



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. S. Dairbekov, On mappings with bounded distortion on the Heisenberg group,
Sibirsk. Mat. Zh., 2000, Volume 41, Number 1, 49–59

<https://www.mathnet.ru/eng/smj1516>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.87

May 17, 2025, 00:20:26



ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Н. С. Даирбеков

Аннотация: Доказано, что отображения с ограниченным искажением (квазирегулярные отображения) на группе Гейзенберга являются открытыми и дискретными, обладают свойствами \mathcal{N} и \mathcal{N}^{-1} и для них верна формула замены переменных в интеграле Лебега. Установлен аналог теоремы Лиувилля для отображений с искажением 1. Библиогр. 8.

1. Предварительные сведения

В настоящей работе мы продолжаем изучение отображений с ограниченным искажением (квазирегулярных отображений) на группе Гейзенберга, введенных в [1]. В частности, мы доказываем, что отображения с ограниченным искажением являются открытыми, дискретными и сохраняют ориентацию. Среди других результатов отметим выполнение свойств \mathcal{N} и \mathcal{N}^{-1} для отображений с ограниченным искажением, формулу замены переменных в интеграле Лебега и аналог теоремы Лиувилля об отображениях с искажением 1.

Группа Гейзенберга \mathbb{H} является простейшей неабелевой стратифицированной нильпотентной группой (группой Карно). В нашей модели элементами группы \mathbb{H} являются точки $q = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, а умножение задается по правилу

$$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2x'y - 2xy').$$

Элементы $p = (x, y, t) \in \mathbb{H}$ снабжены *однородной нормой*

$$|p| = ((x^2 + y^2)^2 + t^2)^{1/4}. \quad (1.1)$$

Однородная норма (1.1) порождает *однородную метрику* на \mathbb{H} по формуле

$$\rho(p, q) = |p^{-1}q|.$$

Шар $\{p \in \mathbb{H} \mid |p^{-1}q| < R\}$ в однородной метрике с центром $q \in \mathbb{H}$ и радиусом $R > 0$ обозначается через $B_R(q)$.

Мы обозначаем через δ_r , $r > 0$, *однородное растяжение* на \mathbb{H} :

$$\delta_r(x, y, t) = (rx, ry, r^2t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{H}.$$

Результат растяжения часто записывается следующим образом:

$$\delta_r(q) = rq, \quad \delta_{1/r}(q) = q/r.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-01092, 96-01-01769).

Напомним, что δ_r является гомоморфизмом группы Ли \mathbb{H} , причем для однородной нормы (1.1) имеем $|\delta_r(q)| = r|q|$.

Мера Лебега на \mathbb{R}^3 является биинвариантной мерой Хаара на \mathbb{H} . Мера множества $A \subset \mathbb{H}$ относительно этой меры обозначается через $|A|$. Пространство функций, суммируемых в степени s , $1 \leq s < \infty$, на A , обозначается через $L^s(A)$ и снабжено нормой

$$\|u\|_{s,A} = \left(\int_A |u(q)|^s dq \right)^{1/s}.$$

Пространство функций, локально суммируемых в степени s на A , обозначается через $L^s_{\text{loc}}(A)$.

Базис левоинвариантных векторных полей на \mathbb{H} состоит из векторов

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t},$$

между которыми имеется единственное нетривиальное коммутационное соотношение $[X, Y] = -4T$.

Дифференциальные формы

$$dx, \quad dy, \quad \tau = 2x dy - 2y dx + dt$$

задают базис кокасательного расслоения $T'\mathbb{H}$, двойственный базису X, Y, T над каждой точкой $q = (x, y, t) \in \mathbb{H}$.

Горизонтальное касательное пространство HT ($= HT\mathbb{H}$) группы \mathbb{H} натянуто на X, Y , и слои HT снабжены скалярным произведением, в котором векторы $X(q)$ и $Y(q)$ составляют ортонормированный базис над каждой точкой $q \in \mathbb{H}$. Вектор V является горизонтальным тогда и только тогда, когда $\tau(V) = 0$.

