Д. В. Аносов, Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны, *Докл. АН СССР*, 1962, том 145, номер 4, 707–709

Доклады Академии наук СССР
1962. Том 145, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. В. АНОСОВ

ГРУБОСТЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА КОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 19 III 1962)

1. Заданием на компактном многообразии W^m гладкого векторного поля $f(w)$ определяется динамическая система

$$\dot{w} = f(w). \tag{1}$$

Эта динамическая система называется грубой, если для любого векторного поля $g(w)$, достаточно близкого к $f(w)$ в смысле C^1, найдется гомеоморфизм (вообще говоря, не гладкий) χ: $W^m \to W^m$, близкий к тождественному в смысле C^0 и переводящий траектории системы (1) в траектории возмущенной системы

$$\dot{w} = g(w). \tag{2}$$

2. Пусть V^n — компактное риманово многообразие отрицательной кривизны (кривизна должна быть отрицательна в любой точке и в любом двумерном направлении), а W^{2n-1} — пространство линейных элементов V^n. Геодезические линии многообразия V^n определяют некоторую динамическую систему («геодезический поток») в W^{2n-1}. Я докажу высказанное Смейлом предположение, что эта динамическая система — грубая. (В связи с этим см. ([3], [4]).)

Доказательство состоит в том, что если кривизна отрицательна, то геодезический поток удовлетворяет некоторым «условиям» (У), которые формулируются ниже и которые оказываются достаточными для грубости. То, что условия (У) выполняются для геодезического потока, фактически доказано Адамаром и Э. Картаном (см. прибавление III к книге ([1])); основная идея доказательства того, что эти условия достаточны для грубости, будет указана в п. 5.

3. Система (1) определяет группу преобразований F_t: $W^m \to W^m$ ($F_t(w)$ есть значение в момент t решения, проходящего через точку w при $t = 0$). F_t индуцируют соответствующие отображения касательного пучка:

$$\tilde{F}_t\colon T(W^m) \to T(W^m).$$

Система уравнений в вариациях для системы (1) описывает динамическую систему $\{\tilde{F}_t\}$ в $T(W^m)$ и имеет вид (в понятных обозначениях)

$$\dot{\omega} = f_w(F_t(w))\,\omega. \tag{3_w}$$

Здесь $\omega(t) = \tilde{F}_t\omega(0) \in R^m_{F_t(w)}$ *. ω — вектор, но ни $\dot{\omega}$, ни f_w не имеют тензорного характера.

* R^m_w обозначает касательное пространство к W^m в точке w.

Условия (У) гласят:

(У 1). $f(w) \neq 0$ при всех w.

(У 2). Любое R_w^m разлагается в прямую сумму

$$R_w^m = X_w^k \oplus Y_w^l \oplus R_w^1, \quad \dim X = k \neq 0, \quad \dim Y = l \neq 0,$$

где R_w^1 порождается вектором $f(w)$, и, кроме того:

а) любое решение системы $(З_w)$, для которого $\omega(0) \in X_w^k$, удовлетворяет неравенствам

$$|\omega(t)| \leqslant a|\omega(0)|e^{-ct} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \qquad |\omega(t)| \geqslant b|\omega(0)|e^{-ct} \quad \text{при} \quad t \leqslant 0;$$

б) любое решение системы $(З_w)$, для которого $\omega(t) \in Y_w^l$, удовлетворяет неравенствам

$$|\omega(t)| \leqslant a|\omega(0)|e^{ct} \quad \text{при } t \leqslant 0, \qquad |\omega(t)| \geqslant b|\omega(0)|e^{ct} \quad \text{при } t \geqslant 0.$$

Константы a, b, c положительны и одни и те же для всех w и всех $\omega(t)$ с начальными значениями из $X_w^k \cup Y_w^l$.

Условие (У 1) означает, что система не имеет положений равновесия; так оно и есть для геодезических потоков. $f(F_t(w))$ всегда является одним из решений $(З_w)$, и это решение, в силу компактности и (У 1), не стремится ни к 0, ни к ∞.

(У 2) описывает поведение всех остальных решений. Легко показать, что подпространства X_w^k и Y_w^l определяются своими свойствами а) и б) однозначно, что k, l — одни и те же для всех w и что X_w^k, Y_w^l непрерывно зависят от w (причем очевидно, что если w меняется вдоль траектории, то они меняются гладко).

