В. И. Воротников, Об устойчивости движения относительно части переменных для стохастических систем, *Автомат. и телемех.*, 1983, выпуск 7, 76–86

УДК 62–506

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВОРОТНИКОВ В. И.

(Нижний Тагил)

Для стохастических систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями Ито, рассматривается задача об устойчивости движения относительно части переменных. В случае линейных стационарных систем приводится алгоритм построения некоторой вспомогательной линейной стационарной системы, условия устойчивости которой по всем переменным являются достаточными условиями устойчивости относительно части переменных исходной системы. Выделяются классы нелинейных систем, для которых вопрос об устойчивости движения относительно части переменных может быть решен при анализе линейного приближения. На основе полученных результатов приводится правило построения управляющего воздействия в задаче стабилизации движения относительно части переменных. Даются примеры.

1. Введение

В последние годы задача А. М. Ляпунова об устойчивости движения для систем управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, интенсивно исследуется, начиная с работы [1], в направлении анализа устойчивости движения по отношению к части переменных, характеризующих состояние исходной системы.

В работе [2] с помощью метода функций Ляпунова начато изучение устойчивости движения относительно части переменных для стохастических систем. В данной статье для стохастических систем, описываемых дифференциальными уравнениями Ито, развивается предложенный в [3] способ исследования устойчивости динамических систем относительно части переменных.

2. Постановка задачи. Способ исследования линейных систем

Рассматривается стохастическая система управления, возмущенное движение которой описывается совокупностью дифференциальных уравнений в форме Ито [4]:

$$(1)\quad \begin{gathered} d\mathbf{x}(t)=A(t,\,\mathbf{x})\,dt+\sigma(t,\,\mathbf{x})\,d\zeta(t),\quad A(t,\,0)\equiv0,\quad \sigma(t,\,0)\equiv0,\\ \mathbf{x}=(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_p)=(\mathbf{y},\,\mathbf{z}),\quad m>0,\quad p>0,\quad n=m+p. \end{gathered}$$

Здесь $A(t,\,\mathbf{x})$ — n-мерная функция; $\sigma(t,\,\mathbf{x})$ — матрица размера $(n\times r)$; $\zeta(t)$ — r-мерный винеровский процесс, компоненты ζ_i $(i=1,\ldots,r)$ которого являются независимыми одномерными винеровскими процессами, причем $M\zeta_i=0$, $M\zeta_i^2(t)=2t$, M — знак математического ожидания.

Будем заниматься вопросом об устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x}=0$ относительно $y_1,\ldots,y_m$ ($\mathbf{y}$-устойчивости) по вероятности [1, 2].

Рассмотрим случай, когда система (1) является линейной системой с постоянными коэффициентами:

$$(2)\qquad dy_i(t)=\Big[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}y_k+\sum_{l=1}^{p}b_{il}z_l\Big]dt+\Big[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}'y_k+\sum_{l=1}^{p}b_{il}'z_l\Big]d\zeta(t),$$

$$dz_j(t)=\left[\sum_{k=1}^{m} c_{jk}y_k+\sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l\right]dt+\left[\sum_{k=1}^{m} c_{jk}'y_k+\sum_{l=1}^{p} d_{jl}'z_l\right]d\zeta(t),$$

$$i=1,\ldots,m;\quad j=1,\ldots,p,$$

где a_{ik}, a_{ik}', b_{il}, b_{il}', c_{jk}, c_{jk}', d_{jl}, d_{jl}' — постоянные.

Для приведения (2) к более удобному для изучения виду введем новые переменные

$$\mu_i^{(1)}=\sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l,\qquad \mu_i^{(2)}=\sum_{l=1}^{p} b_{il}'z_l\quad (i=1,\ldots,m)$$

и рассмотрим векторы

$$\mathbf{b}_i=(b_{i1},\ldots,b_{ip}),\quad \mathbf{b}_i'=(b_{i1}',\ldots,b_{ip}')\quad (i=1,\ldots,m).$$

Будем считать, что первые m_1 $(m_1\leqslant m)$ векторов $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{m_1}$ и первые m_2 $(m_2\leqslant m)$ векторов $\mathbf{b}_1',\ldots,\mathbf{b}_{m_2}'$ линейно независимы.

Введем обозначение

$$\bar{\mu}=(\bar{\mu}_1,\ldots,\bar{\mu}_{m_1},\ldots,\bar{\mu}_{m_1+m_2})=(\mu_1^{(1)},\ldots,\mu_{m_1}^{(1)},\ldots,\mu_{m_2}^{(2)}).$$

При таком введении новых переменных возможны два случая.

Случай 1. Уравнения (2) приводятся к виду

$$dy_i(t)=\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k+\sum_{l=1}^{m_1+m_2} \alpha_{il}\bar{\mu}_l\right]dt+\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}'y_k+\sum_{l=1}^{m_1+m_2} \alpha_{il}'\bar{\mu}_l\right]d\zeta(t),$$

(3)

$$d\bar{\mu}_j(t)=\left[\sum_{k=1}^{m} c_{jk}^{*}y_k+\sum_{l=1}^{m_1+m_2} e_{jl}\bar{\mu}_l\right]dt+\left[\sum_{k=1}^{m} c_{jk}^{*\prime}y_k+\sum_{l=1}^{m_1+m_2} e_{jl}'\bar{\mu}_l\right]d\zeta(t),$$

$$i=1,\ldots,m;\quad j=1,\ldots,m_1+m_2,$$

где α_{il}, α_{il}', c_{jk}^{*}, $c_{jk}^{*\prime}$, e_{jl}, e_{jl}' — постоянные.