Горизонтальное соболевское пространство $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\text{loc}}(U)$), где U — открытое множество в \mathbb{H} и $1 \leq s < \infty$, определяется следующим образом: функция $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит пространству $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\text{loc}}(U)$), если $u \in L^s(U)$ и слабые производные Xu, Yu принадлежат $L^s(U)$ ($u, Xu, Yu \in L^s_{\text{loc}}(U)$).

Горизонтальный градиент функции $u \in HW^{1,1}_{\text{loc}}(U)$ определен почти всюду в U и равен

$$\nabla u(q) = (Xu(q), Yu(q)).$$

Будем говорить, что отображение $f : U \rightarrow \mathbb{H}$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, принадлежит классу $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\text{loc}}(U)$), если каждая компонента f_i , $i = 1, 2, 3$, отображения f принадлежит $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\text{loc}}(U)$). Для такого отображения f почти всюду в U определены векторы

$$Xf(q) = \begin{pmatrix} Xf_1(q) \\ Xf_2(q) \\ Xf_3(q) \end{pmatrix}, \quad Yf(q) = \begin{pmatrix} Yf_1(q) \\ Yf_2(q) \\ Yf_3(q) \end{pmatrix}.$$

Векторы $Xf(q)$ и $Yf(q)$ рассматриваются как касательные векторы над точкой $f(q)$: $Xf(q), Yf(q) \in T_{f(q)}\mathbb{H}$.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — отображение класса $HW^{1,1}_{\text{loc}}(U)$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$. Мы называем f (слабо) контактным, если $Xf(q), Yf(q) \in HT_{f(q)}$ для почти всех точек $q \in U$.

Отображение $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ класса $HW_{\text{loc}}^{1,1}(U)$ является контактным тогда и только тогда, когда

$$\tau(Xf(q)) = 0, \quad \tau(Yf(q)) = 0$$

для почти всех $q \in U$. Эти равенства в развернутом виде выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} 2f_1(q)Xf_2(q) - 2f_2(q)Xf_1(q) + Xf_3(q) &= 0, \\ 2f_1(q)Yf_2(q) - 2f_2(q)Yf_1(q) + Yf_3(q) &= 0. \end{aligned}$$

Для контактного отображения f почти всюду в U определен (*формальный*) *горизонтальный дифференциал* $Hf_*(q) : HT_q \rightarrow HT_{f(q)}$, причем

$$Hf_*(q)X = Xf(q) \in HT_{f(q)}, \quad Hf_*(q)Y = Yf(q) \in HT_{f(q)}.$$

Матрица формального горизонтального дифференциала имеет вид

$$Hf_* = \begin{pmatrix} Xf_1 & Yf_1 \\ Xf_2 & Yf_2 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель называется *горизонтальным якобианом* отображения f и обозначается через $HJ(q, f)$. Отображение $Hf_*(q)$, определенное на горизонтальном подпространстве, единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры Ли группы \mathbb{H} . Этот гомоморфизм называется *формальным \mathcal{P} -дифференциалом* отображения f и имеет матрицу вида

$$f_*(q) = \begin{pmatrix} Hf_*(q) & 0 \\ 0 & HJ(q, f) \end{pmatrix}.$$

Якобиан $J(q, f)$ контактного отображения f — это определитель матрицы $f_*(q)$. Очевидно, что $J(q, f) = (HJ(q, f))^2$.

Следующее определение введено в [1] и является основным в настоящей работе.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ в \mathbb{H} называется *отображением с ограниченным искажением* (*квазирегулярным отображением*), если

- (a) f непрерывно,
- (b) $f \in HW_{\text{loc}}^{1,4}(U)$,
- (c) f — контактное отображение,
- (d) существует постоянная $K < \infty$ такая, что неравенство

$$\|Hf_*(q)\|^4 \leq KJ(q, f) \tag{1.2}$$

выполняется почти всюду в U . Здесь

$$\|Hf_*(q)\| = \max_{\xi \in HT_q, |\xi|=1} |Hf_*(q)\xi|$$

— операторная норма линейного отображения $Hf_*(q)$.

Наименьшая постоянная K в неравенстве (1.2) называется *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается через $K(f)$. Если $K(f) \leq K$, то f называется *отображением с искажением K* или *K -квазирегулярным отображением*.