4. Поскольку нас интересует только взаимное расположение траекторий, а не сдвиги вдоль них, то целесообразно ввести новую систему координат, в которой одна координата отсчитывалась бы вдоль траектории и была пропорциональна времени, а остальные координаты отсчитывались бы по маленьким площадкам $\Pi(w)$, трансверсальным к траектории. Такую систему надо ввести вдоль каждой траектории, причем это необходимо сделать в каком-то смысле «согласованно» и «равномерно». Вот более точное описание. В каждой точке $w \in W^m$ мы строим маленькую гладкую $(m-1)$-мерную площадку $\Pi(w)$, имеющую в своем центре w касательную плоскость $X_w^k \oplus Y_w^l$; при изменении w площадка $\Pi(w)$ должна меняться непрерывно, а при изменении w вдоль траекторий — даже гладко. Возьмем траекторию $F_t(w_0)$ и рассмотрим какую-нибудь точку w_1 вблизи нее. Точка w_1 лежит на какой-то из площадок $\Pi(F_t(w_0))$; пусть, скажем, $w_1 \in \Pi(F_{t_1}(w_0))$. Чтобы определить положение точки w_1, надо, таким образом, задать число t_1 и указать положение w_1 на площадке $\Pi(F_{t_1}(w_0))$. Для описания поведения какой-нибудь траектории вблизи $F_t(w_0)$ нужно следить за тем, как меняется при изменении t точка пересечения рассматриваемой траектории с $\Pi(F_t(w_0))$, а для движения этой точки получается некоторая система дифференциальных уравнений. И все это надо проделать для всех $w_0 \in W^m$, так что указанная система дифференциальных уравнений содержит w_0 в качестве параметра.

5. Основная идея доказательства достаточности условий (У) для грубости состоит в следующем. Попытаемся найти ту траекторию системы (2), в которую переходит при гомеоморфизме χ траектория $F_t(w)$ системы (1). Искомая траектория системы (2) должна при всех t — как при $t \geqslant 0$, так и при $t \leqslant 0$ — находиться вблизи исходной траектории $F_t(w)$. Оказывается, что если $g - f$ достаточно мало, то при любом w те точки $w' \in \Pi(w)$, сквозь которые проходят траектории системы (2), остающиеся при всех $t \geqslant 0$ в некоторой малой окрестности исходной траектории системы (1), образуют гладкое k-мерное многообразие $M^{k}(w) \subset \Pi(w)$, а те точки $w'' \in \Pi(w)$, сквозь

которые проходят траектории системы (2), остающиеся при всех $t \leqslant 0$ в некоторой малой окрестности исходной траектории системы (1), образуют гладкое l-мерное многообразие $N^l(w) \subset \Pi(w)$. С изменением w $M^k(w)$ и $N_l(w)$ меняются непрерывно. Касательные плоскости к $M^k(w)$ близки к X^k_w, а касательные плоскости к $N^l(w)$ близки к Y^l_w; таким образом, $M^k(w)$ и $N^l(w)$ пересекаются в одной и только одной точке $w' \in \Pi(w)$ и w' непрерывно зависит от w. Как легко видеть, отображение χ: $w \to w'$ дает искомый гомеоморфизм.

Если перефразировать сформулированные в предыдущем абзаце утверждения в терминах тех систем, о которых говорилось в п. 4 (и которые описывают поведение траекторий системы (2) вблизи фиксированных траекторий $F_t(w)$ системы (1)), то получится теорема, которая аналогична известной теореме Адамара — Перрона об инвариантных многообразиях (доказанной также и многими другими авторами, но позднее) и которую можно охарактеризовать как «некоторую теорему об условной устойчивости при постоянно действующих возмущениях». Вероятно, любое доказательство теоремы Адамара — Перрона можно приспособить и для наших целей. Например, вполне пригодно (с соответствующими модификациями) доказательство, приведенное в ([2]).

Примечание при корректуре. Можно показать, что система, удовлетворяющая условиям (У) и имеющая интегральный инвариант, является эргодической и что ее периодические траектории образуют всюду плотное множество.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
1 III 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Картан, Геометрия римановых пространств, М.— Л., 1936. [2] Д. В. Аносов, Научн. докл. высш. школы, физ.-матем. науки, № 1, 3 (1959). [3] С. Смейл, Доклад на симпозиуме по нелинейным колебаниям, Киев, 1961. [4] В. И. Арнольд, Я. Г. Синай, ДАН, **144**, № 4, 695 (1962).