A. L. Likhtarnikov, V. A. Yakubovich, Dichotomy and stability of undetermined nonlinear systems in Hilbert spaces,
Algebra i Analiz, 1997, Volume 9, Issue 6, 132–155

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 6

Светлой памяти Марка Григорьевича Крейна посвящается

ДИХОТОМИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© А. Л. Лихтарников, В. А. Якубович

Устанавливаются общие необходимые и достаточные условия диссипативности, абсолютной дихотомичности и абсолютной устойчивости нелинейной системы с неопределенной частью, заданной с помощью нескольких квадратичных неравенств. Приведены эффективно проверяемые частотные критерии дихотомичности и устойчивости. Выясняется, что найденные условия необходимы и достаточны для существования „хорошей" функции Ляпунова для рассматриваемой задачи. Это означает, что их нельзя улучшить с помощью построения функции Ляпунова из определенных классов. Рассмотрен простой пример применения частотных критериев для нелинейной системы в частных производных, состоящей из гиперболического и параболического уравнений.

Введение

В последние годы большое внимание многих исследователей привлекает анализ устойчивости неопределенных систем. Так называют системы, в которых некоторые „блоки" известны не полностью. Приведем простейший пример — скалярное неопределенное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \tag{0.1}$$

Предположим, что о коэффициентах $a(t)$, $b(t)$ известно лишь, что $a_1 \leqslant a(t) \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b(t) \leqslant b_2$, т. е. известны только границы a_j, b_j. Требуется установить условия устойчивости (или иного свойства) неопределенной системы, т. е. класса систем с любыми коэффициентами из рассматриваемых множеств. Понятно, что

Ключевые слова: дихотомия, абсолютная устойчивость, диссипативность, неопределенная система, интегральные квадратичные связи, частотные критерии.

дополнительные сведения, скажем, $a_1' \leqslant \frac{da_1(t)}{dt} \leqslant a_2'$, меняют класс уравнений, подлежащий анализу.

Если записать уравнение (0.1) в виде системы ($x_1 = x$):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -u_1 - u_2, \tag{0.2}$$

то возникают два „блока“: $u_1 = b(t)x_1$, $u_2 = a(t)x_2$. Самые простые типичные примеры нелинейных блоков: $u_i(t) = \varphi_i[x_i(t)]$, где $0 \leqslant \varphi_i(x)x^{-1} \leqslant \mu_i$ и, возможно, $\alpha_{1i} \leqslant \varphi_i'(x) \leqslant \alpha_{2i}$. Можно привести также многочисленные примеры более сложных блоков: импульсные модуляторы, „гистерезисные“ нелинейности, разрывные нелинейности и т. д.

Анализ определенного свойства системы, когда требуется установить условия, относящиеся к заранее заданному классу блоков, называется также в литературе робастным анализом.

Результаты, относящиеся к этому направлению, известны давно. Для линейных систем в банаховых пространствах вопросы дихотомии и устойчивости изучались в [1] и в других работах. Начиная с 50-х годов появляются работы по абсолютной устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Абсолютной называлась устойчивость, равномерная в определенном смысле относительно рассматриваемого класса нелинейностей. Типичными результатами были „частотные“ критерии абсолютной устойчивости, т. е. критерии, выраженные через частотные характеристики, охватывающие, как оказалось, все критерии, которые могут быть получены с использованием функций Ляпунова из некоторых стандартных многопараметрических классов. С основной частью этих результатов можно познакомиться по книгам [2–7, 34], обзорам [8–10] и по другим источникам. В последние годы многие из этих результатов забыты и переоткрываются заново в той же или близкой форме.

В 70-е годы теория абсолютной устойчивости была распространена на системы с бесконечномерным фазовым пространством, описываемые уравнениями в частных производных, нелинейными уравнениями в гильбертовых пространствах и т. д. Для бесконечномерного случая были получены основные результаты конечномерной теории, в первую очередь теорема о разрешимости операторных неравенств, названная в отечественной литературе „частотной теоремой“, в зарубежной — леммой Калмана–Якубовича, а в последние годы — леммой Калмана–Якубовича–Попова (KYP-lemma). Настоящая работа посвящена этому направлению и продолжает работы авторов [11–20], в том числе совместные.

Опишем подход к задачам абсолютной устойчивости, применявшийся, начиная с работ, цитированных в обзорах [9–10], в том числе в работах авторов.

Сначала поясним его на примере системы (0.2). Заметим, что информация о коэффициентах $a(t)$, $b(t)$ равносильна соотношениям $b_1 \leqslant u_1/x_1 \leqslant b_2$,

$a_1 \leqslant u_2/x_2 \leqslant a_2$, так что мы можем записать исследуемую систему в виде совокупности уравнений (0.2) и квадратичных неравенств

$$\begin{cases} (u_1 - b_1 x_1)(x_2 b_2 - u_1) \geqslant 0, \\ (u_2 - a_1 x_2)(x_2 a_2 - u_2) \geqslant 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

Обычно известна „полностью" линейная часть системы, которая имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \tag{0.4}$$

(В примере это система (0.2).) Неравенствами задается „неопределенная" часть системы, к которой, как правило, относятся нелинейности. Неравенства обычно имеют вид

$$F^j[x(t), u(t)] \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{0.5}$$

где $F^j(x,u)$ — квадратичные формы, $x(t)$ — вектор состояния системы, $u(t)$ — вектор выходов неопредленных блоков. Такие соотношения называются *локальными квадратичными связями*. Наряду с ними естественно возникают *интегральные квадратичные связи* вида

$$\int_0^{t_k} F^j[x(t), u(t)]dt \geqslant -\gamma, \quad (t_k \to \infty), \tag{0.6}$$

где $F^j(x,u)$, по-прежнему, квадратичные формы (см. [3, 4, 8, 10, 22, 23], простейшие примеры приведены ниже). В (0.6) числа $\gamma_j \geqslant 0$ и $t_k \to +\infty$ могут зависеть от решения $x(t)$, $u(t)$. Разумеется, (0.5) влечет (0.6). Поэтому, если мы интересуемся широкими классами неопределенностей, то можем ограничиться рассмотрением лишь связей (0.6). Имеются результаты для конечномерных систем ([21] и др.), устанавливающие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости со специальными локальными связями вида (0.3). Эти условия, однако, трудно проверяемы.

„Определенная" часть системы (т. е. система (0.4)) считается стационарной и линейной по (x, u), поскольку нелинейные и нестационарные линейные блоки обычно могут быть заменены на соответствующие квадратичные связи.

В конечномерном случае в работе [22] получен частотный „квадратичный критерий" абсолютной устойчивости для систем с интегральными квадратичными связями. В [23] показано, что для системы с одной интегральной квадратичной связью это условие не только достаточно, но и необходимо. В [35] установлена необходимость этого частотного условия для любого числа связей. (См. также ниже теорему 8.)

В бесконечномерном случае аналог конечномерных частотных условий устойчивости был получен в работах [14, 24]. Необходимое и достаточное условие для случая одной квадратичной связи и устойчивости по линейному выходу опубликовано в [17, 18].

В случае многих ($m > 1$) интегральных квадратичных связей доказательство необходимости квадратичного критерия абсолютной устойчивости стало возможным только после существенного продвижения в другом направлении — исследованиях задач невыпуклой оптимизации (теорема об S-процедуре).

На основе результатов о „неущербности S-процедуры" [26, 27] в данной работе для $m > 1$ устанавливаются критерии абсолютной дихотомии и устойчивости по линейному выходу, неулучшаемые в рассматриваемых классах неопределенных блоков.

§1. Постановки задач

Нелинейная система далее будет рассмотрена как совокупность процессов в этой системе. При этом определенная часть системы будет задана как плоскость в гильбертовом пространстве процессов, а неопределенная часть — как некоторое множество в этом же пространстве. Пересечение плоскости и этого множества и есть „система" в нашем подходе. Важную роль будет играть выход системы — отображение из пространства процессов в некоторое пространство „выходов". Ядро этого отображения может быть связано с глобальным аттрактором линейной полугруппы, если система определяет такую полугруппу [20, 30].

Введем необходимые обозначения (см. [12, 17]). Пусть X_0 — комплексное гильбертово пространство, оснащенное гильбертовыми пространствами X_1, X_{-1}, т. е. X_1 плотно и непрерывно вложено в X_0, а X_{-1} антидвойственно X_1 относительно скалярного произведения в $X_0 : X_1 \subset X_0 \subset X_{-1}$. Нормы и скалярные произведения в этих пространствах обозначим через $|\cdot|_k$, $(\cdot,\cdot)_k$ соответственно; $k = -1, 0, 1$. Пусть U и W — два других гильбертовых пространства с нормами и скалярными произведениями соответственно $|\cdot|_U$, $(\cdot,\cdot)_U$ и $|\cdot|_W$, $(\cdot,\cdot)_W$.

