактных однородных пространств.

Всякий p-валентный кососимметрический тензор, инвариантный относительно группы изотропии однородного риманова про-

Таблаиц 4

G/H	2	3	4	5	6
AI	1	1	6	22	130
AII	1	1	6	22	130
AIII	2	0	24	0	720
BDI	1	0	9	0	225
DIII	2	0	18	0	420
CI	2	0	18	0	420
CII	1	0	9	0	225
EI	1	0	5	1	70
EII	1	0	8	0	200
EIII	2	0	18	0	380
EIV	1	1	5	15	70
EV	1	0	5	0	85
EVI	1	0	8	0	175
EVII	2	0	18	0	400
EVIII	1	0	5	0	69
EIX	1	0	8	0	175
FI	1	0	8	0	175
FII	1	0	5	0	55
G	1	0	8	0	170

странства, известным образом порождает на однородном пространстве внешнюю дифференциальную форму степени p, а эта форма в свою очередь порождает p-мерный класс когомологий с вещественными коэффициентами данного однородного пространства.

В работах [1], [3], [4] рассмотрены простые группы Ли $\mathfrak{Y}$, как симметрические пространства. Построены некоторые кососимметрические Ad_H-инвариантные тензоры. Показано, что эти тензоры порождают образующие в алгебрах когомологий соответствующих компактных групп Ли. Построение этих тензоров выполнено на основе принципа включения. Каждый такой тензор определен полилинейной формой на алгебре Ли H (отождествляемой с касательным пространством к $\mathfrak{Y}$ в единице), имеющий вид

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_p) = \mathrm{Sp}\{\Psi(X_1)\cdot\Psi(X_2)\ldots\Psi(X_p)\},$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_p \in H$, Ψ — некоторое представление алгебры Ли H, а фигурные скобки означают операцию альтернирования. Все построенные таким образом тензоры имеют нечетную валентность. Оказалось, что для такого построения недостаточно простейших представлений Ψ простых классических алгебр Ли H. Вычисление размерности пространства всех инвариантных относительно некоторой ортогональной линейной группы кососимметрических тензоров может быть осуществлено с помощью следующего приема.

Рассмотрим вложение $\Phi(\mathfrak{Y}) \subset \mathrm{SO}(2n)$, где Φ — ортогональное представление группы $\mathfrak{Y}$, $\mathrm{SO}(2n)$ — ортогональная группа порядка $2n$. Рассмотрим спинорное представление алгебры Ли $SO(2n)$, т. е. прямую сумму двух полуспинорных представлений, и ограничение этого представления на алгебру $\Phi(H)$. Последнее представление задает приводимую линейную алгебру Ли $\mathrm{Spin}\,\Phi(H)$, действующую в комплексном пространстве представления $\mathrm{Spin}SO(2n)$. Всякий линейный оператор, действующий в этом пространстве может быть отождествлен с некоторой полилинейной формой в исходном линейном пространстве, а инвариантные полилинейные формы могут быть отождествлены с линейными операторами, коммутирующими со всеми операторами линейной алгебры Ли $\mathrm{Spin}\Phi(H)$. Размерность пространства линейных операторов коммутирующих с операторами $\mathrm{Spin}\Phi(H)$ легко вычислить, если знать разложение на неприводимые компоненты ограничения $\mathrm{Spin}\Phi(H)$. Именно, если такое разложение имеет вид

$$\mathrm{Spin}\,\Phi(H) = \sum_l k_l \chi_l(H), \tag{12}$$

где k_l — натуральные числа, обозначающие кратности, с которыми неприводимое представление χ_l входит в разложение $\mathrm{Spin}\,\Phi(H)$, то искомая размерность, в силу леммы Шура, равна $\sum_l k_l^2$.

Разложение (12) вычислено в работах [1], [2] для присоединенных представлений простых алгебр Ли. В работе [51] это разложение получено для Φ, заданного схемой $\overset{2}{\circ}\!-\!\overset{2}{\circ}$.

Явное задание дифференциальных форм, порождающих образующие алгебры когомологий простых компактных групп Ли $\mathfrak{G}$ позволяет построить дифференциальные формы, задающие образующие алгебры когомологий для однородных пространств $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$, где подгруппа $\mathfrak{Y}$ вполне не гомологична нулю в $\mathfrak{G}$ — такие формы представляют собой некоторые из Ad_G-инвариантных на G кососимметрических форм, ограниченных на линейное пространство B; как обычно, $G = H + B$ означает Ad_H-инвариантное разложение алгебры Ли G и B отождествляется с касательным пространством к $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$.

Для компактных однородных пространств $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ нормального положения (см. [21], [41], [61]) можно, по-видимому, построить кососимметрические тензоры четной валентности применяя некоторую модификацию описанного метода.

4. Представляет интерес задача о тензорах, инвариантных относительно присоединенного представления простой группы. В работах [8], [11], вычислена размерность пространства тензоров инвариантных относительно присоединенного представления группы $SL(n)$ валентности не превосходящей шесть и с заданным типом симметрии Юнга.