2. Субэллиптические уравнения, ассоциированные с отображениями с ограниченным искажением

Одним из главных моментов при изучении отображений с ограниченным искажением евклидовых пространств является свойство морфизма решений ассоциированных квазилинейных эллиптических уравнений, открытое Ю. Г. Решетняком, который также продемонстрировал фундаментальное значение свойства морфизма в теории отображений с ограниченным искажением (см. [2]). Соответствующий результат для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга установлен в [1].

Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — отображение с ограниченным искажением. Определим в U матричную функцию $\theta = \theta_f$, полагая

$$\theta(q) = J(q, f)^{1/2} (Hf_*(q))^{-1} (Hf_*(q))^{-1T},$$

если $J(q, f) \neq 0$ (заметим, что в этом случае матрица $Hf_*(q)$ невырожденная), и $\theta(q) = \text{Id}$ (тождественная матрица), если $J(q, f) = 0$. Также обозначим через $\theta(q)$ соответствующее линейное отображение горизонтального касательного пространства HT_q в себя.

Определим *ассоциированное ядро* $\mathcal{A}(q, \xi) = \mathcal{A}_f(q, \xi)$, полагая

$$\mathcal{A}(q, \xi) = \langle \theta(q)\xi, \xi \rangle \theta(q)\xi.$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{A}(q, \xi)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на ядро в [3].

Функция $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ класса $HW_{\text{loc}}^{1,4}(U)$ называется *слабым решением* уравнения

$$\text{div } \mathcal{A}(q, \nabla u) = 0,$$

если

$$\int_U \mathcal{A}(q, \nabla u(q)) \cdot \nabla \varphi(q) = 0$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Следующее утверждение из [1] устанавливает свойство морфизма решений ассоциированных субэллиптических уравнений для отображений с ограниченным искажением.

2.1. Предложение. Пусть $f : U \rightarrow V$ — отображение с ограниченным искажением открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ в открытое множество $V \subset \mathbb{H}$. Предположим, что $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ — C^2 -гладкое решение уравнения

$$\text{div}(|\nabla w(q)|^2 \nabla w(q)) = 0. \quad (2.1)$$

Тогда функция $w_f = w \circ f$ есть слабое решение уравнения

$$\text{div } \mathcal{A}_f(q, \nabla w_f(q)) = 0. \quad (2.2)$$

Координатные функции и функция $\ln |q|$ являются частными решениями уравнения (2.1). Из этого факта, предложения 2.1 и свойств решений уравнения (2.2) получаем следующие утверждение (см. [3]).

2.2. Следствие (монотонность). Каждая компонента отображения с ограниченным искажением монотонна.

2.3. Следствие (положительность якобиана). Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$. Тогда $J(p, f) > 0$ для почти всех $p \in U$.

2.4. Следствие (разрывность прообразов точек). Если $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$, то прообраз $f^{-1}(q)$ каждой точки $q \in \mathbb{H}$ вполне несвязен.

2.5. Следствие (неравенство Каччиопполи). Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — отображение с искажением K . Тогда каждая компонента f_i отображения f , $i = 1, 2, 3$, удовлетворяет неравенству

$$\int_U \varphi^4(q) |\nabla f_i(q)|^4 dq \leq C \int_U |f_i(q)|^4 |\nabla \varphi(q)|^4 dq$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$, причем постоянная C зависит только от K .

2.6. Следствие (обратное неравенство Гёльдера). Для каждого $K \geq 1$ существует $\varepsilon(K) > 0$ такое, что каждое отображение $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ с искажением K принадлежит классу $NW_{\text{loc}}^{1,4+\varepsilon}(U)$. Кроме того, выполнено обратное неравенство Гёльдера

$$\left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \|Hf_*(q)\|^{4+\varepsilon} dq \right)^{1/(4+\varepsilon)} \leq C \left(\frac{1}{|B_{2R}|} \int_{B_{2R}} \|Hf_*(q)\|^4 dq \right)^{1/4}$$

для каждого шара $B_{2R} \subset U$, причем $C = C(K) > 0$.

2.7. Следствие (локальная непрерывность по Гёльдеру). Предположим, что $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — отображение с искажением K и $\int_U \|Hf_*(q)\|^4 dq = M < \infty$.