Далее, пусть заданы линейные непрерывные отображения $A : X_1 \to X_{-1}$, $B : U \to X_{-1}$, $C : X_1 \to W$, $D : U \to W$. Рассмотрим соотношения:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0; \tag{1.1}$$

$$w(t) = Cx(t) + Du(t). \tag{1.2}$$

Введем пространства функций, необходимые для рассмотрения задачи Коши (1.1). Далее через $L^2(0,T;X)$, где $0 < T \leqslant +\infty$, как обычно, обозначается гильбертово пространство вектор-функций $x : (0,T) \to X$, суммируемых с квадратом нормы в X. Норму в $L^2(0,T;X_j)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{2,j}$. Обозначим через $H_2^1(0,T;X_0)$ гильбертово пространство функций $x(\cdot) \in L^2(0,T;X_1)$

с производной $x'(\cdot) \in L^2(0,T;X_{-1})$ и нормой $\|x(\cdot)\|^2 = \|x(\cdot)\|^2_{2,1} + \|x'(\cdot)\|^2_{2,-1}$. Всюду далее предполагается, что задача Коши (1.1) для заданных $x_0 \in X_0$ и $u(\cdot) \in L^2(0,T;U)$ корректна в пространстве $H^1_2(0,T;X_0)$ для любого $T > 0$.

Известно, что гильбертово пространство $H^1_2(0,T;X_0)$ непрерывно вложено в $C_0(0,T;X_0)$ — пространство непрерывных функций $[0,T] \to X_0$, ограниченных в норме X_0.

В теории управления для системы вида (1.1), (1.2) обычно употребляются следующие термины: $x(t)$ — состояние системы, $u(t)$ — управление (вход), пара $\{x(t),u(t)\}$ — процесс системы, $w(t)$ — выход системы.

Введем пространства процессов:

$$\mathcal{P}_T = H^1_2(0,T;X_0) \times L^2(0,T;U), \quad 0 < T \leqslant +\infty; \;\; \mathcal{P} = \{h \in \mathcal{P}_T\,;\, \forall T > 0, T \neq +\infty\}.$$

Ясно, что задача (1.1) определяет в $\mathcal{P}$ плоскость $\mathcal{L} + p_0$, где $\mathcal{L}$ — линейное подпространство решений однородной ($x_0 = 0$) задачи, а $p_0 = \{x^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$ — удовлетворяющая (1.1) пара функций.

Перейдем к неопределенной части системы. Пусть задано семейство $F^j(p)$ ($j = 1,2,\ldots,m$) эрмитовых форм:

$$F^j(x,u) = (F^j_1 x, x) + 2\,\mathrm{Re}(F^j_2 x, u) + (F^j_3 u, u),$$

где F^j_1, F^j_2, F^j_3 предполагаются непрерывными соответственно как отображения $X_1 \to X_{-1}$, $X_1 \to U$, $U \to U$.

Рассмотрим множество $\mathcal{N}$ процессов $\{x(\cdot),u(\cdot)\}$ таких, что для некоторых γ_j и $t_k \to +\infty$ (вообще говоря, зависящих от процесса) выполнены неравенства

$$\int_0^{t_k} F^j(x(t),u(t))dt \geqslant -\gamma_j, \quad j = 1,2,\ldots,m, \;\; k = 1,2,\ldots \tag{1.3}$$

Каждое из этих неравенств задает в пространстве локально суммируемых процессов P некоторое множество $\mathcal{N}_j$, пересечение которых $\mathcal{N} = \bigcap_j \mathcal{N}_j$ и есть множество, задающее „неопределенность“ рассматриваемой системы.

Элементы множества $(\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{N}$ будем называть процессами нелинейной неопределенной задачи. Иначе говоря, процессы — это пары $\{x(\cdot),u(\cdot)\}$, удовлетворяющие соотношениям (1.1) и неравенствам (1.3).

Систему (1.1)-(1.3) будем называть неопределенной системой с интегральными квадратичными связями (1.3) и выходом (1.2).

Поясним постановку задачи. Пусть линейная часть системы задана попрежнему задачей Коши (1.1), а нелинейная часть отображением $\varphi : X_0 \to U$. Тогда мы можем записать нелинейную систему в стандартном виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\varphi(x), \quad x(0) = x_0. \tag{1.4}$$

Обозначим через Γ_φ график отображения $\varphi : H_2^1(0,T;X_0) \to L^2(0,T;U)$. Совокупность решений задачи (1.4) можно записать в виде $(L+p_0)\cap\Gamma_\varphi$. Возможно, что это множество „устроено" достаточно сложно. Поэтому естественно попытаться упростить задачу, расширив Γ_φ до $\mathcal{N}$. Этот переход означает запись некоторых свойств φ в форме неравенств вида (1.3). Например, если $|\varphi(x)|_U \leqslant C|x|_0$, то положим

$$F^1(x,u) = C^2|x|_0^2 - |u|_U^2, \quad \gamma_1 = 0. \tag{1.5}$$

Если, кроме того, существует неотрицательная „первообразная" $\Phi(x)$, то

$$\int_s^t \varphi(x(\tau))x'(\tau)d\tau = \Phi(x(t)) - \Phi(x(s)) \tag{1.6}$$

и можно положить $s = 0$, $t_k = t$, $\gamma_2 = \Phi(x_0)$, выбирая еще одну форму

$$F^2(x,u) = \mathrm{Re}(u, Ax + Bu) = \mathrm{Re}(u, x'). \tag{1.7}$$

Теперь мы можем записать два неравенства вида (1.3) с формами (1.5), (1.7), где $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \Phi(x_0)$. Эти неравенства определяют для процессов два множества $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{P}$. Их пересечение $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ существенно шире, чем множество графиков функций $u = \varphi(x)$, удовлетворяющих оценке $|\varphi|_U \leqslant C|x|_0$ и имеющих неотрицательную первообразную.

Заменяя множество процессов $(\mathcal{L} + p_0) \cap \Gamma_\varphi$ на расширенное множество $(\mathcal{L}+p_0)\cap\mathcal{N}$, мы переходим от „индивидуальной" задачи вида (1.4) к классу задач, содержащему все нелинейности, удовлетворяющие двум указанным выше условиям. Если для расширенного множества процессов будет установлено некоторое свойство их поведения, то оно будет иметь место и для индивидуальной задачи.

Заметим в заключение, что такое расширение включает важные в приложениях примеры: гистерезисные нелинейности, импульсные модуляторы различных типов, разрывные или многозначные функции (см. [3] и др.).

Определим понятия абсолютной дихотомии и устойчивости по линейному выходу w для множества $(\mathcal{L}+p_0)\cap\mathcal{N}$. Коротко говоря, абсолютная W-дихотомия имеет место тогда, когда для всех ограниченных в X_0 решений $x(t)$ выход $w(t) = Cx(t) + Du(t)$ есть функция из $L^2(0,+\infty;W)$ и справедлива естественная оценка нормы $\|w(\cdot)\|_{2,W}$.

Определение 1. Неопределенная система (1.1)–(1.3) называется абсолютно W-дихотомичной, если для любого процесса $p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{N}$, состояние $x(t)$ которого ограничено в норме X_0 на полуоси: $|x(t)|_0 \leqslant C_0$, $\forall t > 0$, имеет место

$$w(\cdot) \in L^2(0,+\infty;W), \quad \|w(\cdot)\|_{2,W}^2 \leqslant C\Big(|x_0|_0^2 + \sum \gamma_j\Big) \tag{1.8}$$

с единой постоянной C, зависящей лишь от операторов A, B и форм F^j.

Определение 2. Неопределенная система (1.1)–(1.3) называется абсолютно устойчивой по выходу w, если для любого процесса $p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{N}$ имеет место (1.8).

Рассмотрим частный случай выхода $w = p = \{x(\cdot), u(\cdot)\}$, который далее мы будем называть *полным* выходом. В этом случае, очевидно, $W = X_0 \times U$.

