С. И. Гельфанд, Д. А. Каждан, Об одном интегральном уравнении, связанном с движением импульса по окружности, *Докл. АН СССР*, 1961, том 141, номер 3, 527–530

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 141, № 3

МАТЕМАТИКА

С. И. ГЕЛЬФАНД и Д. А. КАЖДАН

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, СВЯЗАННОМ С ДВИЖЕНИЕМ ИМПУЛЬСА ПО ОКРУЖНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 VI 1961)

Эта заметка посвящена следующей задаче. Пусть мы имеем окружность, по которой распространяется точечный импульс. Скорость распространения импульса зависит от состояния данной точки окружности, которое характеризуется временем τ, истекшим с момента последнего прохождения импульса через эту точку окружности. Тогда

$$v = c(\tau), \tag{1}$$

где $c(\tau)$ — заданная функция, непрерывная и монотонно возрастающая. Наша цель — доказать, что если мы зададим τ на окружности произвольным образом и затем пустим по окружности один или несколько импульсов, то их скорость будет стремиться к некоторой постоянной, не зависящей от начального состояния окружности. Если число импульсов больше одного, то скорость, к которой они стремятся, будет одинакова для всех импульсов, и они установятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Эта задача была поставлена в работе ([1]).

Докажем наше утверждение для случая одного импульса. Прежде сформулируем задачу несколько иначе. Развернем окружности на прямую, т. е. каждый оборот импульса будем изображать отрезком прямой. Пусть импульс находится в точке x прямой. Тогда его скорость есть $v = c[\tau(x)]$, где $\tau(x)$ — время, прошедшее с момента последнего возбуждения той же точки окружности, т. е. точки $x - 1$ прямой (мы предполагаем для простоты, что окружность имеет единичную длину). Точнее, $\tau(x) = t(x) - t(x-1)$, где $t(x)$ — время, прошедшее от начала движения импульса до его прихода в точку x. Нам нужно доказать, что $\tau(x)$ стремится к пределу при $x \to \infty$. Для решения задачи придется предположить, что функция $c(\tau)$ строго монотонна и всюду дифференцируема.

Покажем, что для $x \geqslant 1$ функция $\tau(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\int\limits_{x-1}^{x} \frac{dy}{c[\tau(y)]} = \tau(x). \tag{2}$$

Действительно, по определению скорости имеем $v = c[\tau(x)]$, т. е. $t'(x) = c^{-1}[\tau(x)]$. Интегрируя, получаем

$$\int\limits_{x-1}^{x} \frac{dy}{c[\tau(y)]} = t(x) - t(x-1) = \tau(x).$$

Ясно, что если функция $\tau(x)$ задана для $0 \leqslant x < 1$, то решение уравнения (2) существует и единственно для любых $x \geqslant 1$. Цель нашей заметки — доказать следующую теорему:

Теорема. *Пусть $\tau(x)$ — решение интегрального уравнения* (2). *Тогда при $x \to \infty$ функция $\tau(x)$ стремится к конечному пределу.*

Доказательство. Сначала выведем из (2) некоторые нужные формулы. Дифференцируя равенство (2), получим

$$\tau'(x) = c^{-1}[\tau(x)] - c^{-1}[\tau(x-1)] \quad (x \geqslant 1). \tag{3}$$

Применяя формулу (2) к p последовательным оборотам и складывая полученные равенства, имеем

$$\int\limits_{x-p}^{x} \frac{dy}{c[\tau(y)]} = \sum_{k=0}^{p-1} \tau(x-k) \quad (x \geqslant p-1). \tag{4}$$

Дифференцируя равенство (3), легко получим, что $|\tau''(x)|$ ограничен.

Мы имеем теперь все формулы, нужные для решения задачи. Разобьем полупрямую $x \geqslant 0$ на отрезки длины 1 с целочисленными концами и назовем отрезок $[n-1, n]$, где n — целое число, n-м отрезком. Обозначим через M_n наибольшее, а через m_n — наименьшее значение функции $\tau(x)$ на n-м отрезке и докажем, что числа M_n не возрастают, а m_n не убывают с ростом n.

Докажем это для чисел M_n. Обозначим через x'_n точку, в которой достигается наибольшее значение $\tau(x)$ на n-м отрезке. Нам нужно доказать, что $M_{n-1} \geqslant M_n$. Нужно различать два случая.