5. В работах [16], [17], [46] поставлена и решена задача описания трилинейных операций в простых алгебрах Ли, инвариант-

ных относительно присоединенного действия соответствующей группы Ли.

Размерность пространства тензоров c^i_{jk} структурных констант таких тернарных алгебр вычислена в работах [8], [11]. Оказалось, что каждая тернарная операция в простой алгебре Ли является линейной комбинацией тернарных операций вида

$$\begin{gathered}\langle A, B, C\rangle_1 = \mathrm{Sp}(AB)\cdot C,\\ \langle A, B, C\rangle_2 = \mathrm{Пр} ABC,\end{gathered} \tag{13}$$

где A, B, C — матрицы представления Ψ простой алгебры Ли H, символом Пр обозначена проекция матриц на линейное пространство, составленное из матриц представления $\Psi(H)$, относительно скалярного произведения Картана $(A, B) = \mathrm{Sp} AB$, а также тернарных операций, полученных из (13) перестановкой аргументов.

Отметим, что далеко не каждая инвариантная тернарная операция выражается через двойные коммутаторы. Кроме того, для описания множества инвариантных тернарных операций в некоторых простых алгебрах Ли с помощью (13) недостаточно использовать только представления алгебры Ли H минимальной размерности.

Отметим следующий факт, вытекающий из работы [47]. Алгебры Ли B_m, C_n, D_p, $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$, $p\geqslant 3$, в отличие от особых алгебр Ли E_6, E_7, E_8, G_2, F_4, обладают 6-мерным пространством тензоров четвертой валентности, инвариантных относительно присоединенного представления (особые простые алгебры имеют лишь пятимерное инвариантное пространство). Инвариантные тензоры четвертой валентности b_{ijkl} с помощью метрического тензора известным образом задают тензоры вида c^i_{jkl} — структурные константы инвариантной тернарной операции.

Пять линейно независимых тернарных операций на простых алгебрах (E_6, E_7, E_8, G_2, F_4, B_m, C_n, D_p, $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$, $p\geqslant 3$) можно взять в виде (13):

$$\begin{gathered}\langle A, B, C\rangle_1 = \mathrm{Sp}(AB)\cdot C,\ \langle A, B, C\rangle_2 = \mathrm{Sp}(AC)B,\\ \langle A, B, C\rangle_3 = \mathrm{Sp}(BC)A,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\langle A, B, C\rangle_4 = [A, [B, C]],\ \langle A, B, C\rangle_5 = [C, [A, B]] \tag{15}$$

Более точно: для неприводимых представлений минимальной размерности тернарные операции (13) линейно независимы.

Шестая тернарная операция на B_m, C_n, D_p определяется симметрическим тензором четвертой валентности, инвариантным относительно присоединенного представления, т. е. инвариантным относительно присоединенного представления многочленом четвертой степени. В алгебрах B_m, C_n, D_p кольцо инвариантных многочленов содержит в качестве образующего многочлен четвертой степени, а в особых алгебрах кольцо многочленов не имеет образующей четвертой степени. Поскольку образующим кольца инвариантов присоединенного представления простой алгебры Ли взаимно однозначно соответствуют образующие кольца когомологий соответствующей компактной группы Ли (образующему многочлену степени k соответствует класс когомологий степени $2k-1$), то различие между классическими алгебрами Ли B_m, C_n, D_p и особыми можно толковать так: у классических алгебр Ли в отличие от особых есть семимерный нетривиальный класс когомологий.

6. Тернарные операции, инвариантные относительно групп изотропии неприводимых римановых пространств. Пусть $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ — симметрическое неприводимое пространство и

$$G=H+B, \tag{16}$$

— Ad_H-инвариантное разложение комплексной алгебры Ли G. Известно, что для неприводимого симметрического пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ линейное пространство B под полем **C** либо неприводимо относительно Ad_H, либо разлагается в прямую сумму двух неприводимых подпространств, таких, что ограничения Ad_H в них взаимноконтрагредиентны и не ортогональны. (Если B разлагается в сумму двух неприводимых подпространств, симметрическое пространство обладает инвариантной почти комплексной структурой, см. § 2).

Если алгебра G в (16) линейна (задана некоторым представлением Ψ), то функция

$$f(b_1, b_2, b_3, b_4)=\mathrm{Sp}\, b_1b_2b_3b_4, \tag{17}$$

где $b_i \in \Psi(G)$, $i=1, 2, 3, 4$. в соответствии с принципом включения, являются Ad_H-инвариантными или, что то же самое, инвариантными относительно группы изотропии; то же справедливо и относительно функций, полученных из (17) перестановкой аргументов. С помощью инвариантного на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ метрического тензора четырехлинейная инвариантная форма (17) может быть преобразована в инвариантное трилинейное отображение, задающее тернарную операцию на B, инвариантную относительно группы изотропии, а именно

$$\langle b_1, b_2, b_3\rangle=\mathrm{Пр}_B\, b_1b_2b_3. \tag{18}$$

Здесь символ $\mathrm{Пр}_B$ означает проекцию матриц на линейное матричное пространство $\Psi(B)$. Разумеется, перестановка аргументов в (18) переводит трилинейное отображение (18) в другое инвариантное трилинейное отображение.