Тогда отображение f удовлетворяет внутри U условию Гёльдера с показателем $\alpha = \alpha(K) > 0$. При этом если V содержится строго в U , то для произвольных $x, y \in V$

$$\rho(f(p), f(q)) \leq C \rho(p, q)^\alpha,$$

где постоянная C зависит только от взаимного расположения U и V и постоянной M .

3. \mathcal{P} -дифференцируемость отображений с ограниченным искажением

Следующее определение восходит к П. Пансю.

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ (U — область в \mathbb{H}) называется \mathcal{P} -дифференцируемым в точке $p \in U$, если при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\{(f(p))^{-1} f(cp)\} / c \rightarrow h(q) \tag{3.1}$$

равномерно по $q \in B_1(0)$ для некоторого гомоморфизма $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, сохраняющего горизонтальное пространство HT .

\mathcal{P} -дифференциал отображения f в точке p определяется как гомоморфизм алгебры Гейзенберга, соответствующий гомоморфизму h группы Гейзенберга.

3.2. Теорема. Если $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непрерывное контактное отображение класса $NW_{\text{loc}}^{1,s}(U)$ с $s > 4$, то f \mathcal{P} -дифференцируемо почти всюду в U и его \mathcal{P} -дифференциал совпадает с формальным \mathcal{P} -дифференциалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = (f_1, f_2, f_3)$. Тогда для почти всех $p \in U$ формальный \mathcal{P} -дифференциал f задается матрицей

$$f_*(p) = \begin{pmatrix} Xf_1(p) & Yf_1(p) & 0 \\ Xf_2(p) & Yf_2(p) & 0 \\ 0 & 0 & HJ(p, f) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $q = (q_1, q_2, q_3)$. Тогда (3.1) эквивалентно выполнению следующих трех соотношений:

$$\frac{f_1(p(cq)) - f_1(p) - cXf_1(p)q_1 - cYf_1(p)q_2}{c} \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{f_2(p(cq)) - f_2(p) - cXf_2(p)q_1 - cYf_2(p)q_2}{c} \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{f_3(p(cq)) - f_3(p) - 2f_1(p(cq))f_2(p) + 2f_2(p(cq))f_1(p) - c^2HJ(p, f)q_3}{c^2} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

при $c \rightarrow 0$ равномерно по $q \in B_1(0)$.

Для доказательства этих соотношений мы используем следующее утверждение (см., например, [3, лемма 6.10]).

3.3. Предложение. Пусть $s > 4$. Тогда существует постоянная C такая, что для любого непрерывного отображения $u : B_2(0) \rightarrow \mathbb{R}$ класса $HW^{1,s}(B_2(0))$ и любой точки $q \in B_1(0)$ выполняется неравенство

$$|u(q) - u(0)| \leq C\|\nabla u\|_{s, B_2(0)}.$$

С помощью предложения 3.3 доказательство соотношений (3.2) и (3.3) проводится стандартным способом. Для доказательства (3.2) положим

$$u(q) = f_1(p(cq)) - f_1(p) - cXf_1(p)q_1 - cYf_1(p)q_2.$$

Функция u определена на $B_2(0)$ для достаточно малых c и $u(0) = 0$. По предложению 3.3 для $q \in B_1(0)$

$$|u(q)| \leq C\|\nabla u\|_{s, B_2(0)}.$$

Для $\xi \in B_2(0)$ имеем

$$Xu(\xi) = c(Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)), \quad Yu(\xi) = c(Yf_1(p(c\xi)) - Yf_1(p)).$$

Значит,

$$\frac{|u(q)|}{c} \leq C(\|Xf_1(p(c\cdot)) - Xf_1(p)\|_{s, B_2(0)} + \|Yf_1(p(c\cdot)) - Yf_1(p)\|_{s, B_2(0)}).$$

По теореме Лебега мы имеем

$$\begin{aligned} \|Xf_1(p(c\cdot)) - Xf_1(p)\|_{s, B_2(0)} &\rightarrow 0, \\ \|Yf_1(p(c\cdot)) - Yf_1(p)\|_{s, B_2(0)} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $c \rightarrow 0$ для почти всех $p \in U$. Таким образом, для почти всех $p \in U$

$$\frac{|u(q)|}{c} \rightarrow 0$$

при $c \rightarrow 0$ равномерно по $q \in B_1(0)$, что завершает доказательство соотношения (3.2). Доказательство соотношения (3.3) полностью аналогично.