Системы, описываемые (3), будем называть системами μ-вида по отношению к исходной системе (2).

Случай 2. Уравнения (2) не приводятся к (3) и, следовательно, имеют такой вид:

$$dy_i(t)=\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k+\sum_{l=1}^{m_1+m_2} \alpha_{il}\bar{\mu}_l\right]dt+\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k+\sum_{l=1}^{m_1+m_2} \alpha_{il}'\bar{\mu}_l\right]d\zeta(t),$$

$$d\bar{\mu}_j(t)=\left[\sum_{k=1}^{m} c_{jk}^{*}y_k+\sum_{l=1}^{p} d_{jl}^{*}z_l\right]dt+\left[\sum_{k=1}^{m} c_{jk}^{*\prime}y_k+\sum_{l=1}^{p} d_{jl}^{*\prime}z_l\right]d\zeta(t),$$

$$dz_s(t)=\left[\sum_{k=1}^{m} c_{jk}y_k+\sum_{l=1}^{p} d_{jl}z_l\right]dt+\left[\sum_{k=1}^{m} c_{jk}'y_k+\sum_{l=1}^{p} d_{jl}'z_l\right]d\zeta(t),$$

$$i=1,\ldots,m;\quad j=1,\ldots,m_1+m_2;\quad s=1,\ldots,p.$$

Можно показать, что и в этом случае, продолжая введение новых переменных, исходную систему можно привести к μ-виду, причем порядок полученной системы не будет превосходить порядок исходной. При этом уравнения и неизвестные разбиваются на группы, и в каждое уравнение каждой группы, кроме последней, могут входить лишь неизвестные из предыдущих и следующей групп и не входят неизвестные из дальнейших групп.

Выясним, как размерность системы μ-вида зависит от коэффициентов системы (2). Для этого введем обозначения

$$B=\{(b_{il})^T,\ (b_{il}')^T\},\quad D_1=\{(d_{jl})^T\},\quad D_2=\{(d_{jl}')^T\}$$
$$(i=1,\dots,m;\ j,l=1,\dots,p),$$

где T — знак транспонирования, и рассмотрим матрицы $K_1=B$, $K_2=(D_1K_1,\ D_1K_2),\dots,K_{i+1}=(D_1K_i,\ D_2K_i)$ $(i=1,\dots,p)$.

Лемма 1. Пусть $s\leqslant p$ — минимальное число, при котором имеет место условие $\operatorname{rank}K_s=\operatorname{rank}K_{s+1}$. Тогда размерность системы μ-вида для уравнений (2) равна $m+N$, где $N=\operatorname{rank}K_s$.

Доказательство леммы вытекает из приведенного способа построения системы μ-вида.

Переход от исходной системы (2) к системе μ-вида не меняет переменных $y_1,\dots,y_m$, поэтому условия асимптотической устойчивости по вероятности невозмущенного движения системы μ-вида являются достаточными условиями асимптотической y-устойчивости по вероятности невозмущенного движения системы (2).

Пример 1. Для иллюстрации сформулированного результата рассмотрим задачу об $\mathbf{y}$-устойчивости для системы, описываемой уравнениями

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)=(A^*+\eta^{\boldsymbol{\cdot}}(t))\mathbf{x},\quad \mathbf{x}=(\mathbf{y},\ \mathbf{z}),\tag{4}$$

коэффициенты которой возмущены гауссовским белым шумом $\eta^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$. Здесь A^* — постоянная матрица размера $n\times n$. Под белым шумом понимается обобщенный гауссовский случайный процесс с нулевым средним и матрицей ковариаций $M\{\eta_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)\eta_{ls}^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau)\}=k_{ij}^{ls}\delta(t-\tau)$ ($\delta(t)$ — δ-функция Дирака; $i,j,l,s=1,\dots,n$). Уравнениям (4) можно придать точный смысл и понимать их как стохастические уравнения Ито

$$d\mathbf{x}(t)=\left[\tilde{A}^*\,dt+\sum_{i=1}^{r}\sigma_i\,d\omega_i\right]\mathbf{x},\qquad \tilde{A}^*=\tilde{A}^*+{}^1/_2\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2,\tag{5}$$

где σ_i — постоянные матрицы размеров $n\times n$, $n^2\geqslant r$. (Подробнее об этом преобразовании см. в [4].)

