E. T. Avanesov, V. A. Gusev, Units and linear recurrent sequences, *Chebyshevskii Sb.*, 2014, Volume 15, Issue 3, 4–11

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 3 (2014)

УДК 511.6

ЕДИНИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Э. Т. Аванесов, В. А. Гусев (г. Иваново)

Аннотация

Известные последовательности чисел Фибоначчи рассматриваются как линейные рекуррентные последовательности, что позволяет дать описание единиц кубических полей отрицательного дискриминанта. Распространение указанной процедуры приводит к описанию аналогичной задачи для произвольных алгебраических полей и интерпретируется применительно к диофантовым уравнениям.

Ключевые слова: поле, последовательность, единица, рекурсия, Фибоначчи, уравнение, Диофант.

Библиография: 2 названия.

UNITS AND LINEAR RECURRENT SEQUENCES

E. T. Avanesov, V. A. Gusev (Ivanovo)

Abstract

The author suggests the famous description of cubic field units of negative discriminant with recurrent sequences which are analogous to Fibonacci numbers. It runs to derived algebraic field and it is interpreted as applied to Diophantine equations.

Keywords: field, sequence, unit, recursion, Fibonacci, equation, Diophantine.

Bibliography: 2 titles.

1. Введение

В работе [1] в качестве обобщения известных последовательности чисел Фибоначчи F_n рассмотрены линейные рекуррентные последовательности k-го порядка Y_m, $Y_m \in \mathbb{Z}$, определенные с помощью начальных значений Y_0, $Y_1, \ldots,$ Y_{k-1} и соотношения

$$Y_m = A_1 Y_{m-1} + A_2 Y_{m-2} + \ldots + A_k Y_{m-k}, \quad A_j \in \mathbb{Z} (j = 1, \ldots, k),\ A_k \neq 0,\ m \geqslant k. \quad (1)$$

Исходя из них, там же получено описание единиц кубических полей отрицательного дискриминанта.

В предлагаемом исследовании указанная конструкция распространяется на

1) полное решение соответствующей задачи для биквадратных полей сигнатуры 2 и

2) на описание всех единиц алгебраических полей степени $n \geqslant 3$, являющихся степенями какой-либо одной из основных единиц поля.

Кроме того, излагается интерпретация установленных теорем применительно к диофантовым уравнениям.

2. Необходимые сведения

Пусть K —- биквадратичное поле, порожденное произвольным корнем уравнения, имеющего две пары комплексно сопряженных корней, а элемент $\lambda \in K$ определяет собственный (минимальный многочлен)

$$g(\lambda) = \lambda^4 - A_1\lambda^3 - A_2\lambda^2 - A_3\lambda - A_4, \quad (2)$$

для корней которого λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ определитель Вандермонда равен

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 4} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Введем переменные x_0, x_1, x_2, x_3 и соответствующие определители M_i $(i = = 1, 2, 3, 4)$, где

$$M_1 = \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ x_2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ x_3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ x_2 & \lambda_1^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ x_3 & \lambda_1^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ x_2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_4^2 \\ x_3 & \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}, \quad M_4 = \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ x_2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ x_3 & \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{vmatrix}.$$

Определим многочлен $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ по формуле

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{W^2} \cdot \prod_{i=1}^{4} M_i.$$

Справедливы следующие предложения (см. [1], $K = 4$).

Теорема A. *Многочлен $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ имеет целые рациональные коэффициенты, а коэффициент при x_3^4 равен 1, далее*

$$f(Y_m, Y_{m+1}, Y_{m+2}, Y_{m+3}) = (-1)^m \cdot f(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) \cdot A_4^m.$$

Теорема B. *Если $\xi = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3$ — целое алгебраическое число поля K и $a_1 = Y_{m+3-i} - \sum_{j=1}^{3-1} A_j Y_{m+3-i-i}$, $(i = 0, 1, 2, 3)$, то для элемента ξ справедливо норменное уравнение*

$$Norm\xi = (-1)^m \cdot Norm\xi_0 \cdot A_4^m,$$

где ξ_0 определяет компоненты a_i компонента ξ при $m = 0$.