В основном (т. е. исключая несколько симметрических пространств малой размерности), все симметрические пространства (неприводимые римановы) делятся на три множества по размерности пространства четырехвалентных тензоров, инвариантных относительно группы изотропии. Эти размерности для каждого из упомянутых множеств таковы: 5, 8, 18.

Симметрические пространства с 8 инвариантными четырехвалентными тензорами, в отличие от симметрических пространств с 5 инвариантными тензорами, обладают инвариантной почти-комплексной структурой. При этом в разложении (16) линейное пространство Ad_H-приводимо, т. е.

$$G=H+B_1+B_2, \tag{19}$$

и ограничения Ad_H на B_1 и B_2 неприводимы и взаимноконтрагредиентны и не ортогональны.

Инвариантные тернарные операции в этих случаях можно строить по формулам

$$\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \mathrm{Пр}_{B_i} b_1 b_2 b_3, \tag{20}$$

где $\mathrm{Пр}_B$ означает проекцию на B_i; разумеется, инвариантными трилинейными отображениями будут функции (20), где в правой части стоят произведения матриц b_1, b_2, b_3, взятых в любом порядке. Этими тернарными операциями вместе с операциями (14) и исчерпывается множество тернарных операций, инвариантных относительно групп изотропии тех симметрических пространств, которые обладают восьмимерным пространством инвариантных четырехиндексных тензоров.

Симметрические пространства с 18 линейно независимыми тензорами касательного пространства, инвариантными относительно группы изотропии, имеют следующую особенность. Для этих пространств разложение (16) имеет вид (19), что означает наличие инвариантной почти-комплексной структуры, и, кроме того, алгебра Ли H не проста, а является суммой двух простых алгебр $H=H_1+H_2$.

Для этих пространств нетривиальны (и инвариантны относительно группы изотропии) следующие тернарные операции.

$$\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \mathrm{Пр}_{B_i}((\mathrm{Пр}_{H_j} b_1 b_2)\cdot b_3). \tag{21}$$

Здесь $\mathrm{Пр}_{B_i}$ и $\mathrm{Пр}_{H_j}$ означает проекцию матриц на линейные матричные пространства H_j $j=1, 2$, и B_i $i=1, 2$, соответственно. (Предполагается как обычно, что G является линейной алгеброй, заданной с помощью некоторого (произвольного) представления Ψ. Переставляя аргументы b_1, b_2, b_3 в правой части (19), будем получать новые инвариантные тернарные операции.

Оказывается, что в симметрических пространствах с восемнадцатью независимыми инвариантными четырехвалентными тензорами всякая инвариантная тернарная операция линейно выражается через операции (19) (с различным порядком расстановки b_1, b_2, b_3 в правой части) и через операции вида (14).

Описанные выше факты доказаны в работах [16], [17], [18].

7. Задача описания инвариантов заданного неприводимого представления Φ полупростой группы Ли H, как известно, рав-

носильна задаче описания симметрических тензоров инвариантных относительно $\Phi(H)$.

Как было отмечено выше, принцип включения позволяет строить инвариантные относительно $\Phi(H)$ тензоры, если найдено однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ такое, что разложение Ad_H на G,

$$G=H+B_1+B_2+\ldots+B_m \tag{22}$$

при ограничении на одно из Ad_H-неприводимых пространств B_i эквивалентно Φ.

Для некоторых простых, но интересных в практическом отношении представлений Φ такое разложение может быть найдено.

Например, если Φ задано представлением старшего веса $\overset{3}{\circ}\!-\!\circ$, то указанному выше условию удовлетворяет однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{G}$ — линейная группа $\mathrm{SU}(8)$, а $\mathfrak{H}$ вложена в $\mathfrak{G}$ представлением $\overset{1}{\circ}\!-\!\overset{1}{\circ}$. Имеем

$$G=H+B_1+B_2, \tag{23}$$

и ограничения Ad_H на H, B_1, B_2 эквивалентны соответственно неприводимым представлениям старших весов $\overset{1}{\circ}\!-\!\overset{1}{\circ}$, $\overset{3}{\circ}\!-\!\circ$, $\circ\!-\!\overset{3}{\circ}$. (Отметим, кстати, что рассматриваемое пространство является изотропно неприводимым и обладает инвариантной почти-комплексной структурой, см. § 2).

Если группа $\mathrm{SU}(3)$ (или соответствующая комплексная группа $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$) действует в пространстве переменных x, y, z, то рассматриваемое представление Φ действует в пространстве линейных комбинаций мономов x^3, x^2y, x^2z, xy^2, xyz, xz^2, y^3, y^2z, yz^2, z^3 и индуцирует действие в пространстве кривых проективной плоскости.