Чтобы доказать (3.4), положим

$$u(q) = f_3(p(cq)) - f_3(p) - 2f_1(p(cq))f_2(p) + 2f_2(p(cq))f_1(p) - c^2 HJ(p, f)q_3.$$

Для достаточно малых c отображение u определено на шаре $B_4(0)$ и по предложению 3.3 для $q \in B_1(0)$

$$|u(q)| \leq C \|\nabla u\|_{s, B_2(0)}. \quad (3.5)$$

Для $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ имеем $(X\xi_3)(\xi) = 2\xi_2$. Следовательно, для $\xi \in B_2(0)$

$$\begin{aligned} Xu(\xi) &= cXf_3(p(c\xi)) - 2cf_2(p)Xf_1(p(c\xi)) + 2cf_1(p)Xf_2(p(c\xi)) - 2c^2 HJ(p, f)\xi_2 \\ &= c(Xf_3(p(c\xi)) - 2f_2(p(c\xi))Xf_1(p(c\xi)) + 2f_1(p(c\xi))Xf_2(p(c\xi)) \\ &\quad + 2f_2(p(c\xi))Xf_1(p(c\xi)) - 2f_1(p(c\xi))Xf_2(p(c\xi)) \\ &\quad - 2f_2(p)Xf_1(p(c\xi)) + 2f_1(p)Xf_2(p(c\xi)) - 2cHJ(p, f)\xi_2) \\ &= c(\tau(Xf)(p(c\xi)) + 2Xf_1(p(c\xi))[f_2(p(c\xi)) - f_2(p)] \\ &\quad - 2Xf_2(p(c\xi))[f_1(p(c\xi)) - f_1(p)] - 2cHJ(p, f)\xi_2) \\ &= c(\tau(Xf)(p(c\xi)) + 2[Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)][f_2(p(c\xi)) - f_2(p)] \\ &\quad - 2[Xf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)][f_1(p(c\xi)) - f_1(p)] \\ &\quad + 2Xf_1(p)[f_2(p(c\xi)) - f_2(p)] - 2Xf_2(p)[f_1(p(c\xi)) - f_1(p)] - 2cHJ(p, f)\xi_2). \end{aligned}$$

Так как отображение f контактно, $\tau(Xf)(p(c\xi)) = 0$ для почти всех $\xi \in B_2(0)$. Полагая для $\xi \in B_2(0)$

$$v(\xi) = Xf_1(p)[f_2(p(c\xi)) - f_2(p)] - Xf_2(p)[f_1(p(c\xi)) - f_1(p)] - cHJ(p, f)\xi_2,$$

получаем

$$\begin{aligned} |Xu(\xi)| &\leq 2c(|Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)||f_2(p(c\xi)) - f_2(p)| \\ &\quad + |Xf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)||f_1(p(c\xi)) - f_1(p)| + |v(\xi)|). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Применяя предложение 3.3 к функциям $f_1(p(\cdot)) - f_1(p)$ и $f_2(p(\cdot)) - f_2(p)$, для $\xi \in B_2(0)$ выводим

$$\begin{aligned} |f_1(p(c\xi)) - f_1(p)| &\leq C\|c\nabla f_1(p(\cdot))\|_{s, B_4(0)} = Cc\|\nabla f_1(p(\cdot))\|_{s, B_4(0)}, \\ |f_2(p(c\xi)) - f_2(p)| &\leq C\|c\nabla f_2(p(\cdot))\|_{s, B_4(0)} = Cc\|\nabla f_2(p(\cdot))\|_{s, B_4(0)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Применяя предложение 3.3 к функции v , для $\xi \in B_2(0)$ получаем

$$|v(\xi)| \leq C\|\nabla v\|_{s, B_4(0)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} Xv(\xi) &= Xf_1(p)cXf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)cXf_1(p(c\xi)) \\ &= c(Xf_1(p)[Xf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)] - Xf_2(p)[Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Yv(\xi) &= Xf_1(p)cYf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)cYf_1(p(c\xi)) - cHJ(p, f) \\ &= c(Xf_1(p)Yf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)Yf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)Yf_2(p) + Xf_2(p)Yf_1(p)) \\ &= c(Xf_1(p)[Yf_2(p(c\xi)) - Yf_2(p)] - Xf_2(p)[Yf_1(p(c\xi)) - Yf_1(p)]). \end{aligned}$$