В переменных $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned}
d\mathbf{y}(t)&=\left[A\,dt+\sum_{i=1}^{r}A_i\,d\omega_i\right]\mathbf{y}+\left[B\,dt+\sum_{i=1}^{r}B_i\,d\omega_i\right]\mathbf{z},\\
d\mathbf{z}(t)&=\left[C\,dt+\sum_{i=1}^{r}C_i\,d\omega_i\right]\mathbf{y}+\left[D\,dt+\sum_{i=1}D_i\,d\omega_i\right]\mathbf{z},
\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$A^*=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},\quad \sigma_i=\begin{pmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{pmatrix}\quad (i=1,\dots,r).$$

Введем обозначения

$$B^*=\{B^T,B_1^T,\dots,B_r^T\},\quad D_0=D$$

и рассмотрим матрицы

$$K_1=B^*,\quad K_2=(D_0^TK_1,\ D_1^TK_1,\dots,D_r^TK_1),\dots,K_{i+1}=$$
$$=(D_0^TK_i,\ D_1^TK_i,\dots,D_r^TK_i)\quad (i=1,\dots,p).$$

Пусть N — минимальное число, при котором $\operatorname{rank}K_N=\operatorname{rank}K_{N+1}$. Если $N<p$, то размерность системы μ-вида для уравнений (6) меньше размерности самой системы (6). Условия асимптотической устойчивости по вероятности невозмущенного движения системы μ-вида (см. [4]) будут достаточными условиями асимптотической y-устойчивости по вероятности невозмущенного движения $\mathbf{x}=0$ системы (4).

3. Процедура исследования нелинейных систем по линейному приближению

Пусть уравнения возмущенного движения (1) имеют вид

$$(7)\qquad dx_i(t)=\left[\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j+X_i(\mathbf{x})\right]dt+\left[\sum_{j=1}^{n}A_{ij}'x_j+X_i'(\mathbf{x})\right]d\zeta(t)$$

или, в переменных **y**, **z**,

$$(8)\qquad \begin{aligned} dy_i(t)&=\left[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}y_k+\sum_{l=1}^{p}b_{il}z_l+Y_i(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]dt+\\ &+\left[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}'y_k+\sum_{l=1}^{p}b_{il}'z_l+Y_i'(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]d\zeta(t),\\ dz_j(t)&=\left[\sum_{k=1}^{m}c_{jk}y_k+\sum_{l=1}^{p}d_{jl}z_l+Z_j(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]dt+\\ &+\left[\sum_{k=1}^{m}c_{jk}'y_k+\sum_{l=1}^{p}d_{jl}'z_l+Z_j'(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]d\zeta(t), \end{aligned}$$

где A_{ij}, A_{ij}' — постоянные; X_i, X_i' — возмущения, нелинейно зависящие от **x**.

Получим условия, при которых вопрос об **y**-устойчивости может быть решен посредством анализа линейного приближения.

1. Пусть выполняются условия

$$(9)\qquad b_{il}=b_{il}'=0 \quad (i=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,p),$$

$$(10)\qquad |Y_i(\mathbf{y},\mathbf{z})|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}|y_j| \quad (i=1,\ldots,m),$$

$$(11)\qquad |Y_i'(\mathbf{y},\mathbf{z})|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}'|y_j| \quad (i=1,\ldots,m),$$

где α_{ij}, α_{ij}' — достаточно малые положительные постоянные.

Теорема 1. Пусть движение $y=0$ системы

$$(12)\qquad dy_i(t)=\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}y_k\right)dt+\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}'y_k\right)d\zeta(t)$$

асимптотически устойчиво по вероятности. Тогда движение $\mathbf{y}=0$, $\mathbf{z}=0$ системы (8) при выполнении условия (9) является асимптотически **y**-устойчивым по вероятности, каковы бы ни были удовлетворяющие условиям (10), (11) возмущения в первой группе уравнений (8).

Доказательство вынесено в приложение.

2. Допустим теперь, что условия (10), (11) не выполняются. Предположим, что

$$Y_i(\mathbf{y},\mathbf{z})=U_2^{(i)}(\mathbf{y},\mathbf{z})+\ldots+U_r^{(i)}(\mathbf{y},\mathbf{z}) \quad (i=1,\ldots,m),$$

$$Y_i'(\mathbf{y},\mathbf{z})=\overline{U}_2^{(i)}(\mathbf{y},\mathbf{z})+\ldots+\overline{U}_s^{(i)}(\mathbf{y},\mathbf{z}) \quad (i=1,\ldots\ m),$$

где $U_l^{(i)}$, $\overline{U}_l^{(i)}$ — однородные формы переменных **y**, **z** порядка l, $l<l_1=\max(r,s)$, l_1 — конечное число.

Выделим способы построения систем μ-вида для анализа y-устойчивости движения $\mathbf{y}=0$, $\mathbf{z}=0$ системы (8).

1) *«Прямой» способ.* Для приведения системы (8) к более удобному для изучения виду введем новые переменные

$$\mu_i=\sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l+Y_i(\mathbf{y},\mathbf{z}),\quad \bar{\mu}_i=\sum_{l=1}^{p} b_{il}'z_l+Y_i'(\mathbf{y},\mathbf{z})\qquad (i=1,\ldots,m). \tag{13}$$

Используя формулу стохастического дифференцирования Ито [5], получим

$$d\mu_i(t)=\left[\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_{ik}y_k+Y_i^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{z})+Y_i^{(2)}(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]dt+$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_{ik}'y_k+Y_i'^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{z})+Y_i'^{(2)}(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]d\zeta(t)\qquad (i=1,\ldots,m).$$