Используя разложение (23), построим функции

$$f_k(\vec{x})=\mathrm{Sp}\Big(\sum_i x_i b_i\Big)^k, \tag{24}$$

где матрицы $b_i \in B$ составляют базис в пространстве B_1, $\Sigma x_i b_i$ — общий элемент в этом пространстве. При $k=4$, 6, функции (24) определяют хорошо известные из теории проективных кривых третьего порядка инвариантные многочлены.

Более сложная и менее исследованная задача связана с описанием инвариантов представления $\overset{4}{-}\!\circ\!-\!\circ$. Инварианты этого представления можно построить с помощью однородного пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{G}=\mathrm{SL}(64, \mathbf{C})$, а алгебра Ли H имеет тип A_3 и включена в G с помощью представления $\overset{1}{\circ}\!-\!\overset{1}{\circ}\!-\!\overset{1}{\circ}$. Можно показать, что разложение (22) на G содержит компоненту B_1, в которой

Ad_H действует как представление старшего веса $\overset{4}{\circ}\!-\!\circ\!-\!\circ$. Решая соответствующую систему линейных уравнений, можно выделить в алгебре Ли G указанное линейное пространство и построить базис этого пространства $b_1, b_2, \ldots, b_{35}$. При этом многочлены

$$f(\vec{x}) = \sum_i (x_i b_i)^k$$

степени k будут инвариантны относительно искомого представления. Явно выписанные инварианты представления $\overset{4}{\circ}\!-\!\circ\!-\!\circ$ существенно упрощают задачу классификации гиперповерхностей четвертого порядка в трехмерном проективном пространстве. Общие соображения показывают, что функционально независимых инвариантов представления $\overset{4}{\circ}\!-\!\circ\!-\!\circ$ существует довольно много (орбита общего положения этого тридцатипятимерного представления имеет размерность 15). Вычисления и исследование инвариантов представления $\overset{3}{\circ}\!-\!\circ$ по изложенной выше схеме даны в работе [37].

8. В работе [59] вычислены размерности пространств тензоров валентности 3 и 4 инвариантных относительно группы изотропии некоторых изотропно-неприводимых пространств, см. § 2.

9. Пусть $\mathfrak{G}$ — линейная группа Ли и $\mathfrak{H}$ её подгруппа, действующая в линейном пространстве L. Всякий тензор пространства L, инвариантный относительно $\mathfrak{G}$, будет инвариантным и относительно $\mathfrak{H}$. Интересно проследить, как уменьшается запас инвариантных тензоров при переходе от подгруппы $\mathfrak{H}$ к группе $\mathfrak{G}$.

Этот вопрос может быть исследован с помощью принципа включения для неприводимых линейных групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ в той части, которая связана с тензорами третьей и четвертой валентности. Нетривиальные пары $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ неприводимых линейных групп, т. е. такие пары, где $\mathfrak{G}$ не совпадает с классическими линейными группами $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$, $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$, приведены в работе [27]. Основная трудность описанной выше задачи состоит в исследовании именно таких пар.

10. Исследование полилинейных отображений, инвариантных относительно неприводимых представлений группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, предпринято в работах [24], [25], [51].

Пусть φ_p, φ_q, φ_r — три неприводимых представления группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ размерностей $p+1$, $q+1$, $r+1$ соответственно, действующих в пространствах L_p, L_q, L_r. Задача описания билинейных отображений

$$f : L_p \otimes L_q \to L_r, \tag{25}$$

инвариантных относительно представлений φ_p, φ_q, φ_r, т. е. таких, что из $f(x, y) = z$ следует $f(\varphi_p x, \varphi_p y) = \varphi_r(z)$ имеет следующее решение.

Нетривиальные отображения (25) существуют тогда и только тогда, когда $p+q-r$ четно и $|p-q| \leqslant r \leqslant p+q$. Если указанные условия выполняются, то существует единственное (с точностью до множителя) нетривиальное отображение (25), которое можно задать удобными формулами, если использовать следующие модели пространств L_p, L_q, L_r и действующих в них представлений φ_p, φ_q, φ_r. Именно, можно считать, что L_p, L_q, L_r являются пространствами многочленов от двух переменных x, y степеней p, q, r — соответственно, в которых действие представлений φ_p, φ_q, φ_r индуцировано действием группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ в двумерном пространстве переменных x, y. При этом операция f, заданная формулой

$$f(g, h) = \sum_{k=0}^{p+q-r} C_{p+q-r}^{k} \frac{\partial^k g}{\partial x^k} \frac{\partial^{p+q-r-k}}{\partial y^{p+q-r-k}} (-1)^k, \qquad (26)$$

нетривиальна и инвариантна относительно φ_p, φ_q, φ_r (если $p = q = r$, то (26) совпадает с алгебрами (9)). В дальнейшем операцию f при фиксированных p, q, r будем обозначать через $D_{p,q}^{r}$.