Значит, для $\xi \in B_2(0)$

$$\begin{aligned} |v(\xi)| &\leq Cc(|Xf_1(p)||Xf_2(p(c)) - Xf_2(p)||_{s, B_4(0)} \\ &+ |Xf_2(p)||Xf_1(p(c)) - Xf_1(p)||_{s, B_4(0)} + |Xf_1(p)||Yf_2(p(c)) - Yf_2(p)||_{s, B_4(0)} \\ &+ |Xf_2(p)||Yf_1(p(c)) - Yf_1(p)||_{s, B_4(0)}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Используя соотношения (3.7) и (3.8) в (3.6), для $\xi \in B_2(0)$ мы выводим неравенство

$$\begin{aligned} |Xu(\xi)| &\leq Cc^2(|Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)||\nabla f_2(p(c))||_{s, B_4(0)} \\ &+ |Xf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)||\nabla f_1(p(c))||_{s, B_4(0)} + |Xf_1(p)||Xf_2(p(c)) - Xf_2(p)||_{s, B_4(0)} \\ &+ |Xf_2(p)||Xf_1(p(c)) - Xf_1(p)||_{s, B_4(0)} + |Xf_1(p)||Yf_2(p(c)) - Yf_2(p)||_{s, B_4(0)} \\ &+ |Xf_2(p)||Yf_1(p(c)) - Yf_1(p)||_{s, B_4(0)}). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \|Xu\|_{s, B_2(0)} &\leq Cc^2(\|Xf_1(p(c)) - Xf_1(p)\|_{s, B_2(0)}\|\nabla f_2(p(c))\|_{s, B_4(0)} \\ &+ \|Xf_2(p(c)) - Xf_2(p)\|_{s, B_2(0)}\|\nabla f_1(p(c))\|_{s, B_4(0)} \\ &+ |Xf_1(p)||Xf_2(p(c)) - Xf_2(p)||_{s, B_4(0)} \\ &+ |Xf_2(p)||Xf_1(p(c)) - Xf_1(p)||_{s, B_4(0)} + |Xf_1(p)||Yf_2(p(c)) - Yf_2(p)||_{s, B_4(0)} \\ &+ |Xf_2(p)||Yf_1(p(c)) - Yf_1(p)||_{s, B_4(0)}). \end{aligned}$$

По теореме Лебега для $i = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} \|Xf_i(p(c)) - Xf_i(p)\|_{s, B_4(0)} &\rightarrow 0, \quad \|Yf_i(p(c)) - Yf_i(p)\|_{s, B_4(0)} \rightarrow 0, \\ \|\nabla f_i(p(c))\|_{s, B_4(0)} &\rightarrow C|\nabla f_i(p)| \end{aligned}$$

при $c \rightarrow 0$ для почти всех $p \in U$. Следовательно,

$$\frac{\|Xu\|_{s, B_2(0)}}{c^2} \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

при $c \rightarrow 0$ для почти всех $p \in U$.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, получаем

$$\frac{\|Yu\|_{s, B_2(0)}}{c^2} \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

В силу (3.5), (3.9) и (3.10) заключаем, что

$$\frac{|u(q)|}{c^2} \rightarrow 0$$

при $c \rightarrow 0$ равномерно по $q \in B_1(0)$. Это завершает доказательство соотношения (3.4) и вместе с ним теоремы.

Из теоремы 3.2 и следствия 2.6 вытекает следующая теорема о \mathcal{P} -дифференцируемости отображений с ограниченным искажением.

3.4. Теорема. *Отображение с ограниченным искажением \mathcal{P} -дифференцируемо почти всюду в области определения, и его \mathcal{P} -дифференциал совпадает с формальным \mathcal{P} -дифференциалом.*

4. \mathcal{N} - и \mathcal{N}^{-1} -свойства. Замена переменных в интеграле Лебега

Напомним, что отображение обладает \mathcal{N} -свойством, если образ любого множества меры нуль есть множество меры нуль. Отображение обладает \mathcal{N}^{-1} -свойством, если прообраз любого множества меры нуль есть множество меры нуль.