Здесь

$$\bar{c}_{ik}=\sum_{l=1}^{p} b_{il}c_{lk};\quad \bar{c}_{ik}'=\sum_{l=1}^{p} b_{il}c_{lk}';\quad Y_i^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{z})=\sum_{l=1}^{p} b_{il}\sum_{j=1}^{p} d_{lj}z_j+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Y_i(\mathbf{x})}{\partial x_k}\sum_{j=1}^{n}A_{kj}x_j+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial Y_i(\mathbf{x})}{\partial x_k\,\partial x_l}\left(\sum_{s=1}^{n}A_{ks}'x_s\right)\left(\sum_{s=1}^{n}A_{ls}'x_s\right);$$

$$Y_i^{(2)}(\mathbf{y},\mathbf{z})=\sum_{l=1}^{p} b_{il}Z_l(\mathbf{x})+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Y_i(x)}{\partial x_k}X_k(\mathbf{x})+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial Y_i(\mathbf{x})}{\partial x_k\,\partial x_l}X_k'(\mathbf{x})X_l'(\mathbf{x});$$

$$Y_i'^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{z})=\sum_{l=1}^{p} b_{il}\sum_{j=1}^{p} d_{jl}'z_l+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Y_i(\mathbf{x})}{\partial x_k}\sum_{j=1}^{n}A_{kj}'x_j;$$

$$Y_i'^{(2)}(\mathbf{y},\mathbf{z})=\sum_{l=1}^{p} b_{il}Z_l(\mathbf{x})+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Y_i(\mathbf{x})}{\partial x_k}X_k'(\mathbf{x}),$$

причем выражения $Y_i^{(1)}$ и $Y_i'^{(1)}$ представляют собой совокупность форм того же порядка, что и в выражении Y_i. Аналогичные представления можно сделать и для $d\bar{\mu}_i$. Следовательно, при введении новых переменных (13) возможны два случая.

Случай 1. Система (8) приводится к виду

$$dy_i(t)=\left[\sum_{k=1}^{m}a_{ik}y_k+\mu_i\right]dt+\left[\sum_{k=1}^{m}d_{ik}'y_k+\bar{\mu}_i\right]d\zeta(t),$$

$$d\mu_j(t)=\left[\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_{jk}y_k+\sum_{l=1}^{m}e_{jl}\mu_l+Y_i^{(2)}(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]dt+$$

(14)

$$+\left[\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_{jk}'y_k+\sum_{l=1}^{m}e_{jl}'\mu_l+Y_i'^{(2)}(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]d\zeta(t),$$

$$d\bar{\mu}_j(t)=\left[\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_{jk}^{*}y_k+\sum_{l=1}^{m}e_{jl}^{*}\bar{\mu}_l+Y_i^{(3)}(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]dt+$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_{jk}'^{*}y_k+\sum_{l=1}^{m}e_{jl}'^{*}\bar{\mu}_l+Y_i'^{(3)}(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]d\zeta(t),$$

$$dz_s(t)=\left[\sum_{k=1}^{m}c_{sk}y_k+\sum_{l=1}^{p}d_{sl}z_l+Z_s(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]dt+$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{m}c_{sk}'y_k+\sum_{l=1}^{p}d_{sl}'z_l+Z_s'(\mathbf{y},\mathbf{z})\right]d\zeta(t),$$

где e_{jl}, e_{jl}^*, e_{jl}', $e_{jl}'^*$ — постоянные; $i, j=1,\dots,m$; $s=1,\dots,p$. Систему (14) будем называть системой μ-вида исходной системы (8).

Случай 2. Система (8) не приводится к μ-виду. В этом случае еще раз введем новые переменные

$$\mu_i^{(1)}=Y_i^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{z}),\qquad \bar{\mu}_i^{(1)}=Y_i'^{(1)}(\mathbf{y},\mathbf{z})\qquad (i=1,\dots,m).$$

Как и в [3], можно показать, что на конечном шаге повторения рассуждений систему (8) всегда можно привести к системе μ-вида, причем уравнения и неизвестные линейной части системы μ-вида разбиваются на группы и в каждое уравнение каждой группы, кроме трех последних, могут входить не более двух $\mu_i(t)$ и $\bar{\mu}_i(t)$ неизвестных из следующей группы и не входят неизвестные из дальнейших групп.

Пусть выполняются условия

$$|Y^{(s)}(\mathbf{y},\mathbf{z})|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\alpha_{sj}|y_j|+\sum_{j=1}^{m}\beta_{sj}|\mu_j|+\sum_{j=1}^{m}\gamma_{sj}|\bar{\mu}_j|,$$

(15)

$$|Y'^{(s)}(\mathbf{y},\mathbf{z})|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\bar{\alpha}_{sj}|y_j|+\sum_{j=1}^{m}\bar{\beta}_{sj}|\mu_j|+\sum_{j=1}^{m}\gamma_{sj}|\bar{\mu}_j|\qquad (s=2,3),$$

где α_{sj}, $\bar{\alpha}_{sj}$, β_{sj}, $\bar{\beta}_{sj}$, γ_{sj}, $\bar{\gamma}_{sj}$ — достаточно малые положительные постоянные.

