Ф. А. Шолохович, Об управляемости в гильбертовом пространстве,
Дифференц. уравнения, 1967, том 3, номер 3, 479–484

https://www.mathnet.ru/de110

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МАРТ 1967 г., ТОМ III, № 3

УДК 517.94

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ф. А. ШОЛОХОВИЧ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство; A — линейный ограниченный оператор, отображающий H в H, $b \in H$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \tag{1}$$

где $x \in H$, $u(t)$ — скалярная функция времени t $(0 \leqslant t < \infty)$, называемая управлением. Предположим вначале, что $u(t) \in L_2$.

Функцию $x = x(t)$ (t — вещественный аргумент, $x(t) \in H$) будем называть решением уравнения (1) при $u = u(t)$ в промежутке $[0, T]$, если почти всюду в этом промежутке выполняется равенство

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t).$$

Нетрудно проверить, что решение $x(t)$ уравнения (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет вид (формула Коши)

$$x(t) = [\exp At]\, x_0 + \int_0^t [\exp A(t - \tau)]\, bu(\tau)\, d\tau.$$

Будем по определению называть обобщенным решением уравнения (1) функцию

$$x(t) = [\exp At]\, x_0 + \int_0^t [\exp A(t - \tau)]\, b d\sigma(\tau), \tag{2}$$

где $d\sigma(\tau)$ — дифференциал Стилтьеса функции ограниченной вариации $\sigma(t)$ и, в частности, если $\sigma(t)$—дифференцируемая функция, $d\sigma(t) = u(t)\, dt$.

Динамическую систему, описываемую уравнением (1), назовем управляемой, если для любой точки $x_0 \in H$ существует такая функция $\sigma(t)$ ограниченной вариации (допустимое управление) и такое конечное время $t = T$ $(T > 0)$, что $x(T) = \theta$. Здесь $x(t)$ определяется формулой (2), а через θ обозначена начальная точка пространства H.

Известно, что в случае, когда пространство H n-мерно, линейная независимость векторов b, Ab, $A^2b, \ldots, A^{n-1}b$ обеспечивает управляемость системы.

Естественно возникает вопрос, какую роль играет последовательность b, Ab, $A^2b, \ldots, A^m b, \ldots$, если пространство H бесконечномерно.

Систему $\{e_m\}_0^\infty$ назовем базисом пространства H, если каждый элемент $x \in H$ представим (не обязательно однозначно) в виде

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m e_m,$$

где α_m — числа.

Теорема 1. *Если система (1) управляема, то множество*

$$E = \{b, Ab, A^2b, \ldots, A^mb, \ldots\}$$

является базисом в пространстве H.

Доказательство. Пусть x_0—произвольная точка пространства H. Для этой точки существует такое допустимое управление $\bar{\sigma}(t)$ и такое число T, что

$$x(T) = [\exp AT]\, x_0 + \int_0^T [\exp A(T-\tau)]\, b d\bar{\sigma}(\tau) = \theta.$$

Отсюда получаем

$$\int_0^T [\exp(-A\tau)]\, b d\bar{\sigma}(\tau) = -x_0. \tag{3}$$

Подынтегральное выражение представляется в виде ряда. Покажем возможность почленного интегрирования этого ряда.

Используя теорему 3. 7. 5 и следствие 1 п. IV (см. [1], стр. 95 и 78), получим

$$\left\| \int_0^T [\exp(-A\tau)]\, b d\bar{\sigma}(\tau) - \sum_{m=0}^{n} \int_0^T (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} A^m b d\bar{\sigma}(\tau) \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^T \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} A^m b \right) d\bar{\sigma}(\tau) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} A^m b \right\| \right\} \operatorname{Var}[\bar{\sigma}(\tau)] \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(\tau \|A\|)^m}{m!} \|b\| \right\} \operatorname{Var}[\bar{\sigma}(\tau)].$$

При $n \to \infty$ последнее выражение стремится к нулю, что доказывает возможность почленного интегрирования. Выполнив почленное интегрирование в левой части равенства (3), получим

$$-x_0 = b\int_0^T d\bar{\sigma}(\tau) - Ab\int_0^T \tau\, d\bar{\sigma}(\tau) + \cdots + (-1)^m A^m b \int_0^T \frac{\tau^m}{m!}\, d\bar{\sigma}(\tau) + \cdots \tag{4}$$

Теорема доказана.