Определение 3. Неопределенная система (1.1), (1.3) называется абсолютно дихотомичной по полному выходу, если для любого процесса $p \in (\mathcal{L}+p_0) \cap \mathcal{N}$ имеет место либо

$$p \in \mathcal{P}_\infty, \quad |p|^2_\infty = \|x(\cdot)\|^2_{2,1} + \|x'(\cdot)\|^2_{2,-1} + \|u(\cdot)\|^2_{2,U} \leqslant C\Big(|x_0|^2_0 + \sum_{j=1}^m \gamma_j\Big) \tag{1.9}$$

(тогда, как нетрудно показать, $|x(t_k)|_0 \to 0$ при $k \to +\infty$) либо

$$p \notin \mathcal{P}_\infty, \quad |x(t_k)|_0 \to +\infty \quad \text{при } k \to +\infty. \tag{1.10}$$

(Здесь последовательность t_k та же, что и в (1.3).)

Аналогично, неопределенная система (1.1), (1.3) называется абсолютно устойчивой по полному выходу $w = p = \{x(\cdot), u(\cdot\}$, если для любого $p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{N}$ имеет место (1.9).

Определение 4. Неопределенная система (1.1), (1.3) называется экспоненциально дихотомичной, если для любого процесса $p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{N}$ имеет место либо

$$u(\cdot) \in L^2(0, +\infty; U); \qquad |x(t)|_0 \leqslant C'' e^{-\varepsilon t} \quad (t > 0), \tag{1.11}$$

либо

$$\exists t_0 : \quad |x(t)|_0 \geqslant C'' e^{\varepsilon t} \ (t \geqslant t_0) \tag{1.12}$$

для некоторых положительных ε, C', C'', зависящих лишь от коэффициентов системы.

В случае, если имеет место только (1.11), говорят об абсолютной экспоненциальной устойчивости.

Наша основная цель — установить возможно более полные (необходимые и достаточные) условия абсолютной дихотомичности и абсолютной устойчивости неопределенных систем. Затем мы приведем эффективно проверяемые „частотные“ условия. Для доказательства соответствующих теорем здесь использован метод функций Ляпунова — мы доказываем существование некоторых функционалов, обладающих нужными свойствами „хороших“ функций Ляпунова. В связи с этим полезно ввести следующее понятие W-диссипативной (по выходу) линейной системы:

Определение 5. Задача Коши (1.1) называется диссипативной по выходу (1.2) с заданной эрмитовой формой $F(x, u)$, если существуют $\delta > 0$ и ограниченный самосопряженный оператор $H : X_0 \to X_0$, $H = H^*$ такой, что для любого процесса $p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}$ при любых $0 \leqslant s \leqslant t$ имеет место неравенство

$$(Hx(t), x(t))_0 - (Hx(s), x(s))_0 + \int\limits_s^t F[x(\tau), u(\tau)]d\tau + \delta \int\limits_s^t |w(\tau)|^2 d\tau \leqslant 0. \quad (1.13)$$

Замечание. Соотношение (1.13) позволяет вводить различные функционалы Ляпунова видов:

$$V(t) = (Hx(t), x(t))_0, \quad V_1(t) = V(t) + \int\limits_0^t F[x(\tau), u(\tau)]d\tau.$$

При этом величина $V_1(t)$ монотонно убывает по t в силу (1.13) и может быть стационарной на тех процессах, для которых $w(t) \equiv 0$. Например, если $w = Ax + Bu$, то множество состояний для тех процессов, на которых $w(t) \equiv 0$, есть стационарное множество Λ нелинейной задачи, так как $w = x_t'$.

В литературе по нелинейным задачам математической физики часто фактически рассматривался случай выхода $w(t) = x_t'(t)$. Многократно переоткрываемые результаты об устойчивости в целом стационарного множества обычно извлекались из соотношений вида (1.13). Последние доказывались „к случаю“, а форма $F(\cdot,\cdot)$ „скрывалась“ за длинными выкладками, связанными с оценками нелинейных членов уравнения, предварительно на что-то умноженных.

Определение, близкое к определению 5, было введено Дж. Виллемсом в 1972 г. [32] для *нелинейной* системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Неравенство Виллемса имеет вид (1.13) с $\delta = 0$. При этом оно трактовалось как баланс энергии в системе, неотрицательная функция $V(x) = (Hx, x)$ была названа функцией запаса, а форма $F(x, u)$ — функцией расхода. Далее, в 1976 г. для обыкновенных дифференциальных уравнений это неравенство было изучено Д. Хиллом и П. Мойланом [33]. Их результат был назван нелинейной KYP-леммой. В том же 1976 г. была опубликована работа авторов [12], в которой для уравнения вида (1.1) в гильбертовых пространствах даны условия разрешимости неравенства (1.13) в „частотной“ форме (теореме 3 [12]). Далее одним из авторов в работе [18] неравенство (1.13) с $\delta \neq 0$ было использовано для получения необходимых и достаточных условий абсолютной устойчивости по выходу, а в работе [19] — условий дихотомии по полному выходу. Здесь в теореме 1 даются необходимые и достаточные условия диссипативности системы (1.1) с формой $F(x, u)$. В определенном смысле эта теорема является „нечастотным“ вариантом „частотной теоремы“ или „KYP-леммы“.

§2. Теорема об абсолютной дихотомии по линейному выходу

Будем говорить, что пара операторов A, B L^2-управляема, если для любых начальных данных существует хотя бы одна пара функций $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$, удовлетворяющая соотношениям (1.1) и суммируемая с квадратом на полуоси $[0, +\infty)$:

$$\forall x_0 \in X_0 \quad (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty \neq 0.$$

Это предположение заведомо выполнено, если найдется отображение $K : X_0 \to U$ такое, что спектр оператора $A+BK$ лежит строго в левой полуплоскости комплексной плоскости (условие стабилизируемости пары A, B). Действительно, замена $u(t) = Kx(t)$ переводит (1.1) в задачу Коши $x' = (A + BK)x$, $x(0) = x_0$, для которой все решения экспоненциально убывают: $|x(t)|_0 \leqslant Ce^{\varepsilon t}|x_0|_0$, так что пара $\{x(\cdot), Kx(\cdot)\} \in (\mathcal{L}+p_0)\cap\mathcal{P}_\infty$. Заметим, что на самом деле L^2-управляемость эквивалентна стабилизируемости при очень слабых дополнительных предположениях [12, 13].

Пусть $F(x, u)$ — эрмитова форма, заданная на $X_1 \times U$. Рассмотрим квадратичный функционал J на $\mathcal{P}_\infty$:

$$J(p) = \int_0^\infty F[x(t), u(t)]dt. \tag{2.1}$$

Будем говорить, что функционал J сильнее нормы выхода w, если существуют числа $\delta > 0$, C такие, что

$$J(p) + \delta\|w\|^2_{2,W} \leqslant C, \quad \forall p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty. \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Пусть пара A, B L^2-управляема. Для того чтобы функционал J был сильнее нормы выхода w, необходимо и достаточно, чтобы система* (1.1) *была диссипативна по выходу, т. е. чтобы существовал самосопряженный ограниченный оператор $H : X_0 \to X_0$, $H^* = H$ такой, что для любой пары $\{x(t), u(t)\} \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}$ имеет место неравенство* (1.13).

Доказательство. Докажем сначала *достаточность* условия (1.13). Из (1.13) имеем

$$\int_0^t F[x(\tau), u(\tau)]d\tau + \delta \int_0^t |w(\tau)|^2 d\tau \leqslant (Hx_0, x_0) - (Hx(t), x(t)). \tag{2.3}$$

Для процессов $p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty$ имеет место устойчивость: $|x(t)|_0 \to 0$ при $t \to +\infty$. Подставляя процесс p в последнее неравенство и переходя к пределу при $t \to +\infty$, получаем полуограниченность сверху функционала $J(p) + \delta\|w\|^2_{2,w}$.