Пусть сперва $\tau'(x'_n) \geqslant 0$. Тогда по формуле (3) имеем $c^{-1}[\tau(x'_n)] - c^{-1}[\tau(x'_n - 1)] \geqslant 0$ и ввиду того, что функция $c^{-1}(\tau)$ убывает, получим $\tau(x'_n - 1) \geqslant \tau(x'_n) = M_n$, и, значит, $M_{n-1} \geqslant \tau(x'_n - 1) \geqslant M_n$.

Теперь пусть $\tau'(x'_n) < 0$. Тогда точка x'_n есть левый конец n-го отрезка, и, значит, правый конец $(n-1)$-го отрезка, т. е. и в этом случае $M_{n-1} \geqslant \tau(x'_n) = M_n$.

Таким образом, мы показали, что последовательность $\{M_n\}$ не возрастает. Так же можно показать, что последовательность $\{m_n\}$ не убывает. Но ясно, что обе эти последовательности ограничены, поэтому они имеют пределы M и m.

Если мы теперь докажем, что $\lim M_n = \lim m_n$ $(n \to \infty)$, т. е. что $M = m$, то теорема будет доказана. Для доказательства нам потребуется следующая:

Лемма. *Обозначим через x'_n точку, в которой достигается наибольшее, а через x''_n — точку, в которой достигается наименьшее значение $\tau(x)$ на n-м отрезке. Тогда при любом фиксированном целом $p \geqslant 0$ разности $\tau(x'_n - p) - M_n$ и $\tau(x''_n - p) - m_n$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.*

Докажем это утверждение для максимумов (для минимумов доказательство аналогично). Будем доказывать по индукции. Для $p = 0$ утверждение очевидно. Допустим, что $\tau(x'_n - p) - M_n \to 0$ при $n \to \infty$. Докажем тогда, что и $\tau(x'_n - p - 1) - M_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого покажем сначала, что $\tau'(x'_n - p) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим $|\tau'(x'_n - p)| = \varepsilon_n$. Возьмем теперь для какого-нибудь n отрезок длиной $\varepsilon_n/2\alpha$, где $\alpha = \max|\tau''(x)|$, причем так, что один его конец есть точка $x'_n - p$, а сам отрезок направлен в сторону возрастания $\tau(x)$. Пусть второй конец отрезка есть точка x_0. Тогда для любой точки ξ, принадлежащей отрезку $[x'_n - p, x_0]$, будет $\tau'(\xi) > \varepsilon_n/2$. Отсюда ясно, что $\tau(x)$ изменится на отрезке $[x'_n - p, x_0]$ больше, чем на $\frac{\varepsilon_n}{2\alpha}\,\frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{\varepsilon_n^2}{4\alpha}$, т. е. $\tau(x_0) - \tau(x'_n - p) > \varepsilon_n^2/4\alpha$. Но $\tau(x_0) < M_{n-p-1}$, поэтому $M_{n-p-1} - \tau(x'_n - p) = M_{n-p-1} - M_n + M_n - \tau(x'_n - p) > \varepsilon_n^2/4\alpha$, и, значит, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как и $M_{n-p-1} - M_n \to 0$, и $M_n - \tau(x'_n - p) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теперь легко показать, что $\tau(x'_n - p - 1) - M_n \to 0$. Действительно, так как $\tau'(x_n - p) \to 0$, имеем, применяя (3), $c^{-1}[\tau(x'_n - p)] - c^{-1}[\tau(x'_n - p - 1)] \to 0$, и, значит, в силу строгой монотонности $c^{-1}(\tau)$, $\tau(x'_n - p - 1) - \tau(x'_n - p) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\tau(x'_n - p - 1) - M_n = \tau(x'_n - p - 1) - \tau(x'_n - p) + \tau(x'_n - p) - M_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, мы доказали, что $\tau(x'_n - p) - M_n \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогично доказывается, что и $\tau(x''_n - p) - m_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, т. е. докажем, что $M = m$. Предположим противное, а именно предположим, что $M > m$. Тогда можно найти такое натуральное p и такое $\varepsilon > 0$, что $p(M - m - 2\varepsilon) > 2c^{-1}(m_1)$, где m_1 — минимум $\tau(x)$ на первом отрезке, а значит, и абсолютный минимум $\tau(x)$. В силу доказанной леммы можно найти такое n, что для всех натуральных $k < p$ будут выполняться неравенства $|\tau(x'_n - k) - M_n| < \varepsilon$ и $|\tau(x''_n - k) - m_n| < \varepsilon$. Теперь напишем равенство (4) для точек x'_n и x''_n. Мы получим

$$\int_{x'_n - p}^{x'_n} \frac{dy}{c[\tau(y)]} = \sum_{k=0}^{p-1} \tau(x'_n - k); \qquad \int_{x''_n - p}^{x''_n} \frac{dy}{c[\tau(y)]} = \sum_{k=0}^{p-1} \tau(x''_n - k)$$