3. Случай биквадратичного поля

Здесь устанавливается следующая

Теорема 1. *Пусть K —- алгебраическое числовое поле 4 степени сигнатуры 2. δ — основная единица K с собственным многочленом*

$$g(x) = x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D, |D| = 1.$$

Если Y — линейная рекуррентная последовательность 4-го порядка с начальными значениями $Y_0 = Y_1 = Y_2 = 0$, $Y_3 = 1$ и соотношениями

$$Y_m = AY_{m-1} + BY_{m-2} + CY_{m-3} + DY_{m-4},$$

определенная и для отрицательных значений индекса m по формуле

$$Y_m = \frac{1}{D}(Y_{m+4} + AY_{m+1} + BY_{m+2} + CY_{m+1}),$$

задающей целочисленные значения Y_m ввиду условия $|D| = 1$, то все единицы поля K представляются формулой

$$\varepsilon = \pm \left(Y_m\delta^3 + (Y_{m+1} - AY_m)\,\delta^2 + (Y_{m+2} - AY_{m+1} - BY_m)\,\delta + \right.$$
$$\left. + (Y_{m+3} - AY_{m+2} - BY_{m+1} - CY_m)\right),$$

где m — пробегает целые значения.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 = \delta = \delta_1 - \lambda_2 = \delta_2$, $\lambda_3 = \delta_3$, $\lambda_4 = \delta_4$, $A = A_1$, $B = A_2$, $C = A_3$, $D = A_4$, где δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — корни $g(x)$.

Непосредственно усматривается, что $\mu_1^{(m)} = D_1\varepsilon_m$. Здесь $\mu_1^{(m)}$ получается из μ_1 заменой первого столбца соответствующими числами Y_m, Y_{m+1}, Y_{m+2}, Y_{m+3}, так то

$$M_1^{(m)} = \begin{vmatrix} Y_m & 1 & 1 & 1 \\ Y_{m+1} & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ Y_{m+2} & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 \\ Y_{m+3} & \delta_2^3 & \delta_3^3 & \delta_4^3 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon_m = Y_m\delta^3 + (Y_{m+1} - AY_m)\,\delta^2 + (Y_{m+2} - AY_{m+1} - BY_m)\,\delta + \\ + (Y_{m+3} - AY_{m+2} - BY_{m+1} - CY_m)\,.$$

С другой стороны, $\mu_1^{(m)} = \delta^m \mu_1^{(0)}$.

Но $\mu_1^{(0)} = D_1$ и таким образом $\varepsilon_m = \delta^m$, что и требовалось доказать. $\square$

4. Случай произвольного поля

Для произвольного $n \geqslant 3$ аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть k —- алгебраическое числовое поле степени $n \geqslant 3$, где $n = n_1 + 2n_2$, n_1 — число действительных корней, n_2 — число пар комплексных корней уравнения, порождающего поле K.*

Пусть δ_1, δ_2,...,δ_r $(r = n_1 + n_2 - 1)$ — единицы, составляющие систему основных единиц поля K, а их собственные многочлены соответственно

$$a_i(x) = x^n - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)} x^{n-j}, \text{ где } \left|A_n^{(i)}\right| = 1, i = 1, 2, 3, ...r.$$

Пусть далее $\{Y_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ — линейная рекуррентная последовательность порядка k с начальными значениями $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{k-2} = 0$, $Y_{k-1} = 1$ и соотношением

$$Y_m = A_1^{(i)} Y_{m-1} + A_2^{(i)} Y_{m-2} + \ldots + A_k^{(i)} Y_{m-k},$$

причем эта последовательность определена и для отрицательных значений индекса m, так как ввиду условия $\left|A_k^{(i)}\right| = 1$ каждый член

$$Y_m = \frac{1}{A_k^{(i)}} \left(Y_{m+k} - A_1^{(i)} Y_{m+k-1} - A_2^{(i)} Y_{m+k-2} - \ldots - A_{k-1}^{(i)} Y_{m+1} \right)$$

— целое число.