Рассмотрим эрмитову форму

$$F_\varepsilon(x,u) = F(x,u) + \delta|Cx + Du|_W^2 - \varepsilon(|x|_1^2 + |u|_U^2), \quad \varepsilon \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Для доказательства необходимости условия (1.13) мы применим результаты теоремы 3 [12]. Для формы (2.4) и задачи Коши (1.1) выполнены все предположения этой теоремы. Действительно, пусть

$$J_\varepsilon(p) = \int\limits_0^\infty F_\varepsilon[x(t), u(t)]dt, \quad \beta = \inf[\|x(\cdot)\|_{2,1}^2 + \|u(\cdot)\|_{2,U}^2]^{-1} J_\varepsilon(p), \tag{2.5}$$

где нижняя грань берется по всем $p \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_\infty$. В силу условия (2.2) и соотношения

$$\int\limits_0^\infty F_\varepsilon[x(t), u(t)]dt = J(p) + \delta\|w\|_{2,W}^2 - \varepsilon \int\limits_0^\infty (|x(t)|_1^2 + |u(t)|^2)dt \tag{2.6}$$

получаем, что $\beta \leqslant -\varepsilon$. При условиях L^2-управляемости пары A, B и $\beta < 0$ теорема 3 [12] утверждает, что на множестве $(\mathcal{L}+p_0)\cap\mathcal{P}_\infty$ корректно разрешима задача о максимуме функционала $J_\varepsilon(p)$, причем существует оператор $H_\varepsilon = H_\varepsilon^* : X_0 \to X_0$ такой, что

$$\sup_p J_\varepsilon(p) = (H_\varepsilon x_0, x_0)_0, \quad p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty, \quad x_0 = x(0), \tag{2.7}$$

и для этого оператора и функций $\{x(t), u(t)\} \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}$ справедливо неравенство

$$(H_\varepsilon x(t), x(t)) - (H_\varepsilon x(s), x(s)) + \int\limits_s^t F_\varepsilon[x(\alpha), u(\alpha)]d\alpha \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Для доказательства теоремы 1 остается установить возможность предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в (2.8). Поскольку для $\varepsilon < \mu$ имеет $J_\varepsilon(p) > J_\mu(p)$, то из (2.7) получаем, что последовательность операторов H_ε монотонно возрастает при $\varepsilon \to 0$. С другой стороны, по условию теоремы и из (2.6) следует, что

$$\begin{gathered} J_\varepsilon(p) \leqslant J(p) + \delta\|w\|_{2,W}^2 \leqslant C \quad \forall p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty, \\ (H_\mu x, x) \leqslant (H_\varepsilon x, x) \leqslant C \quad \forall x \in X_0, \ 0 < \varepsilon < \mu. \end{gathered} \tag{2.9}$$

По теореме Банаха–Штейнгауза существует ограниченный самосопряженный оператор H такой, что $H_\varepsilon \to H$ при $\varepsilon \to 0$ в сильной операторной топологии. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в соотношении (2.8), получаем утверждение теоремы 2.

Пусть $\tau_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$ — произвольные неотрицательные числа. Рассмотрим квадратичный функционал J_τ на P_∞:

$$J_\tau(p) = \sum_{j=1}^m \tau_j \int\limits_0^\infty F^j[x(s), u(s)]ds, \tag{2.10}$$

где F^j — формы в (1.3).

Определение 6. Будем говорить, что функционал J_τ сильнее нормы выхода w, если существуют числа $\delta > 0$, C, $\tau_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ такие, что

$$J_\tau(p) + \delta \|w\|^2_{2,W} \leqslant C \quad \forall p \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty. \tag{2.11}$$

Теорема 2. *Пусть пара A, B L^2-управляема. Тогда для абсолютной W-дихотомии неопределенной системы* (1.1)–(1.3) *необходимо и достаточно, чтобы функционал J_τ был сильнее нормы выхода w.*

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Пусть $x(t)$ — состояние системы (1.1)–(1.3), норма $|x(t)|_0$ ограничена для $0 \leqslant t < +\infty$. Пусть, далее, $F(x, u) = \sum\limits_{j=1}^{m} \tau_j F^j(x, u)$.

Воспользуемся соотношением (1.13). Введем функции $V(t) = (Hx(t), x(t))$,

$$V_1(t) = V(t) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{m} \tau_j F^j[x(s), u(s)]ds. \tag{2.12}$$

Из (1.13) следует, что V_1 монотонно убывает. Если V_1 ограничена снизу, то существует ее предел V_∞ при $t \to +\infty$. Тогда для всех пар $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$, удовлетворяющих (1.1), имеем

$$\int\limits_0^t |w(s)|^2_W ds \leqslant V_1(0) - V_1(t) \leqslant V_1(0) - V_\infty,$$

т. е. $w(\cdot) \in L^2(0, +\infty; W)$. Если $V_1(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, то для всех пар $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$, удовлетворяющих (1.1), (1.3), и для $t = t_k$ получим, что второе слагаемое в (2.12) ограничено снизу и, следовательно, $V(t_k) \to -\infty$. В этом случае $|x(t_k)|_0 \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Таким образом, для всех ограниченных в X_0 решений $x(t)$ имеют место соотношения (1.8).

Необходимость. Пусть условие (2.2) для функционала J_τ нарушено: для любых $\delta > 0$, $\tau = \{\tau_j\}$, $\tau_j \geqslant 0$ $(j = 2, 2, \ldots, m)$ найдется последовательность $p_k = q_k + p_0 \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty$ такая, что

$$J_\tau(p_k) + \delta \|w_k\|^2_{2,W} \to +\infty \quad (k \to +\infty). \tag{2.13}$$

Тогда

$$\inf_\tau \sup_q [J_\tau(q + p_0) + \delta \|w\|^2_{2,W}] = +\infty. \tag{2.14}$$

Рассмотрим последовательность $p_k = \{x_k(\cdot), u_k(\cdot)\}$ из (2.13). По условию, $p_k \in H_2^1(0,+\infty;X_0) \times L^2(0,+\infty;U)$ и, следовательно, найдутся числа γ_j, достаточно большие, чтобы было

$$G_j(q) = \int_0^\infty F^j[x_k(t), u_k(t)]dt + \gamma_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Иначе говоря, $p_k \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty \cap \mathcal{N}$.

Нам будет удобно переобозначать $\tau_0 = \delta > 0$ и $G_0(q) = \|w\|^2_{2,W}$. Тогда $J_\tau(p) + \delta\|w\|^2_{2,W} = \sum_{j=0}^m \tau_j G_j(q)$, и (2.14) можно записать в виде

$$\inf_\tau \sup_q \sum_{j=0}^m \tau_j G_j(q) = +\infty \quad (q \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_\infty).$$

Вспомним, что дихотомичность по определению означает оценку $G_0(q) \leqslant C(x_0, \{\gamma_j\})$, где $p = q + p_0 \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{N}$. Мы докажем для $p_k = q_k + p_0$ из (2.13), что $\sup_k G_0(q_k) = +\infty$.

Для этого нам потребуется применить теорему [26] об S-процедуре к нашему семейству функционалов $\{G_j\}$. Не умаляя общности, положим здесь $\tau_0 = 1$. Тогда в наших обозначениях основное утверждение об S-процедуре имеет вид

$$\sup_K G_0(q) = \inf_\tau \sup_{\mathcal{L}} \left[G_0(q) + \sum_{j=1}^m \tau_j G_j(q)\right],$$

где множество $K = \{q = p - p_0 : G_j(q) \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, m\}$ (см. теорему 2 [26]). Кроме того, утверждается, что нижняя грань в правой части достигается при некотором τ^* и максимизирующие последовательности q_k в левой и правой частях (2.13) одни и те же.

Условия, предполагаемые теоремой об S-процедуре, несложно проверить в нашем случае. Выберем в качестве операторов T_k в $\mathcal{L} \cap P_\infty$ сдвиги по t:

$$(T_k q)(t) = q(t-k) \quad \text{при } t \geqslant k, \qquad (T_k q)(t) = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant k.$$

Очевидно, что имеют место условия (i)-(iii) ([26, с. 14-15]):

$$(T_k q_1, q_2) = \int_k^\infty (q_2(t), q_1(t-k))_{X_0 \times U} dt \to 0 \quad (k \to +\infty), \tag{i}$$

$$\mathcal{L} \cap P_\infty \quad \text{инвариантно относительно } T_k, \tag{ii}$$

$$G_j(T_k q) = G_j(q) \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{iii}$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть пара A, B L^2-управляема. Для абсолютной L^2-дихотомии неопределенной системы* (1.1), (1.3) *необходимо и достаточно, чтобы функционал $J_\tau(p)$ был сильнее нормы полного выхода* $\|x(\cdot)\|^2 + \|u(\cdot)\|^2_{2,U}$.

Замечание. Доказательство теоремы 3 сразу следует из теоремы 2. Отметим здесь, что определение L^2-дихотомии близко к общепринятому; множество решений системы (1.1), (1.3) разбивается на два класса: $|x(t)|_0 \to 0$ и $x(t)$ неограничено в норме X_0. Можно показать, что, если в (1.3) последовательность t_k произвольна, то в утверждении теоремы 3 дихотомия экспоненциальна.