Теорема 2. Пусть движение $\mathbf{y}=0$, $\mu=\bar{\mu}=0$ линейной части первых трех групп системы μ-вида (14) является асимптотически устойчивым по вероятности. Тогда, при выполнении (15), движение $\mathbf{y}=0$, $\mathbf{z}=0$ системы (8) будет асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво по вероятности.

Доказательство следует из проделанных построений и теоремы 1.

2) Способ «дробления» нелинейных членов. В некоторых случаях $\mathbf{y}$-устойчивость движения $\mathbf{y}=0$, $\mathbf{z}=0$ системы (8) может быть установлена введением переменных более простого вида, чем переменные (13). А именно, переменные μ_i можно ввести так:

$$Y_i(\mathbf{y},\mathbf{z})=\bar{Y}_i(\mathbf{y})\mu_i(\mathbf{y},\mathbf{z}),\quad Y_i'(\mathbf{y},\mathbf{z})=\bar{Y}_i'(\mathbf{y})\bar{\mu}_i(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

или

$$Y_i(\mathbf{y},\mathbf{z})=\sum_{k=1}^{N}Y_{ik}^{*}(\mathbf{y})\mu_{ik}(\mathbf{y},\mathbf{z}),\quad Y_i'(\mathbf{y},\mathbf{z})=\sum_{k=1}^{N}Y_{ik}'^{*}(\mathbf{y})\bar{\mu}_{ik}(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Пример 2. Пусть уравнения возмущенного движения (8) имеют вид

(16) $$dy(t)=(-3y+y^2z)\,dt,\qquad dz(t)=(z-2yz^2+f(y,z))\,dt+z\,d\zeta(t).$$

Рассмотрим вопрос об асимптотической y-устойчивости по вероятности движения $y=z=0$ системы (16). Введем, следуя (13), новую переменную $\mu=y^2z$. Уравнения (16) примут вид

$$(17)\qquad \begin{aligned} &dy(t)=(-3y+\mu)dt, \quad d\mu(t)=(-5\mu+y^2f(y,z))dt+\mu d\zeta(t),\\ &dz(t)=(z-2yz^2+f(y,z))dt+zd\zeta(t). \end{aligned}$$

Линейную часть первых двух уравнений (17) приведем к более удобному для изучения устойчивости виду:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &dy(t)=\eta dt, \quad d\eta(t)=(-7y-8\eta)dt+(3y+\eta)d\zeta(t),\\ &\eta=(-3y+\mu). \end{aligned}$$

Легко проверить [4], что движение $y=\eta=0$ системы (18) асимптотически устойчиво в среднеквадратичном (по вероятности). При выполнении условия

$$|y^2f(y,z)|\leqslant\gamma_1|y|+\gamma_2|\eta|,$$

где γ_1, γ_2 — достаточно малые положительные постоянные, движение $y=z=0$ системы (16), согласно теореме 2, асимптотически y-устойчиво по вероятности.

Пример 3. Пусть уравнения возмущенного движения (8) имеют вид

$$(19)\qquad \begin{aligned} &dy(t)=[-y+y(z_1z_2-2z_1z_3)]dt,\\ &dz_i(t)=[\Sigma_i+Z_i(y,z_1,z_2,z_3)]dt+z_id\zeta(t) \quad (i=1,2,3),\\ &\Sigma_1=ay-z_1, \quad \Sigma_2=by+4z_1+z_2, \quad \Sigma_3=cy+2z_1+z_2+z_3, \end{aligned}$$

a, b, c — постоянные.

Рассмотрим вопрос об асимптотической y-устойчивости по вероятности движения $y=z_1=z_2=z_3=0$ системы (19). Воспользуемся способом «дробления» нелинейных членов и введем новую переменную $\mu=(z_1z_2-2z_1z_3)$. Уравнения (19) примут вид

$$(20)\qquad \begin{aligned} &dy(t)=(-y+y\mu)dt, \quad d\mu(t)=[-2\mu+y\mu_1+Z_4(y,z_1,z_2,z_3)]dt+\\ &+2\mu d\zeta(t),\\ &d\mu_1(t)=[-\mu_1+Z_5(y,z_1,z_2,z_3)]dt+\mu_1d\zeta(t),\\ &dz_i(t)=[\Sigma_i+Z_i(y,z_1,z_2,z_3)]dt+z_id\zeta(t) \quad (i=1,2,3), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &\mu_1=(b-2c)z_1-a(z_2-2z_3); \quad Z_4=Z_1(z_1-2z_3)+z_1(Z_2-2Z_3);\\ &Z_5=(b-2c)Z_1-a(Z_2-2Z_3). \end{aligned}$$

Движение $y=\mu=\mu_1=0$ системы, соответствующей линейной части первых трех уравнений (20), асимптотически устойчиво по вероятности. Поэтому при выполнении условий

$$|Z_i(y,z_1,z_2,z_3)|\leqslant\alpha_{i1}|y|+\alpha_{i2}|\mu|+\alpha_{i3}|\mu_1| \quad (i=4,5),$$

где α_{i1}, α_{i2}, α_{i3} — достаточно малые положительные постоянные, движение $y=z_1=z_2=z_3=0$ системы (19), согласно теореме 2, асимптотически y-устойчиво по вероятности.