и, вычитая второе равенство из первого,

$$\int_{x'_n - p}^{x'_n} \frac{dy}{c[\tau(y)]} - \int_{x''_n - p}^{x''_n} \frac{dy}{c[\tau(y)]} =$$

$$= \int_{x'_n - p}^{x''_n - p} \frac{dy}{c[\tau(y)]} - \int_{x'_n}^{x''_n} \frac{dy}{c[\tau(y)]} = \sum_{k=0}^{p-1} \tau(x'_n - k) - \tau(x''_n - k). \tag{5}$$

Покажем, что это равенство не может иметь места, так как его левая часть меньше правой. Для этого оценим их. Мы имеем

$$\int_{x'_n - p}^{x''_n - p} \frac{dy}{c[\tau(y)]} - \int_{x'_n}^{x''_n} \frac{dy}{c[\tau(y)]} \leqslant 2c^{-1}(m_1),$$

так как длина каждого из промежутков интегрирования равна $|x'_n - x''_n| < 1$, а максимум подынтегрального выражения равен $c^{-1}(m_1)$.

С другой стороны, оценивая правую часть равенства (5), получаем

$$\sum_{k=0}^{p-1} \tau(x'_n - k) - \tau(x''_n - k) \geqslant \sum_{k=0}^{p-1} (M_n - \varepsilon) - (m_n + \varepsilon) \geqslant p[(M - \varepsilon) - (m + \varepsilon)] =$$

$$= p(M - m - 2\varepsilon) > 2c^{-1}(m_1) \geqslant \int_{x'_n - p}^{x''_n - p} \frac{dy}{c[\tau(y)]} - \int_{x'_n}^{x''_n} \frac{dy}{c[\tau(y)]},$$

что противоречит (5). Таким образом, наше предположение о том, что $M > m$ неверно, т. е. $M = m$, и функция $\tau(x)$, а вместе с ней и $v = c[\tau(x)]$ стремятся к пределу при $x \to \infty$. Теорема доказана.

В заключение покажем, что предельная скорость импульса единственна и не зависит от начального состояния кольца, т. е. от задания функции $\tau(x)$ для $0 \leqslant x < 1$. В самом деле, пусть импульс движется по кольцу с постоянной скоростью v_0. Тогда он проходит один оборот за время $\tau_0 = lv_0^{-1}$ (l — длина кольца). Но, по формуле (1), $v_0 = c(\tau_0) = c(lv_0^{-1})$. Однако это уравнение относительно v_0 имеет единственное решение, поскольку функция $c(ly^{-1})$ убывает вместе с ly^{-1}, а функция y возрастает. Ясно также, что это решение не зависит от начального задания $\tau(x)$ на кольце.

Аналогично разбирается случай, когда число импульсов больше одного. В этом случае вводятся функции $\tau_i(x)$, аналогичные функции $\tau(x)$, по следующим формулам:

$$\tau_1(x) = t_1(x) - t_k(x-1);\ \tau_2(x) = t_2(x) - t_1(x),\ \tau_k(x) = t_k(x) - t_{k-1}(x),$$

где k — число импульсов, а $t_i(x)$ — время, прошедшее от начала движения импульсов до прихода i-го импульса в точку x. Функции $\tau_i(x)$ при $x \geqslant 1$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \tau_1'(x) = c^{-1}[\tau_1(x)] - c^{-1}[\tau_k(x-1)] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau_k'(x) = c^{-1}[\tau_k(x)] - c^{-1}[\tau_{k-1}(x)]. \end{gathered}$$

Эти уравнения можно записать и в интегральной форме

$$\begin{gathered} \tau_1(x) + \tau_2(x) + \ldots + \tau_k(x) = \int\limits_{x-1}^{x} \frac{dy}{c[\tau_k(y)]}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau_1(x) + \tau_2(x-1) + \ldots + \tau_k(x-1) = \int\limits_{x-1}^{x} \frac{dy}{c[\tau_1(y)]}. \end{gathered} \tag{6}$$

Так же как было доказано в случае одного импульса, можно доказать, что функции $\tau_i(x)$, являющиеся решением уравнений (6), стремятся к пределу при $x \to \infty$. Ясно также, что эти пределы должны быть одинаковы для всех функций, т. е. что импульсы установятся на одинаковых расстояниях друг от друга.

Поступило
7 VI 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, М. Л. Цейтлин, ДАН, **131**, № 6 (1960).