§3. Теорема об абсолютной устойчивости неопределенной системы

Определение 6. Неопределенная система (1.1), (1.3) называется минимально устойчивой, если выполнено следующее условие: для любых $x_0 \in X_0$ и $\varepsilon > 0$ существует процесс $p^* = \{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ системы (1.1), (1.3) с $\gamma_j = \gamma_j^* \leqslant \varepsilon$ и t_k^* такой, что $|x^*(t_k^*)| \to 0$ при $t_k^* \to \infty$.

Утверждение 1. Если существует линейное непрерывное отображение $M : X_1 \to U$ такое, что оператор $A_0 = A + BM$ устойчив (спектр $\sigma(A_0)$ лежит в открытой левой полуплоскости $\mathbb{C}^1$), и такое, что самосопряженные операторы H_j, определенные соотношениями

$$H_j A_0 + A_0 H_j = -M_j, \quad \text{где } (M_j, x, x) \stackrel{\text{def}}{=} F^j(x, Mx)$$

неотрицательны: $H_j \geqslant 0$, то система (1.1), (1.3) минимально устойчива.

Доказательство. Очевидно, что в условиях утверждения 1 можно определить $x^*(t)$ из задачи Коши $x_t'(t) = A_0 x(t)$, $x(0) = x_0$, а $u^*(t) = Mx^*(t)$. При этом $x^*(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$,

$$\int_0^{t_k^*} F^j[x^*(t), u^*(t)]dt = (H_j x_0, x_0) - (H_j x^*(t_k^*), (t_k^*)) \geqslant -\gamma_j^*,$$

если выбрать γ_j^* и t_k^* так, чтобы $(H_j x^*(t_k^*), x^*(t_k^*)) = \gamma_j^* \leqslant \varepsilon$ для $j = 1, 2, \ldots, m$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Если существует линейное непрерывное отображение $M : X_1 \to U$ такое, что оператор $A_0 = A + BM$ устойчив и для $j = 1, 2, \ldots, m$

$$F^j(x, Mx) \geqslant 0 \quad \forall x \in X_1,$$

то выполнены все условия утверждения 1 и, следовательно, система (1.1), (1.3) минимально устойчива.

Таким образом, условия утверждения 2 достаточны для условий утверждения 1, которые, в свою очередь, достаточны для минимальной устойчивости системы.

Теорема 4. *Предположим, что пара* A, B L^2*-управляема и система* (1.1), (1.3) *минимально устойчива. Тогда для абсолютной устойчивости этой системы по выходу* (1.2) *необходимо и достаточно, чтобы функционал* J_τ *был сильнее нормы выхода* w.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2, поскольку абсолютная устойчивость влечет W-дихотомию. Для доказательства достаточности мы вновь используем теорему 1 о диссипативности, применяя ее к форме $F(x,u) = \sum\limits_{j=1}^{m} \tau_j F^j(x,u)$. Тогда из (2.3) имеем при $s = 0$:

$$(Hx(t),x(t)) - (Hx_0,x_0) + \sum_0^t \int_0^t F[x(\alpha),u(\alpha)]d\alpha + \delta \int_0^t |w(\alpha)|_w^2 d\alpha \leqslant 0. \tag{3.1}$$

Подставим в (3.1) в процесс $\{x^*(\cdot),u^*(\cdot)\}$ и возьмем $t = t_k^*$. Тогда, используя (1.3), получим

$$(Hx^*(t_k^*),x^*(t_k^*)) - (Hx_0,x_0) + \delta \int_0^{t_k^*} |w(\alpha)|_W^2 d\alpha - \sum_{j=1}^m \tau_j\gamma_j^* \leqslant 0.$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$, имеем

$$(Hx_0,x_0) \geqslant \delta \int_0^{t_k^*} |w(\alpha)|_W^2 d\alpha - \sum_{j=1}^m \tau_j\gamma_j^* \geqslant -\sum_{j=1}^m \tau_j\gamma_j^*.$$

В этом неравенстве x_0 — произвольный вектор из X_0, а γ_j^* — произвольно малые числа. Поэтому оператор H неотрицателен: $H \geqslant 0$.

Подставим теперь в (3.1) произвольный процесс $p = \{x(\cdot),u(\cdot)\} \in (\mathcal{L}+p_0)\cap\mathcal{N}$ и $t = t_k$ из (1.3). Тогда, используя неравенства (3.1), имеем

$$(Hx(t_k),x(t_k)) - (Hx_0,x_0) + \delta \int_0^{t_k} |w(\alpha)|_W^2 d\alpha - \sum_{j=1}^m \tau_j\gamma_j \leqslant 0.$$

Здесь $H \geqslant 0$ и, следовательно,

$$\delta \int_0^{t_k} |w(\alpha)|_W^2 d\alpha \leqslant (Hx_0,x_0) + \sum_{j=1}^m \tau_j\gamma_j.$$

Так как H и τ_j не зависят от p, то переходя к пределу при $t_k \to +\infty$, получаем (1.8). Теорема доказана.

Замечание. Условие минимальной устойчивости можно заменить на любое другое условие, обеспечивающее $H \geqslant 0$.

§4. Частотные условия абсолютной дихотомии и абсолютной устойчивости

Условия абсолютной дихотомии или устойчивости называются *частотными*, если они выражены через частотные характеристики системы (1.1), (1.2). Эти характеристики есть операторнозначные функции

$$\chi(i\omega) = (i\omega I - A)^{-1}B, \ \ \rho(i\omega) = C\chi(i\omega) + D, \quad \omega \in R^1. \tag{4.1}$$

для (1.1) и для (1.1), (1.2) соответственно. Использование частотных условий удобно в приложениях.

В этом параграфе мы сформулируем частотные условия, необходимые и достаточные для полуограниченности сверху функционала $J(p) = J_\tau(p) + \delta\|w\|^2_{2,W}$ и тем самым получим частотные аналоги теорем 2–4.

Рассмотрим процесс $p = q + p_0 \in (\mathcal{L} + p_0) \cap \mathcal{P}_\infty$. Здесь $q \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_\infty$ — процесс для задачи Коши (1.1) с нулевым начальным условием. Нетрудно показать, что p_0 линейно и непрерывно зависит от начальных данных x_0. (Например, для случая стабилизируемости пары A, B обратной связью $u = Kx$ имеем $p_0 = \{x^0, u^0\}$, где $x^0 = S(t)x_0$, $u^0 = KS(t)x_0$, где $S(\cdot) : X_0 \to H_2^1(0, +\infty; X_0)$ — линейная полугруппа с генератором $A + BK$; $S(t)$ экспоненциально убывает к нулю при $t \to +\infty$).

Таким образом, эрмитову форму $J(p)$, определенную на P_∞, можно представить в виде квадратичного функционала на подпространстве $Y = \mathcal{L} \cap P_\infty \subset P_\infty$:

$$J(p) = J^*(q) = (Qq, q) + 2\,\mathrm{Re}(Rx_0, q) + \mathrm{const}, \tag{4.2}$$

где $Q = Q^* : Y \to Y$, $R : X_0 \to Y$. Так как форма $J(p)$ имеет вид (2.1), причем коэффициенты формы F не зависят от t, то мы можем записать $J^*(q)$ в виде

$$J^*(q) = \int_0^\infty \langle Qq(t), q(t)\rangle dt + 2\,\mathrm{Re} \int_0^\infty \langle (Rx_0)(t), q(t)\rangle dt + \mathrm{const}. \tag{4.3}$$

(Здесь через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение в $X_0 \times U$).

Перейдем от процессов $p(t) = \{x(t), p(t)\}$ к их преобразованиям Лапласа $\tilde{p}(\lambda) = \{\tilde{x}(\lambda), \tilde{u}(\lambda)\}$. Из (1.1), (1.2) имеем (формально):

$$\lambda\tilde{x}(\lambda) - x_0 = A\tilde{x}(\lambda) + B\tilde{u}(\lambda), \qquad \tilde{w}(\lambda) = C\tilde{x}(\lambda) + D\tilde{u}(\lambda). \tag{4.4}$$

Для $\lambda = i\omega$, $\omega \in R^1$ при условии, что спектр A не пересекается с мнимой осью получаем

$$\tilde{x}(i\omega) = (i\omega I - A)^{-1}[B\tilde{u}(i\omega) + x_0]. \tag{4.5}$$

Из равенства Парсеваля имеем для (4.3)

$$J^*(q) = \int_{-\infty}^{\infty} [\langle Q\tilde{q}(i\omega), \tilde{q}(i\omega)\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle R\tilde{x}_0(i\omega), \tilde{q}(i\omega)\rangle] d\omega + \mathrm{const},$$

где $\tilde{q}(i\omega) = \{(i\omega I - A)^{-1}B\tilde{u}(i\omega), \tilde{u}(i\omega)\}$, $(R\tilde{x}_0)(i\omega) = \{(i\omega I - A)^{-1}x_0, 0\}$. Подставляя выражения для $\tilde{q}$ и $R\tilde{x}_0$ в формулу для $J^*(q)$, получим окончательно функционал $J(p)$ в виде

$$J(p) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Pi(i\omega)\tilde{u}(i\omega), \tilde{u}(i\omega))_U d\omega + 2\,\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} (g(i\omega), \tilde{u}(i\omega))d\omega + \mathrm{const}. \tag{4.6}$$

Выражения для операторнозначной самосопряженной ($\Pi^* = \Pi$) функции $\Pi(i\omega) : U \to U$ и векторной функции $g(i\omega) \in U$, $\forall\omega \in R^1$ нетрудно выписать явно. Так, $\Pi(i\omega)$ есть оператор квадратичной формы

$$(\Pi(i\omega)u, u) = \sum_{j=1}^{m} \tau_j F^j[\chi(i\omega)u, u] + \delta|[C\chi(i\omega) + D]u|_U^2. \tag{4.7}$$

Поясним коротко, на каком функциональном пространстве задан функционал (4.6).