4. Построение управлений в задаче y-стабилизации

Рассмотрим стохастическую систему управления, возмущенное движение которой описывается дифференциальными уравнениями

$$(21)\qquad \begin{aligned} &d\mathbf{x}(t)=A(t,\mathbf{x})dt+F(t,\mathbf{x},\mathbf{u})dt+\sigma(t,\mathbf{x})d\zeta(t),\\ &\mathbf{x}=(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_p)=(\mathbf{y},\mathbf{z}) \quad (m>0,\ p>0,\ n=m+p),\\ &\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_r), \quad A(t,0)\equiv0, \quad F(t,0,0)\equiv0, \quad \sigma(t,0)\equiv0, \end{aligned}$$

где $A(t,\mathbf{x})$, $F(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$, $\sigma(t,\mathbf{x})$ — векторные функции размера $n\times 1$. Допустим, что правые части уравнений (21) определены и непрерывны в области

$$t\geqslant 0,\quad \|\mathbf{y}\|\leqslant h>0,\quad 0\leqslant\|\mathbf{z}\|<+\infty,\quad 0\leqslant\|\mathbf{u}\|<+\infty. \tag{22}$$

Управление $\mathbf{u}$ ищется в виде $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,x)$, $\mathbf{u}(t,0)\equiv 0$, при этом предполагается, что $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ определена и непрерывна в области $t\geqslant 0$, $\|\mathbf{y}\|\leqslant h$, $0\leqslant\|\mathbf{z}\|<+\infty$, а система (21) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения. В этом случае будем говорить, что $\mathbf{u}\in U_1$.

Задача 1. Требуется найти закон управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}^0(t,\mathbf{x})\in U_1$, обеспечивающий асимптотическую $\mathbf{y}$-устойчивость по вероятности движения $\mathbf{x}=0$ системы (21).

Теорема 3. Пусть существуют управление $\mathbf{u}\in U_1$ и N функций $\mu_i=\mu_i(t,\mathbf{x})$ $(i=1,\ldots,N)$, для которых уравнения (21) принимают вид

$$\begin{aligned} &d\mathbf{y}(t)=A^{(1)}(t,\mathbf{y},\boldsymbol{\mu})\,dt+\sigma^{(1)}(t,\mathbf{y},\boldsymbol{\mu})\,d\zeta(t),\\ &d\boldsymbol{\mu}(t)=A^{(2)}(t,\mathbf{y},\boldsymbol{\mu})\,dt+\sigma^{(2)}(t,\mathbf{y},\boldsymbol{\mu})\,d\zeta(t),\\ &A^{(i)}(t,0,0)\equiv 0,\quad \sigma^{(i)}(t,0,0)\equiv 0\quad (i=1,2), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$A^{(1)}(t,\mathbf{y},\boldsymbol{\mu})=(A_1+F_1,\ldots,A_m+F_m)^T;\quad \sigma^{(1)}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)^T,$$

$$A^{(2)}(t,\mathbf{y},\boldsymbol{\mu})=\left\{\sum_{i=1}\frac{\partial\mu_1}{\partial x_i}(A_i+F_i)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\mu_1}{\partial x_i\partial x_j}\sigma_i\sigma_j,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mu_N}{\partial x_i}(A_i+F_i)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\mu_N}{\partial x_i\partial x_j}\sigma_i\sigma_j\right\}^T;\quad (A_1,\ldots,A_n)^T=$$

$$=A(t,\mathbf{x}),\quad (F_1,\ldots,F_n)^T=F(t,\bar{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x}),\mathbf{x}),\quad (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)^T=\sigma(t,\mathbf{x}).$$

Пусть в области $t\geqslant 0$, $\|\mathbf{y}\|\leqslant h>0$, $\|\boldsymbol{\mu}\|\leqslant h>0$ правые части уравнений (23) удовлетворяют условиям существования и единственности решения. Если движение $\mathbf{y}=0$, $\boldsymbol{\mu}=0$ системы (23) асимптотически устойчиво по вероятности, то задача 1 для системы (21) разрешима.

Замечание. Теорема 3 позволяет свести задачу стабилизации движения относительно части переменных к задаче устойчивости движения по всем переменным.

Проведем обобщение задачи 1 таким образом, чтобы ее решение приводило к определению управлений, являющихся неаналитическими функциями фазовых переменных. Пусть выбран некоторый класс $U_2=\{\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\}$ управлений $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$, являющихся, вообще говоря, неаналитическими функциями фазовых переменных в области $t\geqslant 0$, $\|\mathbf{y}\|\leqslant h>0$ при всех $z_1,\ldots,z_p$. Считаем, что при любом $\mathbf{u}\in U_2$ у системы (21) существует решение $\mathbf{x}=0$ и, кроме того, вдоль решения $\mathbf{x}=0$ выполняется тождество $\mathbf{u}(t,0)\equiv 0$. Предположим, что при любом $\mathbf{u}\in U_2$ правые части системы (21) таковы, что при всех $t\geqslant 0$ определены компоненты $y_1[t],\ldots,y_m[t]$ любого решения $\mathbf{x}[t]=\{\mathbf{y}[t],\mathbf{z}[t]\}$ этой системы уравнений, начинающегося в некоторой достаточно малой окрестности начала координат. При этом нет информации об остальных переменных $z_1[t],\ldots,z_p[t]$.