Тогда все единицы поля K, являющиеся степенями какой-либо из основных единиц поля, задаются формулой

$$\varepsilon = \pm \left\{ Y_m \delta^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} \left(Y_{m+j-1} - \sum_{l=1}^{j-1} A_l^{(i)} Y_{m+l-1} \right) \right\} = \delta_i^{m_i}, \quad i = 1, 2, 3, ...r.$$

В качестве приложений теоремы 3 из [1], а также только что доказанных теорем 1 и 2 устанавливаются следующие предложения, представляющие определенный интерес в диофантовом анализе.

КРИТЕРИЙ 1. Если основная единица δ кубического поля $K(\rho)$ отрицательного дискриминанта имеет вид:

$\delta = \rho$, где $\rho^3 - A\rho^2 - B\rho - C = 0$, $|C| = 11$; то все целые решения (u, v) диофантова уравнения

$$u^3 - Au^2v - Buv^2 - Cv^3 = 1$$

определяются по формулам

$$\begin{cases} u = Y_{m+2} - AY_{m+1}, \\ v = Y_{m+1}; \end{cases}$$

здесь $Y_0 = Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$, $Y_m = AY_{m-1} + BY_{m-2} + CY_{m-3}$, для таких значений индекса m, при которых $Y_m = 0$.

КРИТЕРИЙ 2. Если основная единица δ кубического поля $K(\rho)$, $\rho^3 - p_1\rho^2 - p_2\rho - p_3 = 0$, отрицательного дискриминанта имеет вид: $\delta = a\rho + b_1$, $a \neq 0$, а собственный многочлен для δ равен $g(x) = x^3 - Ax^2 - Bx - C$, $|C| = 1$, то все целые решения диофантова уравнения

$$u^3 - p_1u^2v - p_2uv^2 - p_3v^3 = 1$$

определяются из формул

$$\begin{cases} u = Y_{m+2} + (b - A)Y_{m+1}, \\ v = aY_{m+1}; \end{cases}$$

$Y_0 = Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$, $Y_m = AY_{m-1} + BY_{m-2} + CY_{m-3}$, для таких значений индекса m, при которых $Y_m = 0$.

Замечание 1. *Для чисто кубического поля $K\left(\sqrt[3]{\eta}\right)$ в случае двучленной основной единицы $\delta = a\sqrt[3]{\eta} + b$ находим с помощью преобразования Чирнгаузена собственный многочлен*

$$\delta^3 - 3b\delta^2 + 3b^2\delta - 1 = 0,$$

тогда $Y_0 = Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$, $Y_m = 3bY_{m-1} - 3b^2Y_{m-2} + Y_{m-3}$, *и все возможные целые решения* (u, v) *уравнения Делоне — Нагелла*

$$u^3 + \eta v^3 = 1$$

определяются из формул

$$\begin{cases} u = Y_{m+2} - 2bY_{m+1}, \\ v = aYm + 1, \end{cases}$$

для тех значений индекса m, *при которых* $Y_m = 0$.

Если $m = 0$, *то находим:* $u = b, v = a$.

Учитывая, что индуктивный подход легко обнаруживает представление

$$Y_m = \sum_{i=0}^{\left[\frac{m-2}{3}\right]} f_i b^{m-2-3i}, \quad f_i \in \mathbb{Z},$$

по-видимому, на этом пути можно показать единственность нетривиального решения уравнения Делоне — Нагелла.