Рассмотрим сначала пространства: X-произвольное гильбертово и $L^2(R^1, X)$. Представим $L^2(R^1, X)$ в виде суммы ортогональных подпространств $Z_+ \oplus Z_-$, где $Z_+ = \{x(\cdot) \in L^2(R^1, X) : x(t) = 0$ при $t < 0\}$ и $Z_- = \{x(\cdot) \in L^2(R^1, X) : x(t) = 0$ при $t > 0\}$. Обозначим через $H_+^2(X)$ образ подпространства Z_+ при преобразовании Фурье вектор-функций из $L^2(R^1, X)$:

$$\tilde{x}(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{4.8}$$

и, соответсвенно, через $H_-^2(X)$ образ подпространства Z_-. Пространства $H_\pm^2(X)$ называются ***векторными пространствами Харди***. Функции из этих пространств характеризуются хорошо известной теоремой Пэли–Винера и продолжаются аналитически в полуплоскость (правую для H_+^2 и левую для H_-^2).

Легко видеть, что функции $\tilde{u}(i\omega)$, являющиеся образами Фурье функций $u(\cdot) \in L^2(0, +\infty; U)$, можно отождествить с функциями из $H_+^2(U)$, но $Rx_0(i\omega)$, вообще говоря, является элементом $L^2(R^1, X_0)$, но не $H_+^2(X_0)$. Поэтому вектор-функция $g(i\omega)$ из (4.6) такова, что $g(\cdot) \in L^2(R^1, U)$. Итак, функционал (4.6) задан на $L^2(R^1, U)$. Требуется установить условия, при которых он полуограничен сверху на подпространстве $H_+^2(U)$. Далее мы сформулируем некоторые результаты, относящиеся к задаче о полуограниченности квадратичного функционала на пространствах Харди из работ [28, 29]. Ранее в работах авторов [16, 17] условия полуограниченности применялись к задачам абсолютной устойчивости систем с запаздывающим аргументом.

Теорема 5 [28]. *Для полуограниченности сверху функционала* (4.6) *на пространстве Харди* $H^2_+(U)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Pi(i\omega) \leqslant 0 \quad \forall\omega \in R^1, \tag{4.9}$$

и для некоторой функции $g_-(\cdot) \in H^2_-(U)$ *сходился интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\Pi^{-1}(i\omega)(g(i\omega) - g_-(i\omega), g(i\omega) - g_-(i\omega))d\omega. \tag{4.10}$$

Теорема 6 [16]. *Для полуограниченности сверху функционала* (4.6) *на пространстве Харди* $H^2_+(U)$ *необходимо и достаточно, чтобы для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\Pi(i\omega)u(i\omega), u(i\omega))_U\, d\omega \leqslant -\varepsilon \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (g(i\omega), u(i\omega))_U d\omega \right| \quad \forall u(\cdot) \in H^2_+(U). \tag{4.11}$$

Условия теорем 5, 6 необходимы и достаточны, но труднопроверяемы. Заметим, однако, что в приложениях обычно возможно огрубление условий до достаточных, но близких к необходимым. Например, условие (4.11) проверяется легко, если неравенство (4.11) оказывается справедливым для $u(\cdot) \in L^2(R^1, U)$. В конечномерном случае верна теорема 5 без условия (4.10) (см. [28]).

Имеются и другие пути для получения точных условий. Например, если оператор A в (1.1) является генератором *группы*, а не полугруппы, как ранее, (гиперболические уравнения, уравнение Шрёдингера и т. д.).

Теорема 7. *Пусть в* (1.1) *оператор* A *является генератором группы и* L^2-*управляемы две пары* $\{A, B\}$ *и* $\{-A, B\}$. *Предположим также, что спектр оператора* A *на мнимой оси дискретен. Тогда следующие три условия эквивалентны*:

(а) *неопределенная система* (1.1)–(1.3) *абсолютно* W-*дихотомична*;

(б) *функционал* $J_\tau(p)$ *сильнее нормы выхода* w;

(в) *Найдутся числа* $\tau_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *и* $\delta > 0$ *такие, что для всех* $u \in U$ *и* $\omega \in R^1$ *таких, что* $i\omega \notin$, *выполнено неравенство*

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_j F^j[\chi(i\omega)u, u] + \delta|\rho(i\omega)u|^2 \leqslant 0.$$

Здесь $\rho(i\omega) = C\chi(i\omega) + D$ — *передаточная функция выхода.*

Замечание. Неравенство (в) — эквивалентная запись неравенства $\Pi(i\omega) \leqslant 0$, которое в условиях теоремы 7 является не только необходимым, но и достаточным условием. Доказательство теоремы легко восстанавливается из теорем 1, 2 и результатов [12, 18, 19].

Из теоремы 4 для конечномерных пространств X_0, U, W следует известный квадратичный критерий абсолютной устойчивости по линейному выходу.

Теорема 8. *Предположим, что* $X_0 = C^n$, $U = C^p$, $W = C^q$ *и система* (1.1)–(1.3) *минимально устойчива.*

Для абсолютной устойчивости этой системы необходимо и достаточно существование чисел $\tau_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *таких, что для всех* $\omega \in R^1$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, *удовлетворяющих соотношениям*

$$i\omega\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \quad \tilde{w} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \tag{4.12}$$

выполнено

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_j F^j(\tilde{x}, \tilde{u}) \leqslant -|\tilde{w}|^2. \tag{4.13}$$

Замечание 1. Выражая из (4.12) $\tilde{x}$, $\tilde{w}$ через $\tilde{u}$, определим $\Pi(i\omega)$ для всех ω таких, что $i\omega \notin \sigma(A)$

$$\tilde{u}^*\Pi(i\omega)\tilde{u} = \sum_{j=1}^{m} \tau_j F^j(\tilde{x}, \tilde{u}) + |w|^2.$$

Тогда критерий (4.13) можно переписать в виде

$$\exists \tau_j \geqslant 0 : \quad \Pi(i\omega) \leqslant 0 \ \forall \omega \colon i\omega \notin \sigma(A). \tag{4.14}$$

Замечание 2. Этот результат получен в [35]; в части достаточности он был установлен впервые в [22]. Для случая $m = 1$ (одной квадратичной связи) необходимость доказана в [23]. Доказательство необходимости для $m > 1$ стало возможно после работ [26, 27], где было принципиально усилено утверждение теоремы об S-процедуре.

Замечание 3. Исходная задача может быть поставлена не в комплексных пространствах, а в вещественных (далее будем говорить о *комплексном* и *вещественном* случаях). Тогда продолжим все отображения в (1.1)–(1.3) на комплексифицированные гильбертовы пространства X_0, U, W и применим результаты, сформулированные в теоремах 1–8 для комплексного случая.

§5. Пример

Здесь мы рассмотрим упрощенный пример из теории регулирования систем с распределенными параметрами. Одно из уравнений системы задает колебательный процесс, другое — диффузию. Нелинейные обратные связи для этих процессов являются неопределенной частью задачи. Близкие по свойствам, но значительно более громоздкие системы встречаются в теории ядерных реакторов, в химической кинетике, в моделях биологических мембран [36–38]. Отметим также, что подход, развиваемый в данной работе, применим (хотя отличается уже в постановке задачи) для систем, названных (в книге [37] и в других работах) односторонними граничными задачами.