Задача. Требуется найти закон управления $\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x})\in U_2$, при котором для любых ε, $t_0\geqslant 0$ найдется $\Delta(\varepsilon,t_0)>0$, такое, что из $\|\mathbf{x}_0\|<\Delta(\varepsilon,t_0)$ следует $P\{\sup\|\mathbf{y}[t;\,t_0,\mathbf{x}_0]\|>\varepsilon\}<\gamma$, $t\geqslant 0$, и, кроме того, $\lim P\{\lim\|\mathbf{y}[t;\,t_0,\mathbf{x}_0]\|=0\}=1$ при $t\to\infty$ (P — вероятностная мера).

Рассмотрим случай $m=r=1$ и, кроме того, предположим, что управление u входит лишь в какое-то одно из уравнений системы (21), например в уравнение

$$dx_s(t)=A_s(t,\mathbf{x})\,dt+F_s(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\,dt+\sigma_s(t,\mathbf{x})\,d\zeta(t),\quad 1<s\leqslant n,$$

а функция $A_1(t, \mathbf{x})$ содержит переменную x_s. Пусть выполняются условия

$$A_1(t, \mathbf{x}) = A_1(x), \quad F_1(t, \mathbf{x}) \equiv 0, \quad \sigma_1(t, \mathbf{x}) \equiv 0, \tag{24}$$

$$\sigma_i(t, \mathbf{x}) = \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \alpha_i = \text{const} \quad (i = 2, \ldots, n), \tag{25}$$

$$F_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = F_s^*(\mathbf{x}) + \beta u, \quad \beta = \text{const}. \tag{26}$$

Теорема 4. Если для системы (21) выполняются условия (24)–(26), то задача 2 для этой системы разрешима. При этом закон управления имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) = & \left[\gamma_1 x_1 + \gamma_2 A_1(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} A_i(t, \mathbf{x}) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} \times \right. \\ & \times F_i(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i(t, \mathbf{x}) \sigma_j(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_s} \times \\ & \left. \times F_s^*(\mathbf{x}) \right] \Big/ \beta \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_s} = \left[\gamma_1 x_1 + (\gamma_2 - \Gamma) A_1(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} A_i(t, \mathbf{x}) - \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} F_i(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_s} F_s^*(\mathbf{x}) \right] \Big/ \beta \frac{\partial A_1(\mathbf{x})}{\partial x_s}, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\Gamma = {}^1/_2 \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j, \quad \Gamma - \gamma_2 > 0, \quad \gamma_1 < 0,$$

$$\gamma_1 (\Gamma - \gamma_2) < \gamma_1 \Gamma^2.$$

Доказательство вынесено в приложение.

Пример 4. Рассмотрим задачу о гашении вращений твердого тела, закрепленного в одной точке и подверженного воздействию диссипативных, ускоряющей и случайных сил. Пусть возмущенное движение описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dy(t) &= \left(\alpha y + \frac{B-C}{A} z_1 z_2 \right) dt, \\ dz_1(t) &= \left(\beta z_1 + \frac{C-A}{B} y z_2 + \frac{1}{B} u_1 \right) dt + \frac{Z_1}{B} d\zeta(t), \\ dz_2(t) &= \left(\gamma z_2 + \frac{A-B}{C} y z_1 + \frac{1}{C} u_2 \right) dt + \frac{Z_2}{C} d\zeta(t), \end{aligned} \tag{28}$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела, $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\gamma > 0$. Рассмотрим для системы (28) задачу 1. Выбирая

$$u_1 = (A - C) y z_2, \quad u_2 = (B - A) y z_1, \quad \mu = z_1 z_2, \tag{29}$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} dy(t) &= \left(\alpha y + \frac{B-C}{A} \mu \right) dt, \\ d\mu(t) &= \left[\left(\beta + \gamma + \frac{1}{BC} \right) \mu \right] dt + \frac{B+C}{BC} \mu d\zeta(t). \end{aligned} \tag{30}$$

Уравнения (30) приведем к более удобному виду, введя новую переменную $w = \alpha y + (B - C) \mu / A$. В переменных y, w уравнения (30) примут вид

$$dy(t) = w dt, \tag{31}$$

$$dw(t)=\left[\frac{A}{B-C}\left(\beta+\gamma-\frac{1}{BC}\right)(w-\alpha y)\right]dt+\frac{A(B+C)}{BC(B-C)}\times$$
$$\times(w-\alpha y)\,d\zeta(t).$$

При выполнении условий [4]

$$b_1>0,\quad b_2>0,\quad 2b_1b_2>a_{11}b_2+a_{22}, \tag{32}$$

где

$$b_1=-\frac{A}{B-C}\left(\beta+\gamma-\frac{1}{BC}\right);\quad b_2=-\alpha b_1;$$
$$a_{11}=\frac{A^2(B+C)^2}{(BC)^2(B-C)^2};\quad a_{22}=\alpha^2a_{11},$$

движение $y=w=0$ системы (31) асимптотически устойчиво по вероятности. Согласно теореме 3 закон управления (29) является решением при выполнении условий (32) задачи 1 для системы (28).