Легко установить, что из бесконечномерности линейной оболочки множества E вытекает линейная независимость любых элементов этого множества, взятых в конечном числе.

Пусть теперь множество E является базисом пространства H и, более того, выполняется следующее требование (условие C): для произвольного $x \in H$ разложение

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A^m b$$

определяется однозначно.

Условие C будет, например, выполняться, если в координатном гильбертовом пространстве l_2 взять в качестве b вектор $\{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$, а оператор A задать с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, $Ab = \{0, 1, 0, \ldots\}$, $A^2b = \{0, 0, 1, 0, \ldots\}$ и т. д.

Условие C является весьма ограничительным. При его выполнении оператор A, например, не может иметь собственных значений, отличных от нуля.

Действительно, пусть $Ax = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, $x \neq \theta$. Для простоты предположим, что λ — вещественное число. Собственный вектор x числа λ представим в виде

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A^m b.$$

В силу непрерывности оператора A имеем

$$Ax = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A^{m+1} b.$$

Используя равенство $\lambda x = Ax$, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \lambda A^m b = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A^{m+1} b.$$

Отсюда $\alpha_0 \lambda = 0$, следовательно, $\alpha_0 = 0$. Из того же равенства вытекает далее, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ и вообще $\alpha_m = 0$ при $m = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, $x = \theta$ вопреки предположению.

Покажем теперь, что в бесконечномерном пространстве H теорема 1 необратима, если выполняется условие C.

Пусть некоторая точка $x_0 \in H$ управлением $\bar{\sigma}(t)$ переводится за время T в начальную точку θ. Тогда выполняется равенство (3) и, следовательно, равенство (4).

Допустим, что

$$x_0 = \sum_{m=0}^{\infty} x_m^0 A^m b.$$

С помощью равенства (4) получим

$$\int_0^T \tau^m d\bar{\sigma}(\tau) = (-1)^{m+1} m!\, x_m^0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Обратно, если существуют число T и функция $\bar{\sigma}(t)$ ограниченной вариации, такие, что имеют место равенства (5), то точка

$$x_0 = \sum_{m=0}^{\infty} x_m^0 A^m b$$

управлением $\bar{\sigma}(t)$ за время T переводится в точку θ.

Таким образом, вопрос о существовании для данной точки x_0 управления, переводящего эту точку за конечное время в положение θ, равносилен вопросу о разрешимости степенной проблемы моментов (5).

Сделаем замену переменной, положив $\tau = Tt$, и обозначим $g(t) = \sigma(Tt)$. Из равенства (5) получим

$$\int_0^1 t^m dg(t) = (-1)^{m+1} x_m^0 \frac{m!}{T^m} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Воспользуемся следующей теоремой Хаусдорфа ([2], стр. 209).

Для того чтобы существовала функция ограниченной вариации $g(t)$, *такая, что*

$$\int_0^1 t^m dg(t) = \mu_m \ (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k |\Delta^{m-k} \mu_k| \leqslant M \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где C_m^k — *биномиальные коэффициенты;* M — *некоторая положительная постоянная, а* $\Delta^n \mu_k$ *означают n-ые разности для последовательности* $\{\mu_k\}$.

Теорема 2. *Если выполняется условие C и, начиная с некоторого номера* $N > 0$, *все числа* x_m^0 *в разложении*

$$x_0 = \sum_{m=0}^{\infty} x_m^0 A^m b$$

неотрицательны (или неположительны), причем $x_N \neq 0$, *то точка* x_0 $(x_0 \neq \theta)$ *никаким допустимым управлением* $\sigma(t)$ *не может быть переведена в силу уравнения (2) за конечное время в положение* θ (*т. е. точка* x_0 *не принадлежит, как говорят, области достижимости начальной точки* θ).