Критерии дихотомии и (или) устойчивости позволяют определить соответствующие области в пространстве параметров (коэффициентов) систем. При изучении поведения решений „в целом" эти результаты позволяют установить отсутствие „колебательных" решений, устойчивость (или неустойчивость) стационарного множества Λ системы и другие свойства минимальных глобальных аттракторов нелинейной системы.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, $\Psi = \Psi(x,t)$, $\Theta = \Theta(x,t)$ — функции $x \in \Omega$, $t \geqslant 0$, ε, α, β, $\gamma \in \mathbb{R}^1$. Рассмотрим систему нелинейных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Psi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Delta\Psi + \alpha\Psi = f(\Theta), \qquad \varepsilon > 0,\\ &\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \beta\Delta\Theta + \Psi - \gamma g(\Theta) = 0, \qquad \beta > 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\Psi(x,0) = \Psi_0(x), \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,0) = \Psi_1(x), \quad \Theta(x,0) = \Theta_0(x), \tag{5.2}$$

$$\Psi(x,t) = \Theta(x,t) = 0 \quad \text{для } x \in \partial\Omega. \tag{5.3}$$

Рассмотрим класс нелинейностей $f(\Theta), g(\Theta)$, обладающих свойствами

$$\Theta g(\Theta) - f^2(\Theta) \geqslant 0 \qquad \forall\Theta \in \mathbb{R}^1, \tag{5.4}$$

$$\exists G(\Theta) \geqslant 0\colon G'(\Theta) = g(\Theta) \qquad \forall\Theta \in \mathbb{R}^1. \tag{5.5}$$

Например, $f(\Theta) = \Theta^2$, $g(\Theta) = \Theta^3$ удовлетворяют условиям (5.4), (5.5).

Представим задачу (5.1)-(5.5) в стандартном для неопределенных систем виде. Введем векторы

$$v(x,t) = \begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi'_t\\ \Psi\\ \Theta \end{bmatrix}, \qquad u(x,t) = \begin{bmatrix} u_1\\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\Theta)\\ g(\Theta) \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Определим операторы A, B задачи Коши (1.1). Пусть A_0 — самосопряженный, положительно определенный оператор, порожденный в $L^2(\Omega)$ дифференциальным выражением $(-\Delta)$ и нулевыми граничными условиями. Его область определения есть $D(A_0) = D^2 = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Обозначим через D^s область определения оператора $A_0^{s/2}$: $D^s = D(A_0^{s/2})$ $(s \in \mathbb{R}^1)$; D^s является полным гильбертовым пространством со скалярным произведением $(v',v'')_s = (A_0^{s/2}, v', A_0^{s/2}v'')$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Выберем пространство „неопределенных блоков" $U = L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ и пространства состояний

$$X_1 = D^1 \times D^2 \times D^2, \qquad X_0 = D^0 \times D^1 \times D^1. \tag{5.7}$$

Скалярное произведение в X_s определяется по формуле

$$(v,w)_s = \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}, \frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\right)_{s-1} + (\Psi_1,\Psi_2)_s + (\Theta_1,\Theta_2). \tag{5.8}$$

Определим операторные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -2\varepsilon I & -A_0-\alpha I & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -I & -\beta A_0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Легко видеть, что пара A, B стабилизируема линейной обратной связью $u_1 = \alpha v_1$, $u_2 = 0$, так что условие L^2-управляемости выполнено.

Неопределенная часть системы задается с помощью квадратичных форм

$$F^1(v,u) = \int\limits_\Omega (\Theta u_2 - u_1^2)dx, \qquad F^2(v,u) = \int\limits_\Omega \frac{\partial\Theta}{\partial t}u_2 dx. \tag{5.10}$$

По условиям (5.4), (5.5) имеем неравенства

$$F^1(v,u) \geqslant 0, \qquad \int\limits_0^t F^2(v,u)ds = \int\limits_0^t \frac{\partial\Theta}{\partial t}g(\Theta)ds = G[\Theta(t)] - G[\Theta_0] \geqslant -G[\Theta_0].$$

Эти неравенства имеют вид (1.3), причем первая квадратичная связь — локальная (в (1.3) $\gamma_1 = 0$ и t_k — любая последовательность), а вторая — интегральная ($\gamma_2 = -G[\Theta_0]$ с любой последовательностью t_k).

Задача (5.1)-(5.5) в исходной постановке является вещественной. Воспользуемся замечанием 3 к теореме 8 и перейдем к комплексным пространствам. Тогда квадратичные формы (5.10) будут расширены до эрмитовых, а функционал (2.10) будет иметь вид

$$J = \mathrm{Re}\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega \left[\tau_1(\Theta\bar{u}_2 - |u_1|^2) + \tau_2\frac{\partial\Theta}{\partial t}\bar{u}_2\right]dxdt, \tag{5.11}$$

(Черта над буквой — комплексное сопряжение.) Операторная функция $\Pi_\delta(i\omega)$ определяется соотношением (4.7). Положим $\delta = 0$ и рассмотрим $\Pi_0(i\omega)$. (Практически возможные выходы w удобно определять по виду $\Pi_0(i\omega)$, т. е. по „возможностям“ класса неопределенностей).

Система (1.1) имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial\Psi}{\partial t} + A_0\Psi + \alpha\Psi = u_1, \\ \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \beta A_0\Theta + \Psi - \gamma u_2 = 0. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Обозначим через λ_k собственные числа оператора A_0, а через e_k его собственные функции; $\lambda_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$), $\{e_k\}$ образует базис в $L^2(\Omega)$. Пусть Ψ^k, Θ^k, u^k — коэффициенты рядов Фурье соответствующих функций:

$$\Psi(x,t) = \sum_k \Psi^k(t) e_k, \qquad \Theta(x,t) = \sum_k \Theta^k(t) e_k, \qquad u(x,t) = \sum_k u^k(t) e_k.$$

Тогда операторную 2×2 матрицу-функцию $\Pi_0(i\omega)$ можно представить в виде $(\Pi_0(i\omega)\tilde{u}, \tilde{u}) = \sum_k (\Pi_0^k(i\omega)\tilde{u}^k, \tilde{u}^k)$. Вычислим $\Pi_0^k(i\omega)$. Для этого разложим функции в (5.12) в ряды Фурье и приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнений. К полученной последовательности ($k = 1, 2, \dots$) систем применим преобразование Фурье по t, полагая начальные условия нулевыми. Получим

$$\begin{aligned} &-\omega^2 \tilde{\Psi}^k(i\omega) + 2i\omega\varepsilon \widetilde{\Psi}^k(i\omega) + (\lambda_k + \alpha)\widetilde{\Psi}^k(i\omega) = \tilde{u}_1^k(i\omega), \\ &i\omega\widetilde{\Theta}^k(i\omega) + \beta\lambda_k\widetilde{\Theta}^k(i\omega) - \gamma\tilde{u}_2^k(i\omega) + \widetilde{\Psi}^k(i\omega) = 0. \end{aligned}$$

Выражая из этих равенств $\widetilde{\Psi}^k$ и $\widetilde{\Theta}^k$ через $\tilde{u}_1^k$, получим

$$\widetilde{\Psi}^k(i\omega) = \chi_0(i\omega, \lambda_k)\tilde{u}_1^k, \qquad \widetilde{\Theta}^k(i\omega) = \chi_1(i\omega, \lambda_k)\tilde{u}_1^k + \chi_2(i\omega, \lambda_k)\tilde{u}_2^k. \tag{5.13}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi_0(i\omega, \lambda_k) &= (-\omega^2 + 2i\omega\varepsilon + \lambda_k + \alpha)^{-1}, \\ \chi_1(i\omega, \lambda_k) &= (i\omega + \beta\lambda_k)^{-1}(-\omega^2 + 2i\omega\varepsilon + \lambda_k + \alpha)^{-1}, \\ \chi_2(i\omega, \lambda_k) &= \gamma(i\omega + \beta\lambda_k)^{-1}. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье по t в (5.11) и раскладывая функции Θ, u_j в ряды Фурье по x, получим из равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} &-(\Pi_0^k(i\omega)\tilde{u}^k, \tilde{u}^k) \\ &\quad = \tau_1|\tilde{u}_1^k|^2 + \mathrm{Re}[(\tau_1 + i\omega\tau_2)\chi_2(i\omega, \lambda_k)|\tilde{u}_2^k|^2 \\ &\quad\quad + \mathrm{Re}[(\tau_1 + i\omega\tau_2)\chi_1(i\omega, \lambda_k)\tilde{u}_1^k\bar{\tilde{u}}_2^k]. \end{aligned}$$

Матрица $\Pi_0^k(i\omega)$ отрицательна, если $\tau_1 > 0$ и $\det \Pi_0^k(i\omega) > 0$ для всех $\omega \in R^1$, т. е.

$$4\tau_1 \mathrm{Re}[(\tau_1 + i\omega\tau_2)\chi_2(i\omega, \lambda_k)] - |(\tau_1 + i\omega\tau_2)\chi_1(i\omega, \lambda_k)|^2 > 0. \tag{5.14}$$

Выберем $\tau_1 = \beta\lambda_1$, $\tau_2 = 1$ и после несложных вычислений получим, что $\Pi^k(i\omega) < 0$ $\forall\omega \in \mathbb{R}^1$ и $\forall k$, если выполнены следующие два условия:

$$4\nu^2\gamma\beta\lambda_1 > 1, \qquad 8\varepsilon^2\gamma\beta\lambda_1(\mu + \sqrt{\mu^2 - (4\gamma\beta\lambda_1)^{-1}}) > 1. \tag{5.15}$$

Здесь $\nu = \min_k |\lambda_k + \alpha|$, $\mu = \min_{\lambda_k+\alpha>0}(\lambda_k + \alpha)$; $\mu \geqslant 0$.