Пример 5. Пусть возмущенное движение (28) твердого тела имеет вид

$$\begin{aligned} dy(t)&=\left(\frac{B-C}{A}z_1z_2\right)dt,\\ dz_1(t)&=\left(\frac{C-A}{B}yz_2+\frac{1}{B}u\right)dt+\frac{z_1}{B}d\zeta(t),\\ dz_2(t)&=\left(\frac{A-B}{C}yz_1\right)dt+\frac{z_2}{C}d\zeta(t).\end{aligned} \tag{33}$$

Рассмотрим для системы (33) задачу 2. Поскольку условия (24)—(26) выполняются, то закон управления (27) в данном случае имеет вид

$$u(x)=\left[\gamma_1y+(\gamma_2-\Gamma)\left(\frac{B-C}{A}z_1z_2\right)-\frac{(B-C)(C-A)}{AB}yz_2^2-\right.$$
$$\left.-\frac{(B-C)(A-B)}{AC}yz_1^2\right]\Big/\beta\left(\frac{B-C}{AB}\right)z_2, \tag{34}$$

где $\Gamma=1/BC$. Первые два уравнения замкнутой системы (33), (34) имеют вид

$$dy(t)=\mu dt,\quad d\mu(t)=\left[\gamma_1y+\left(\gamma_2-\frac{1}{BC}\right)\mu\right]dt+\frac{1}{BC}\mu d\zeta(t). \tag{35}$$

При выполнении условий

$$\frac{1}{BC}-\gamma_2>0,\quad \gamma_1<0,\quad \gamma_1\left(\frac{1}{BC}-\gamma_2\right)<\gamma_1/(BC)^2 \tag{36}$$

движение $y=\mu=0$ системы (35) асимптотически устойчиво по вероятности. Следовательно, закон управления (34) является решением при выполнении условий (36), задачи 2 для системы (33).

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. При условиях теоремы для системы (12) существует функция $V(\mathbf{y})$, такая, что при некоторых $l>0$, $k_i>0$ справедливы оценки [4]

$$\begin{gathered} k_1\|\mathbf{y}\|^l\leqslant V(y)\leqslant k_2\|y\|^l,\quad L_0V(\mathbf{y})\leqslant-k_3\|\mathbf{y}\|^l,\\ \left|\frac{\partial V}{\partial y_i}\right|\leqslant k_4\|\mathbf{y}\|^{l-1},\quad \left|\frac{\partial V}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leqslant k_4\|\mathbf{y}\|^{l-2},\end{gathered} \tag{П.1}$$

где L_0 – дифференциальный производящий оператор системы (12). Нетрудно проверить [4], что положительные постоянные в неравенствах (П.1) могут быть выбраны так, что имеют место оценки $k_1\|\mathbf{y}\|^l\leqslant V(\mathbf{y})\leqslant k_2\|\mathbf{y}\|^l$, $L_1V(\mathbf{y})\leqslant-k_3\|\mathbf{v}\|^l$, где L_1 – дифференциальный производящий оператор системы (10). Эти оценки согласно [2] обеспечивают асимптотическую y-устойчивость по вероятности движения $y=9$, $z=0$ системы (8). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Нетрудно проверить, что первые два уравнения замкнутой системы (21), (27) при выполнении условий (24)–(26) имеют следующий вид:

$$dy(t)=\mu dt,$$

$$d\mu(t)=[\gamma_1 y+(\gamma_2-\Gamma)\mu]dt+\Gamma\mu d\zeta(t),\quad \mu=A_1(x),\quad y=x_1. \tag{П.2}$$

При выполнении условий

$$\Gamma-\gamma_2>0,\quad \gamma_1<0,\quad \gamma_1(\Gamma-\gamma_2)<\gamma_1\Gamma^2$$

движение $y=\mu=0$ системы (П.2) асимптотически устойчиво по вероятности. Ввиду условия $A_1(0)\equiv 0$ решение $y\equiv\mu\equiv 0$ уравнений (П.2) существует при $x=0$. Но решение $y\equiv\mu\equiv 0$ уравнений (П.2) является одновременно решением уравнений (21), (27), поэтому у уравнений (21), (27) существует решение $x=0$.

Кроме того, в силу условия (26), вдоль решения $x=0$ выполняется тождество $u(t, x)\equiv 0$. Следовательно, закон управления (27) является решением задачи 2 для системы (21). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.– Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., астрон., физ., хим., 1957, № 4, с. 9–16.
2. *Шаров В. Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных.– Автоматика и телемеханика, 1978, № 11, с. 63–71.
3. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем.– Прикл. матем. и механ., 1979, т. 43, вып. 3, с. 441–450.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.

Поступила в редакцию
18.XI.1981

ON STABILITY OF MOTION WITH RESPECT IN PART OF VARIABLES FOR STOCHASTIC SYSTEMS

VOROTNIKOV V. I.

For stochastic control systems which are described by Ito's differential equations the problem of stability of motion with respect to part of variables is considered. In the case of linear stationary systems an algorithm for design of an auxiliary linear stationary system is described. The conditions for stability of the system with respect to all the variables are sufficient stability conditions with respect to part of variables of the initial systems. Classes of nonlinear systems are identified for which stability or otherwise of motion with respect to part of the variables can be established through analysis of the linear approximation. The results lead to a rule for design of a control signal in stabilization of motion with respect to part of the variables. Examples are given.