Ниже приводится описание трилинейных операций, определенных в L_p и инвариантных относительно представления φ_p, действующего в L_p — результаты работ [24], [25], [51]. В этих работах доказано, что линейное пространство инвариантных трилинейных операций в L_p имеет размерность $p+1$ и указан базис этого пространства. В качестве такого базиса можно взять трилинейные отображения:

$$D_{p0}^{p} \circ D_{pp}^{0},\ D_{p2}^{p} \circ D_{pp}^{2},\ \ldots,\ D_{p2p}^{p} \circ D_{pp}^{2p}. \qquad (27)$$

Некоторые модификации формул (26), задают инвариантные трилинейные операции в пространствах, где действует симплектическая группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ [26].

Задача вычисления размерности пространства тензоров, инвариантных относительно действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, представляет определенный интерес для теории и приложений. Эта задача может быть сведена к решению некоторой системы линейных уравнений вида

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i, \qquad (28)$$

где $a_{ij} = 0$ при $i < j$, $a_{ii} = 2i$,

$$a_{ij} = \begin{cases} -2p, & i - j \not\equiv 0 \bmod (2k+2), \\ 2kp, & i - j \equiv 0 \bmod (2k+2), i > j \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 2p, & i \not\equiv 0 \bmod (k+1), \\ -2kp, & i \equiv 0 \bmod (k+1), \end{cases}$$

Искомая размерность равна разности $x_{kp} - x_{kp-1}$. Заметим, что вычисление размерности пространства симметрических тензоров, инвариантных относительно представления φ_p группы $SL(2, \mathbf{C})$ (т. е. размерность пространства инвариантов), была актуальной задачей до конца шестидесятых годов двадцатого века: в работе [70] эти размерности были найдены для представлений φ_7 и φ_8. Решение общей задачи о размерности пространства инвариантов представления дано в [58] и связано с весьма громоздкой и малоудобной формулой.

Инварианты представлений группы $SL(2, \mathbf{C})$ существенны в вопросах классификации тензоров. Действительно, классификация тензоров в пространстве представления группы $SL(2, \mathbf{C})$ эквивалентна классификации орбит тензоров под действием изучаемого представления. Для представлений Φ простых групп Ли, размерность которых превосходит размерность группы регулярные орбиты имеют размерность группы, и стационарная подгруппа регулярного тензора имеет размерность нуль. Основная трудность задачи классификации тензоров связана с исследованием сингулярных орбит; тензоры, принадлежащие таким орбитам, обладают нетривиальной группой инвариантности (нетривиальным стабилизатором). «Наименьшей» полупростой группой инвариантности является $SL(2, \mathbf{C})$, что и определяет важность задачи исследования тензоров инвариантных относительно линейной группы типа A_1.

Частные случаи этой задачи рассмотрены в [24], [25].

11. В работах [61], [64] отмечено, что система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = [\alpha(X), X], \tag{29}$$

где $X = X(t)$ кривая в полупростой алгебре Ли H, а $\alpha(X)$ — произвольное отображение $H \to H$, имеет первые интегралы вида

$$F(X) = C, \tag{30}$$

где F — инвариантный относительно присоединенного представления многочлен; при особым образом выбранных операторах $\alpha(X)$ инварианты присоединенного представления порождают дополнительные интегралы системы.

В работах [61], [63] исследована система дифференциальных уравнений (29), где $X(t)$ — кривая в пространстве L представления Φ полупростой группы $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ — однородное пространство такое, что

$$G = H + B_1 + B_2 + \ldots + B_m,$$

Ad_H — инвариантное разложение алгебры Ли G группы $\mathfrak{G}$ и ограничение Ad_H на пространство B_i эквивалентно Φ, то для системы уравнений (29), где оператор α отображает пространство L в H, а $[\alpha(X), X]$ означает коммутатор элементов $\alpha(X)$ и X в алгебре Ли G, инварианты представления F порождают первые интегралы системы $F(X) = C$.

Для представления Ф, заданного схемой $\circ^6$ проведены соответствующие вычисления. Инвариантные многочлены степеней 2, 4, 6, 10 были вычислены на ЭВМ [64].