Теперь рассмотрим вопрос о выходе w. Пусть $\Pi^k_\delta(i\omega)$ — матрица Π^k для эрмитовой формы (4.7). Рассматривая асимптотическое поведение элементов $\Pi^k_\delta(i\omega)$ при $\omega \to \infty$ и $k \to \infty$, найдем, что для достаточно малых δ будет выполнено условие $\Pi^k_\delta(i\omega) \leqslant 0$ для выходов $w = v_2 = \Psi$, $w = v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, $w = \frac{\partial^2 \Psi}{dt^2}$, $w = \frac{\partial \Theta}{\partial t}$. Для полного выхода это (необходимое) условие не выполнено. Можно проверить, что для рассматриваемой задачи выполнено условие (4.11) для $u(i\omega) \in L^2(R^1, U)$. Эту громоздкую, но несложную проверку мы опускаем.

Утверждение. Нелинейная неопределенная система (5.1)–(5.5) является W-дихотомичной по выходам $w_1 = \nu = [\Psi'_t, \Psi, \Theta]$ и $w_2 = \frac{\partial \nu}{\partial t} = [\Psi''_t, \Psi_t, \Theta_t]$, если выполнены соотношения (5.15). Если $\alpha \geqslant 0$, то эта система абсолютно устойчива по выходам w_1, w_2. В частности, при условиях (5.15), система (5.1)–(5.5) не имеет стационарных решений, кроме тривиального.

Замечание. Условия (5.15) нельзя улучшить при помощи использования функций Ляпунова вида „квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности“.

Список литературы

[1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970.

[2] Попов В. М., *Гиперустойчивость автоматических систем*, Наука, М., 1970.

[3] Якубович В. А., *Методы теории абсолютной устойчивости*, Методы исследования нелинейных систем автоматического управления (под ред. Р. А. Нелепина), Наука, М., 1975, сс. 74–180.

[4] Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А., *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия*, Наука, М., 1978.

[5] Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И., *Частотные методы в теории колебаний.* Ч. 1, 2, СПГУ, СПб., 1992.

[6] Shiljak D. D., *Nonlinear systems. The parameter analysis and design*, John Wiley and Sons, New York etc., 1969.

[7] Narendra K., Taylor J., *Frequency domain criteria for absolute stability*, Academic Press, New York–London, 1973.

[8] Якубович В. А., *Частотные методы качественного исследования нелинейных систем*, Труды 4-го Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике (Киев, 1976), Наук. думка, Киев, 1978, сс. 128–148; Пер. на англ. яз., Мир, М., 1981, сс. 102–126.

[9] Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А., *Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем*, Труды 2-го Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике (Москва, 1964): Обзорные докл. Вып. 1, Наука, М., 1965, сс. 30–63.

[10] Барабанов Н. Е., Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Лихтарников А. Л., Матвеев А. С., Смирнова В. Б., Фрадков А. Л., *Частотная теорема (лемма Якубовича-Калмана) в теории управления*, Автомат. и телемех. **1996**, № 10, 3–40.

[11] Якубович В. А., *Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления.* I, II, Сиб. мат. ж. **15** (1974), № 3, 639–668; **16** (1975), № 5, 1081–1102.

[12] Лихтарников А. Л., Якубович В. А., *Частотная теорема для уравнений эволюционного типа*, Сиб. мат. ж. **17** (1976), № 5, 1069–1085.

[13] Лихтарников А. Л., Якубович В. А., *Частотная теорема для непрерывных однопараметрических полугрупп*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **41** (1977), № 4, 895–911.

[14] Лихтарников А. Л., *Критерии абсолютной устойчивости нелинейных операторных уравнений*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **41** (1977), № 5, 1064–1083.

[15] Якубович В. А., *К абстрактной теории абсолютной устойчивости нелинейных систем*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1977**, вып. 3, 99–118.

[16] Лихтарников А. Л., Якубович В. А., *Абсолютная устойчивость нелинейных систем*, Доп. к кн.: В. Резван, Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием, Наука, М., 1983, сс. 287–356.

[17] Лихтарников А. Л., Якубович В. А., *Абстрактные критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем по линейному выходу и их применение.* I, II, Сиб. мат. ж. **23** (1982), № 4, 103–121; **24** (1983), № 5, 129–148.

[18] Лихтарников А. Л., *Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных распределенных систем по линейному выходу*, Численные методы в гидромеханике, ЛИСИ, Л., 1981, сс. 71–76.

[19] Лихтарников А. Л., *Дихотомия и абсолютная неустойчивость в нелинейных системах с распределенными параметрами*, Численные методы в задачах математической физики, ЛИСИ, Л., 1983, сс. 22–27.

[20] Лихтарников А. Л., *Глобальная асимптотика и квазирегулярность аттракторов в нелинейных задачах математической физики*, Численные методы в задачах математического моделирования, ЛИСИ, Л., 1987, сс. 17–20.

[21] Пятницкий Е. С., *Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем*, Автомат. и телемех. **1970**, № 1, 5–15.

[22] Якубович В. А., *Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками*, Автомат. и телемех. **1967**, № 6, 5–30.

[23] Якубович В. А., *Минимизация квадратичных функционалов при квадратичных ограничениях и необходимость частотного условия в квадратичном критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем управления*, Докл. АН СССР **209** (1973), № 5, 1039–1042.

[24] Брусин В. А., *Существование глобального функционала Ляпунова для некоторых классов нелинейных распределенных систем*, Прикл. мат. и мех. (Москва) **40** (1976), № 6, 1135–1142.

[25] Якубович В. А., *S-процедура в нелинейной теории регулирования*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1971**, вып. 1, 62–77.

[26] Yakubovich V. A., *Nonconvex optimization problem: the infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic constraints*, Systems Control Lett. **19** (1992), 13–22.

[27] Якубович В. А., *Об одном методе решения специаьлных задач глобальной минимизации*, Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1 **1992**, вып. 2, 58–68.

[28] Аров Д. З., Якубович В. А., *Условия полуограниченности квадратичных фукнционалов на пространствах Харди*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1982**, вып. 1, 11–18.

[29] Якубович В. А., *Условия полуограниченности квадратичного функционала на подпространстве гильбертова пространства*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1981**, вып. 4, 50–53.

[30] Ладыженская О. А., *О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений*

Навье–Стокса и других уравнений с частными производными, Успехи мат. наук **42** (1987), № 6, 25–60.

[31] Якубович В. А., *Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости при некоторых типах квадратичных ограничений*, Докл. АН СССР **209** (1973), № 2, 312–315.

[32] Willems J. C., *Dissipative dynamical systems*. Part I: *General theory*, Arch. Rational Mech. Anal. **45** (1972), no. 5, 321–393.

[33] Hill D. A., Moylan P. J., *The stability of nonlinear dissipative systems*, IEEE Trans. Automat. Control **21** (1976), no. 5, 708–711.

[34] Willems J., *The analysis of feedback systems*, MIT Press, 1971.

[35] Якубович В. А., *Абсолютная устойчивость неопределенных систем с несколькими интегральными квадратичными связями*, Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1997.

[36] Бутковский А. Г., *Методы управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1975.

[37] Дюво Г., Лионс Ж.-Л., *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980.

[38] Вестерхофф Х., Ван Дам К., *Термодинамика и регуляция превращений свободной энергии в биосистемах*, Мир, М., 1992.

Поступило 15 июля 1997 г.