Из результатов работы [4] вытекает следующее утверждение.

4.1. Предложение. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непрерывное контактное отображение класса $HW_{\text{loc}}^{1,4}(U)$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$, причем компоненты отображения f монотонны. Тогда f обладает \mathcal{N} -свойством.

Если $A \subset \mathbb{H}$ и $f : A \rightarrow \mathbb{H}$, то мы обозначаем через $N_f(q, A)$ кратность отображения f в точке $q \in \mathbb{H}$, определенную по формуле

$$N_f(q, A) = \text{card}(f^{-1}(q) \cap A).$$

Множество $G \subset \mathbb{H}$ называется *компактной областью* [2], если G компактно, внутренность G связна и G является замыканием своей внутренности. Если $G \subset \mathbb{H}$ — компактная область и $f : G \rightarrow \mathbb{H}$ — непрерывное отображение, то для каждой точки $q \in \mathbb{H} \setminus f(\partial G)$ определена *степень* $\mu(q, f, G)$ отображения f в точке q (см. [2]).

Следующее утверждение вытекает из результатов работы [5].

4.2. Предложение (замена переменных в интеграле Лебега). Пусть U — открытое множество в \mathbb{H} и $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непрерывное контактное отображение класса $HW_{\text{loc}}^{1,1}(U)$, имеющее локально суммируемый якобиан $J(p, f)$, обладающее \mathcal{N} -свойством и \mathcal{P} -дифференцируемое почти всюду в U . Тогда верны следующие утверждения:

(а) если $A \subset U$ — измеримое множество и $u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая неотрицательная функция, то функции $(u \circ f)(p)|J(p, f)|$ и $u(q)N_f(q, A)$ измеримы и

$$\int_A (u \circ f)(p)|J(p, f)| dp = \int_{\mathbb{H}} u(q)N_f(q, A) dq; \quad (4.1)$$

(б) если $G \subset U$ — компактная область такая, что $|\partial G| = 0$, и $u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что функция $u(\cdot)\mu(\cdot, f, G)$ интегрируема, то функция $(u \circ f)(\cdot)J(\cdot, f)$ интегрируема на G и выполнено равенство

$$\int_G (u \circ f)(p)J(p, f) dp = \int_{\mathbb{H}} u(q)\mu(q, f, G) dq. \quad (4.2)$$

4.3. Теорема. Если $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$, то отображение f обладает \mathcal{N} - и \mathcal{N}^{-1} -свойствами и для него верны утверждения (а) и (б) предложения 4.2.

Доказательство. Пусть U — область в \mathbb{H} и $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением. Отображение f непрерывно, принадлежит классу $HW_{\text{loc}}^{1,4}(U)$ и контактно по определению отображений с ограниченным искажением. Так как в силу следствия 2.2 каждая компонента отображения f монотонна, предложение 4.1 влечет выполнение условия \mathcal{N} для f . По теореме 3.4 отображение f \mathcal{P} -дифференцируемо почти всюду в U . Значит,

f удовлетворяет условию предложения 4.2, и для него верны утверждения (а) и (б) этого предложения. По следствию 2.3 $J(p, f) > 0$ для почти всех $p \in U$. Из этого факта и (4.1) стандартным образом вытекает наличие \mathcal{N}^{-1} -свойства у отображения f .

Теорема доказана.

5. Сохранение ориентации, открытость и дискретность отображений с ограниченным искажением

Напомним, что непрерывное отображение $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ сохраняет ориентацию, если $\mu(q, f, G) > 0$ для всякой компактной области $G \subset U$ и каждой точки $q \in f(G) \setminus f(\partial G)$ (см., например, [2]).

5.1. Лемма. *Если $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$, то f сохраняет ориентацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \subset U$ — компактная область. Предположим сначала, что $|\partial G| = 0$. Пусть $q_0 \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Возьмем ограниченное открытое множество V , содержащее q_0 и лежащее в одной компоненте связности множества $\mathbb{H} \setminus f(\partial G)$. Тогда $\mu(q, f, G) = \mu(q_0, f, G)$ для всех $q \in V$. Применим формулу (4.2), взяв в качестве u характеристическую функцию множества V . Получим

$$\int_{G \cap f^{-1}(V)} J(p, f) dp = \mu(q_0, f, G)|V|.$$

В силу следствия 2.3 интеграл в левой части этого неравенства строго больше нуля. Значит, $\mu(q_0, f, G) > 0$.