ЛИТЕРАТУРА

1. Батчаев З. Ю., О спинорных представлениях полупростых алгебр групп изотропии некоторых симметрических пространств. Дифференц. геометрия и алгебры Ли. Моск. обл. пед. ин-т. М., 1983, 19—23. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 17 апр. 1984 г. № 2384—84 Деп) (РЖМат, 1984, 8А756ДЕП).
2. —, Спинорные представления некоторых полупростых алгебр групп изотропии симметрических пространств. Некотор. прил. дифференц. геометрии. М., 1985, 43—45. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 июня 1985, № 4531—85 Деп.) (РЖМат, 1985, 10А472ДЕП.)
3. —, О кососимметрических формах, инвариантных относительно изотропного представления некоторых симметрических пространств. Дифференц. геом. и теория представлений полупрост. алгебр Ли. М., 1985, 5—13, ил. Библиогр. 1 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9.12.85, № 8443—В) (РЖМат, 1986, 4А653ДЕП.)
4. —, О кососимметрических формах, инвариантных относительно изотропного представления симметрического пространства $Sp(n)$. Принцип включения и инвариант. тензоры. М., 1986, 18—21. Библиогр. 1 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В)
5. *Борель А.*, О когомологиях главных расслоенных пространств групп Ли. В сб. Расслоенные пространства и их приложения. М.: ИЛ, 1965, 163—244
6. *Борзенко А. М.*, Об инвариантных k-линейных формах на симметрических пространствах. Прикл. вопр. дифференц. геометрии. Вып. 1. М., 1982, Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 7 апр. 1982 г., № 1648—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 8А714ДЕП.)
7. —, Об инвариантных k-линейных формах на симметрических римановых пространствах. Дифференц. геометрия и прил. М., 1982, 18—37. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, 22.03.83, № 1442—83ДЕП.) (РЖМат, 1983, 7А669 ДЕП.)
8. —, Об инвариантных тензорах на симметрических пространствах. Вопр. теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1983, 130—131 (РЖМат, 1984, 5А196)
9. —, О типах симметрий инвариантных тензоров на симметрических пространствах. Прикл. вопр. дифференц. геометрии. М., 1983, 3—22. Библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11 окт. 1983 г., № 5570—83 Деп.) (РЖМат, 1984, 2А722 ДЕП.)
10. —, О типах симметрий инвариантов симметрических пространств. Изв. вузов. Мат., 1984, № 5, 73—75 (РЖМат, 1984, 10А645)
11. —, К вопросу об инвариантных тензорах на симметрических пространствах. Дифференц. геометрия и алгебры Ли. Моск. обл. пед. ин-т. М., 1983, 24—37. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, 17 апр. 1984, № 2384—84 Деп.) (РЖМат, 1984, 8А757 ДЕП.)
12. —, Вычисление инвариантных тензоров представлений полупростых алгебр Ли. Некотор. прил. дифференц. геометрии. М., 1985, 46—57. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 июня 1985 г., № 4531—85 Деп.) (РЖМат, 1985, 10А472 ДЕП.)
13. *Вейль Г.*, Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947, 265 с.
14. *Волотова Н. Б., Гоза Н. И., Донеева Т. В.*, О тензорах структурных констант, инвариантных относительно неприводимого представления группы SL (4, **C**). Дифференц. геометрия и теория представлений полупрост.

алгебр Ли. М., 1985, 20—26. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9.12.85, № 8443—В) (РЖМат, 1986, 4А654 ДЕП.)

15. *Гоза Н. И., Дегтерев И. А., Пинчук И. В.,* О некотором классе алгебр, связанных с супералгебрами Ли. Дифференц. геометрия и теория представлений полупрост. алгебр Ли. М., 1985, 27—31. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, 9.12.85 № 8443—В) (РЖМат, 1986, 4А313 ДЕП.)
16. *Дегтерев И. А.,* О тернарных операциях, инвариантных относительно присоединенного представления группы SO $(n, \mathbf{C})$. Материалы 8 конф. мол. ученых ун-та дружбы народов: Мат., физ. химия. Москва 19—23 февр. 1985, ч. 2 М., 1985, 244—247. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 мая 1985 г., № 3714—85 Деп.) (РЖМат, 1985, 9А133 ДЕП.)
17. —, О тернарных операциях, инвариантных относительно присоединенного представления группы SL $(n, \mathbf{C})$. Некоторые приложения дифференц. геометрии. М., 1985, 58—65. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 июня 1985 г., № 4531—86 Деп.) (РЖМат., 1985, 10А474 ДЕП.)
18. —, Инвариантные тернарные алгебры на симметрических пространствах. Принцип включения и инвариантные тензоры. М., 1986, 27—32. Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В) (РЖМат, 1986, 5А807 ДЕП.)
19. —, Об инвариантных тензорах представления $\substack{21\\000}$. Принцип включения и инвариантные тензоры. М., 1986, 22—26. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В) (РЖМат, 1986, 5А774 ДЕП.)
20. —, Об алгебре Рашевского однородного пространства SO $(n^2—1)$/SU(n). Материалы 8 Конф. мол. ученых ун-та дружбы народов: Мат., физ., химия. М., 19—23 февр. 1985, ч. 1, М., 1985, 219—221. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 мая 1985 г. № 3713—85 Деп.) (РЖМат, 1985, 10А490 ДЕП.)
21. *Доан Куинг,* Полиномы Пуанкаре некоторых компактных однородных пространств с неприводимой стационарной подгруппой. Труды семинара по вект. и тензор. анализу, вып. XIV, МГУ, 1968, 33—93
22. *Дорофеев С. Н.,* Об орбитах наибольшей размерности для полупростых линейных групп Ли в пространствах представления. Прикл. вопр. дифференц. геометрии. М., 1983, 53—57. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 1 окт. 1983 г., № 5570—83 Деп.) (РЖМат, 1984, 2А484 ДЕП.)
23. —, О некоторых сингулярных четырехвалентных тензорах. Некотор. прил. дифференц. геометрии. М., 1985, 76—84. Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 июня 1985 г., № 4531—85 Деп.) (РЖМат, 1985, 10А476ДЕП.)
24. —, Об орбитах некоторых линейных комбинаций весовых векторов в пространстве представления. Пространства над алгебрами и некотор. вопр. теории сетей. Уфа, 1985, 155—160 (РЖМат, 1986, 3А661)
25. —, О полилинейных отображениях, инвариантных относительно неприводимого представления алгебры Ли sl $(2, \mathbf{C})$. Дифференц. геом. и теория представлений полупростых алгебр Ли. М., 1985, 57—70. Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, 9.12.85, № 8443—В) (РЖМат, 1986, 4А658 ДЕП.)
26. —, *Колесова Т. И.,* О разложении одного тензорного произведения симплектической группы. Дифференц. геом. и теория представлений полупростых алгебр Ли. М., 1985, 71—75. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9.12.85, № 8443—В) (РЖМат, 1986, 4А656 ДЕП.)
27. Дынкин Е. Б., Максимальные подгруппы классических групп. Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, *1*, 39—166
28. —, Топологические характеристики гомоморфизмов компактных групп Ли. Мат. сб., 1954, *35*, № 1, 129—173 (РЖМат, 1955, 2607)
29. *Картан Э.,* Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: ИЛ, 1949, 346 с.
30. *Козлов В. А.,* О типах симметрии тензоров пятой валентности, инвариантных относительно присоединенного представления алгебры Ли SL(3).