КРИТЕРИЙ 3. Пусть $\delta = a\rho^2 + b\rho + c$ — основная единица кубического поля $K(\rho)$ отрицательного дискриминанта, ρ — корень уравнения

$$\rho^3 - p_1\rho^2 - p_2\rho - p_3 = 0,$$

а собственный многочлен δ равен

$$g(x) = x^3 - Ax^2 - Dx - C, \quad |C| = 1.$$

Тогда все целые решения (u, v) диофантова уравнения

$$u^3 + p_1u^2v - p_2uv^2 + p_3v^3 = 1$$

определяются из формул

$$\begin{aligned} u &= Y_{m+2} + (C - A)Y_{m+1} + (a^2p_1p_3 + 2abp_3 + C^2 - AC - B)Y_m, \\ v &= bY_{m+1} + \left(a^2(p_1p_2 + p_3) + 2abp_2 + 2bc - Ab\right)Y_m, \end{aligned}$$

где $Y_0 = Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$, $Y_m = FY_{m-1} - BY_{m-2} + CY_{m-3}$, для таких значений индекса m, при которых

$$aY_{m+1} + \left(a^2\left(p_1^2 + p_2\right) + 2abp_1 + 2ac + b^2 - Aa\right)Y_m = 0.$$

КРИТЕРИЙ 4. Если основная единица δ биквадратичного поля $K(\rho)$ сигнатуры 2 имеет вид: $\delta = \rho$, $\rho^4 - A\rho^3 - B\rho^2 - C\rho - D$, $|D| = 1$, то все целые решения (u, v) диофантова уравнения

$$u^4 + Au^3v - Bu^2v^2 + Cuv^3 - Dv^4 = 1$$

определяется из формул

$$\begin{cases} u = Y_{m+3} - AY_{m+2}, \\ v = Y_{m+2}, \end{cases}$$

для таких значений индекса m, при которых $Y_m = Y_{m+1} = 0$.

КРИТЕРИЙ 5. Если система основных единиц поля $K(\rho)$ степени $n = n_1 + 2n_2 \geqslant 3$, $\rho^n - p_1\rho^{n-1} - \ldots - p_n = 0$, имеет вид: $\delta_i = a_i\rho + b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$; $r = n_1 + n_2 - 1$), а их собственные многочлены соответственно

$$g_i(x) = x^n - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)} x^{n-j}, \quad |A_n^{(i)}| = 1,$$

последовательность $Y_m = \sum\limits_{j=1}^{k} A_j^{(i)} Y_{m-j}$; $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{k-2}$, $Y_{k-1} = 1$, тогда все целые решения (u, v) уравнения

$$u^n + p_1 u^{n-1} v + (-1)^{n-1} p_n v^n = 1,$$

для которых соответствующие двучленные единицы поля $K(\rho)$ являются степенями какой-либо из основных единиц δ_i, определяется из формул:

$$\begin{cases} u = Y_{m+k-1} + (b_i - A_1^{(i)} Y_{m+k-2}, \\ v = a_i Y_{m+k-2}, \end{cases}$$

для таких значений индекса m, при которых одновременно $Y_m = 0$, $Y_{m+1} = 0$, $\ldots$, $Y_{m+k-3} = 0$.

Аналогично формулируются критерии и при прочих возможных представлениях основных единиц.

5. Заключение

Множество $\{Y_m = 0\}$ принято называть множеством нулей линейной рекуррентной последовательности.

Как анонсировано в [2], существует алгоритм, определяющий по данной линейной рекуррентной последовательности порядка $\leqslant 3$ пусто ли множество нулей.

В случае $k > 3$ там же установлены в некотором смысле грубые оценки числа элементов множества нулей в терминах модулей коэффициентов собственного многочлена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kiss P. On some properties of linear recurrents // Publ. math. — 1983. — T/30. — С. 273–281.

2. Верещагин Н.К. О нулях линейных рекуррентных последовательностей // ДАН СССР. 1984. № 5. С. 1036–1039.

Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина
Поступило 4.02.2014