Пусть теперь $G \subset U$ — произвольная компактная область, и пусть $q_0 \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Множество $G \cap f^{-1}(q_0)$ компактно и не пересекается с ∂G . Тогда найдется компактная область \tilde{G} , лежащая во внутренней части G и такая, что $G \cap f^{-1}(q_0)$ лежит во внутренней части \tilde{G} , причем $|\partial \tilde{G}| = 0$. Тогда $q_0 \in f(\tilde{G}) \setminus f(\partial \tilde{G})$ и $\mu(q_0, f, G) = \mu(q_0, f, \tilde{G})$. Ввиду доказанного выше имеем $\mu(q_0, f, \tilde{G}) > 0$, что завершает доказательство леммы.

Следствие 2.4 и лемма 5.1 известным образом (см. [2]) влекут следующее утверждение.

5.2. Теорема. *Если $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$, то f дискретно и открыто.*

6. Теорема Лиувилля

Для отображений с ограниченным искажением областей евклидова пространства \mathbb{R}^n с $n \geq 3$ теорема Лиувилля доказана Ю. Г. Решетняком и утверждает (см. [2]), что отображение с искажением 1 области пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, либо постоянно, либо является сужением на эту область некоторого мёбиусова преобразования.

Для квазиконформных отображений на группе Гейзенберга соответствующий аналог теоремы Лиувилля доказан Кораньи и Рейманом в [6] для C^4 -гладких отображений. Без условий гладкости теорема Лиувилля доказана в [7].

Заменой мёбиусова преобразования на группе Гейзенберга является действие элементов группы $SU(1, 2)$. Группа $SU(1, 2)$ действует естественным образом как группа конформных преобразований компактификации группы Гейзенберга. Это действие описано в [6, 8]. Теорема Лиувилля утверждает, что

1-квазиконформное отображение области на группе Гейзенберга есть сужение на эту область естественного действия некоторого элемента группы $SU(1, 2)$.

Как следует из замечания 2 работы [1], 1-квазиконформные отображения — это в точности гомеоморфизмы, которые являются отображениями с искажением 1.

6.1. Теорема. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ — отображение с искажением 1 области $U \subset \mathbb{H}$. Тогда f либо постоянно, либо является сужением на U действия элемента группы $SU(1, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы выводится стандартными рассуждениями из соответствующего утверждения для 1-квазиконформных отображений и того факта, что f открыто и дискретно.

Допустим, что f непостоянно. Обозначим через B_f множество точек ветвления отображения f . Множество B_f относительно замкнуто в U , и f является гомеоморфизмом в достаточно малой окрестности произвольной точки из $U \setminus B_f$. Следовательно, для каждой точки p из $U \setminus B_f$ найдется шар $B(p)$ с центром в этой точке такой, что сужение f на шар $B(p)$ совпадает с сужением на $B(p)$ действия некоторого элемента группы $SU(1, 2)$. Заметим, что для пересекающихся шаров мы можем взять один и тот же элемент группы $SU(1, 2)$. Так как f непрерывно, открыто и дискретно, из теоремы Чернавского (см., например, [2, теорема 6.7]) следует, что топологическая размерность множества B_f не превосходит 1. Следовательно, множество $U \setminus B_f$ связно. Отсюда вытекает, что мы можем взять один и тот же элемент группы $SU(1, 2)$ сразу для всех шаров $B(p)$. Следовательно, сужение f на $U \setminus B_f$ совпадает с сужением на B_f действия некоторого элемента группы $SU(1, 2)$. По непрерывности f совпадает с сужением действия этого элемента группы $SU(1, 2)$ на U .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даирбеков Н. С. Свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 810–822.
2. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Heinonen J., Holopainen I. Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.
4. Водопьянов С. К. Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
5. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 70–89.
6. Korányi A., Reimann H. M. Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
7. Sapogna L. Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 867–889.
8. Korányi A., Reimann H. M. Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.

Статья поступила 12 октября 1998 г.

г. Новосибирск