Принцип включения и инвариант. тензоры. М., 1986, 59—67. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В) (РЖМат, 1986, 5А775 ДЕП.)
31. *Колесова Т. И.*, Об одной задаче теории представлений, связанной с однородными римановыми пространствами. Изв. вузов. Мат., 1977, № 11, 122—123 (РЖМат, 1978, 11А745)
32. —, Об однородных пространствах с малым числом неприводимых компонент группы вращений. Изв. вузов. Мат., 1980, № 4, 96—98 (РЖМат, 1980, 10А510)
33. —, Некоторые классы однородных римановых пространств с приводимой группой вращений. Геометр. методы в задачах анализа и алгебры. Ярославль, 1981, 53—63 (РЖМат, 1982, 3А804)
34 *Комраков Б. П.*, Структуры на многообразиях и однородные пространства. Минск: Наука и техника, 1978, 126 с.
35. —, *Чекалин И.*, Инвариантные структуры и однородные пространства. Изв. АН БССР, 1978, № 1, 20—23
36. *Кушнер Г. Ф.*, Об одном свойстве тензора кручения в однородных римановских пространствах Мантурова О. В. Тр. семинара по векторн. и тензор. анализу, 1966, вып. XIII, МГУ, 146—167
37. *Логунов И. С.*, Об инвариантах одного представления группы Ли SL(3). Принцип включения и инварианти. тензоры. М., 1986, 68—73. Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В) (РЖМат, 1986, 5А822 ДЕП.)
38. *Мантуров О. В.*, Об однородных римановых пространствах с неприводимой группой вращений. Докл. АН СССР. 1961, *141*, № 4, 792—795 (РЖМат, 1962, 8А373)
39. —, Римановы пространства с неприводимой группой вращений и ортогональными и симплектическими группами движений. Докл. АН СССР, 1961, *141*, № 5, 1034—1037 (РЖМат, 1962, 8А372)
40. —, Однородные римановы пространства с неприводимой группой вращений. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. 1966, вып. XIII, МГУ, 68—145
41. —, О полиномах Пуанкаре некоторых однородных пространств. Тр. семинара по векторн. и тензор. анализу, 1968, вып. XIV, МГУ, 20—32
42. —, О тензорных пучках над комплексными образующими пучками на сферах. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1970, вып. XV, МГУ, 119—127 (РЖМат, 1971, 2А472)
43. —, Образующие в комплексном *K*-функторе компактных однородных пространств. Мат. сб., 1973, *90*, № 1, 48—85 (РЖМат, 1973, 6А580)
44. —, Об одном целочисленном уравнении, связанном с однородными римановыми пространствами. Изв. вузов. Мат., 1978, № 11, 70—73 (РЖМат, 1979, 5А670)
45. —, Стабилизация коэффициентов Клебша—Гордана для полупростых алгебр Ли. Прикл. вопр. дифференц. геометрии. Вып. 1. М., 1982, 3—13. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 7 апр. 1982 г. № 1648—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 10А411 ДЕП.)
46. —, Когомологии однородных пространств и спинорное представление группы изотропии. Дифференц. геометрия и алгебры Ли. Моск. обл. пед. ин-т. М., 1983, 3—10. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 17 апр. 1984 г., 2384—84 Деп.) (РЖМат, 1984, 8А202 ДЕП.)
47. —, Алгебры с неприводимой группой автоморфизмов. Тезисы докладов VIII конференции по современным проблемам дифференц. геометрии. Одесса, 1984, 95
48. —, Алгебры с неприводимой группой автоморфизмов. Докл. АН СССР, 1985, *281*, № 5, 1048—1051
49. —, Принцип включения и тензорные инварианты. Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по общей топологии. Тирасполь, 1985
50. —, Полилинейные отображения в алгебрах Рашевского. Некоторые приложения дифференциальной геометрии. М., 1985, 3—13. Библиогр. 7 назв.

(Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 июня 1985 г., № 4531—85 Деп.) (РЖМат, 1985, 10А470 ДЕП.)
51. —, Заметка об одной задаче разложения кронекеровского произведения Дифференц. геометрия и теория представлений полупростых алгебр Ли. М., 1985, 3—4, ил. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9.12.85, № 8443—13) (РЖМат, 1986, 4А652 ДЕП.)
52. —, О принципе включения. Принцип включения и инвариант. тензоры. М., 1986, 3—11. Библиогр. 15 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В) (РЖМат, 1986, 5А773)
53. —, *Дектерев И. А.*, Инвариантные тернарные алгебры на простых алгебрах Ли. Докл. АН СССР, 1986 (в печати)
54. —, *Мартынюк А. Н.*, Об объемах орбит в некоторых пространствах. Некотор. прил. дифференц. геометрии. М., 1985, 14—20. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 июня 1985 г. № 4531—85 ДЕП.)
55. *Пинчук И. И.*, О бинарных инвариантных операторах на прямой. Принцип включения и инвариант. тензоры. М., 1986, 97—112. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В) (РЖМат, 1986, 5Б1127 ДЕП.)
56. *Рашевский П. К.*, О геометрии однородных пространств. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, М.-Л., 1952, вып. IX, 49—74
57. *Сабинин Л. В.*, О классификации трисимметрических пространств. Докл. АН СССР, *194*, № 3, 1970, 518—520 (РЖМат, 1971, 2А646)
58. *Спрингер Т.*, Теория инвариантов. Пер. с англ. М.: Мир, 1982, 247 с.
59. *Сурманидзе Р. М.*, Об инвариантных тензорных полях на однородных пространствах Мантурова. Принцип включения и инвариантные тензоры. М., 1986, 126—131. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В) (РЖМат, 1986, 5А827 ДЕП.)
60. *Фоменко А. Т.*, Полиномы Пуанкаре некоторых однородных пространств. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, вып. XIV, МГУ, 1970, 128—152 (РЖМат, 1971, 3А433)
61. —, Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. М.: МГУ, 1983, 217 с. (РЖМат, 1983, 12А741К)
62. *Черкашина С. М.*, Об интегрировании систем дифференциальных уравнений, связанных с однородными пространствами. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 12, 2184—2187 (РЖМат, 1986, 6А974)
63. —, Инвариантные многочлены семимерного неприводимого представления группы SL(2, **C**). Дифференц. геометрия и теория представлений полупростых алгебр Ли. М., 1985, 129—140. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9.12.85, № 8443—В) (РЖМат, 1986, 4А657 ДЕП.)
64. —, К вопросу об инвариантах некоторых представлений алгебры Ли sl(2, **C**). Принцип включения и инвариант. тензоры. М., 1986, 132—134, ил. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.01.86, № 426—В) (РЖМат, 1986, 5А776 ДЕП.)
65. *Эльмахи С. А.*, Объемы орбит в некоторых однородных пространствах. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, вып. XXII, МГУ, 1986, 187—189
66. *Dixmier J.*, Série de Poincaré et systèmes de paramètres pour les invariants des formes binaires. Acta sci. math., 1983, *45*, № 1—4, 151—160 (РЖМат, 1984, 4А479)
67. —, Certaines algèbres non assosiatives simples définies par la transvection des formes binaires. J. reine und angew. Math., 1984, *346*, 110—128 (РЖМат, 1984, 8А245)
68. *Hilbert D.*, Gesammelte Abhandlungen Bd 2. Algebra. Invarianttheorie Geometrie. 2. Aufl. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1970, VIII, 452 S. (РЖМат, 1971, 3А9К)
69. *Schwarz G. W.*, Invariant theory of G_2. Bull. Amer. Math. Soc., 1983, *9*, № 3, 335—338 (РЖМат, 1984, 7А419)
70. *Shioda T.*, On the graded ring of invariants of lineary octaricts. Amer. J. Math., 1967, *89*, 1022—1046 (РЖМат, 1968, 9А291)
71. *Wolf J.*, The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces. Acta Math., 1968, *120*, № 1—2, 59—148 (РЖМат, 1969, 4А385)