Доказательство. Действительно, пусть $x_m^0 \geqslant 0$ при $m \geqslant N > 0$ и $x_N^0 > 0$. Положим

$$\mu_m = (-1)^{m+1} x_m^0 \frac{m!}{T^m} \tag{8}$$

при произвольном, но фиксированном числе $T > 0$.

Имеет место формула $(k < m)$

$$\Delta^{m-k} \mu_k = \mu_k - C'_{m-k} \mu_{k+1} + C_{m-k}^2 \mu_{k+2} + \cdots + (-1)^{m-k} \mu_m.$$

При $k = N$, учитывая условие теоремы и формулу (8), получим

$$|\Delta^{m-N} \mu_N| \geqslant |\mu_N| > 0.$$

Следовательно, при $m \to \infty$ имеем

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k |\Delta^{m-k} \mu_k| \to \infty.$$

Условие (7), необходимое для разрешимости проблемы моментов, не выполняется.

Теорема доказана.

В частности, точки x_0, в разложении которых лишь конечное количество чисел x_m^0 отлично от нуля (среди этих чисел хотя бы одно имеет положительный номер), не принадлежат области достижимости точки θ.

Динамическую систему, описываемую уравнением (1), назовем стабилизируемой, если для любой точки $x_0 \in H$ существует такое допустимое управление $\bar{\sigma}(t)$, что соответствующее решение $x(t, x_0, \bar{\sigma})$ уравнения (1) обладает свойством:

$$\lim_{t \to \infty} x(t, x_0, \bar{\sigma}) = \theta.$$

Теорема 3. *Если вещественная функция* $\|\exp(At)\|$ *ограничена при* $t \geqslant 0$ *и множество* $\{b, Ab, A^2 b, \ldots, A^m b, \ldots\}$ *является базисом пространства* H, *то динамическая система, отвечающая уравнению* (*1*), *стабилизируема.*

Доказательство. Преобразовав формулу Коши, получим

$$x(t) = \exp(At)\left(x_0 + \int_0^t [\exp(-A\tau)]\, bd\sigma(\tau)\right). \tag{9}$$

Нужно установить существование такого управления $\bar{\sigma}(t)$, что

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t [\exp(-A\tau)]\, bd\bar{\sigma}(\tau) = -x_0$$

или

$$\int_0^\infty [\exp(-A\tau)]\, bd\bar{\sigma}(\tau) = -x_0. \tag{10}$$

Применяя и здесь почленное интегрирование, получим

$$-x_0 = b\int_0^\infty d\bar{\sigma}(\tau) - Ab\int_0^\infty \tau\, d\bar{\sigma}(\tau) + \cdots + (-1)^m A^m b \int_0^\infty \frac{\tau^m}{m!} d\bar{\sigma}(\tau) + \cdots \tag{11}$$

Возьмем одно из разложений элемента $-x_0$ в базисе $\{b, Ab, \ldots, A^m b, \ldots\}$ (однозначность разложения не предполагается)

$$-x_0 = \sum_{m=0}^{\infty} x_m^0 A^m b.$$

Чтобы обеспечить выполнение условия (11), достаточно подобрать функцию $\bar{\sigma}(\tau)$, решающую проблему моментов

$$\int_0^\infty \tau^m d\bar{\sigma}(\tau) = (-1)^m x_m^0 m! \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Как известно ([3], стр. 103, теорема 3.11), эта проблема имеет бесконечное множество решений при произвольных правых частях.

Пусть $\bar{\sigma}(t)$ — одно из таких решений. Тогда

$$\lim_{t \to \infty}\left(x_0 + \int_0^t [\exp(-A\tau)]\, bd\bar{\sigma}(\tau)\right) = \theta. \tag{12}$$

Из формулы (9)

$$\| x(t) \| \leqslant \| \exp(At) \| \cdot \| x_0 + \int_0^t [\exp(-A\tau)]\, bd\bar{\sigma}(\tau) \|.$$

В силу условия (12) и ограниченности $\| \exp(At) \|$ получаем

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t) \| = 0.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за обсуждение работы.

Литература

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
3. Shohat J. A., Tamarkin J. D. The problem of moments. Math. Surveys, № 1. Amer. Math. Soc., New York, 1943.

Поступила в редакцию
27 июня 1966 г.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького