

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. G. Turaev, Elementary ideals of links and manifolds:
symmetry and asymmetry,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 5, 223–232

<https://www.mathnet.ru/eng/aa49>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read
and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

May 17, 2025, 09:43:37



В. Г. Тураев

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИДЕАЛЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ И МНОГООБРАЗИЙ: СИММЕТРИЧНОСТЬ И АСИММЕТРИЧНОСТЬ

В статье вводятся элементарные идеалы многомерных зацеплений, обобщающие элементарные идеалы Фокса зацеплений в трехмерной сфере. Устанавливается теорема симметричности для элементарных идеалов многомерных зацеплений. Строятся зацепления в трехмерной сфере, у которых элементарные идеалы Фокса не симметричны.

§ 1. Введение

1.1. Изучение алгебраических свойств элементарных идеалов и многочленов Александера узлов и зацеплений составляет один из классических разделов теории узлов. Первый результат, касающийся симметричности этих инвариантов, был получен Зайфертом [1] в 1934 г. Именно Зайферт доказал, что если $\Delta(t)$ — первый многочлен Александера узла в S^3 , то $\Delta(t^{-1}) = t^m \Delta(t)$ с целым m . В 1953 г. Торрес [2] получил аналогичную формулу для первого многочлена Александера произвольного зацепления в S^3 . Эти результаты Зайферта и Торреса были существенно усилены в 1954 г. Торресом и Фоксом [3]. Они доказали, что для произвольного зацепления $l \subset S^3$ все многочлены Александера $\Delta_1(l), \Delta_2(l), \dots$ симметричны: если n — число компонент зацепления l и если Δ — элемент кольца $\Lambda_n = \mathbb{Z}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$, представляющий $\Delta_j(l)$, то $\bar{\Delta} = \pm t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n} \Delta$ с целыми m_1, \dots, m_n . Здесь черта обозначает кольцевую инволюцию $\Lambda_n \rightarrow \Lambda_n$, переводящую t_i в t_i^{-1} при всех $i = 1, \dots, n$. Следует сказать, что эта теорема о симметричности многочленов Александера в [3] явно не формулируется; однако она прямо следует из основного результата статьи [3].

В той же статье [3] Торрес и Фокс доказали, что для произвольного узла $k \subset S^3$ все элементарные идеалы $E_1(k), E_2(k), \dots$ симметричны: $\bar{E}_j(k) = E_j(k)$

Ключевые слова: зацепление, элементарные идеалы, двойственность Пуанкаре.

при всех $j \geq 1$. Торрес и Фокс [3] поставили вопрос о симметричности элементарных идеалов зацеплений $c \geq 2$ компонентами. До настоящего времени этот вопрос оставался открытым. Замечу, что первый элементарный идеал $E_1(l)$ всегда симметричен, это следует из того хорошо известного факта, что для любого зацепления l с $n \geq 2$ компонентами $E_1(l)$ — главный идеал кольца Λ_n с образующей $\Delta_1(l)$.

В настоящей работе дается отрицательный ответ на вопрос Торреса и Фокса. Именно здесь строится двухкомпонентное зацепление $l \subset S^3$ с $E_2(l) \neq E_2(l)$. Ясно, что если l' — дизъюнктное объединение этого зацепления и тривиального $(n-2)$ -компонентного зацепления с $n \geq 2$, то $E_n(l') \neq E_2(l) \cdot \Lambda_n$ и потому $E_n(l') \neq E_n(l')$.

Конструкция, с помощью которой строится зацепление l , аналогична конструкции Дж. Левина [4], использовавшейся им для реализации многочленов в качестве (первых) многочленов Александра зацеплений в S^3 . Конструкция зацепления l была анонсирована автором в [5].

1.2. В 1935 г. Райдемайстер [6] определил для каждого замкнутого трехмерного многообразия M последовательность идеалов $\{E_j(M)\}_{j \geq 1}$ кольца $Z[H_1(M)]$. Они определяются следующим образом: многообразие M триангулируется; рассматривается $Z[H_1(M)]$ — скрученная матрица инцидентности двумерных и одномерных симплексов триангуляции; идеалы $\{E_j(M)\}_j$ — элементарные идеалы этой матрицы. Легко проверить (ср. ниже п. 2.4), что при всех $j \geq 1$ идеал $E_j(M)$ совпадает с j -м элементарным идеалом группы $\pi_1(M)$ в смысле Фокса (см. [7]). Райдемайстер [6] доказал, что если M ориентируемо, то при всех $j \geq 1$ идеал $E_j(M)$ симметричен, т. е. переводится в себя инволюцией $a \mapsto \bar{a}$ кольца $Z[H_1(M)]$, определяемой правилом $\bar{h} = h^{-1}$ при $h \in H_1(M)$.

Работа Райдемайстера [6], по-видимому, не была известна Торресу и Фоксу. Во всяком случае, она отсутствует в списках литературы в [2, 3, 7].

Подход Райдемайстера к определению элементарных идеалов трехмерных многообразий распространяется в статье на многомерную ситуацию. Это приводит к „элементарным“ идеалам, определяемым для каждого конечного клеточного пространства. В случае компактных PL-многообразий эти идеалы удовлетворяют соотношениям симметрии, являющимся следствиями двойственности Пуанкаре. Применяя эти соотношения к элементарным идеалам внешностей зацеплений в S^n с нечетным $n \geq 5$, мы получаем соотношения симметрии, обобщающие упомянутые выше соотношения Торреса—Фокса для элементарных идеалов узлов в S^3 .

1.3. План статьи. В §2 вводятся элементарные идеалы клеточных пространств и PL-многообразий. В §3 обсуждаются соотношения симметрии для элементарных идеалов многообразий и зацеплений. В §4 строится зацепление $l \subset S^3$ с $E_2(l) \neq E_2(l)$. В §5 собраны замечания к материалу §2–4.

1.4. Автор благодарит проф. Л. Тральди за стимулирующую переписку.

§ 2. Элементарные идеалы клеточных пространств

2.1. Напомню определение элементарных идеалов матриц. Пусть A — матрица над коммутативным кольцом R с t строками и n столбцами. j -й элементарный идеал $E_j(A)$ матрицы A — это идеал кольца R , порожденный минорами матрицы A порядка $n-j$. Подразумевается, что если $n-j > t$ или $n-j > n$, то $E_j(A) = 0$; если $n-j \leq 0$, то $E_j(A) = R$.

2.2. Пусть X – конечное клеточное пространство (с фиксированной клеточной структурой). Положим $R = \mathbb{Z}[H_1(X)]$, где $H_1(X) = H_1(X; \mathbb{Z})$. Для любых целых i, j с $i \geq 0$ в этом пункте определяется идеал $E_j^i(X)$ кольца R , называемый j -м i -мерным элементарным идеалом пространства X .

Пусть $\tilde{X} \rightarrow X$ – максимальное абелево накрытие. Клеточная структура в X обычным образом индуцирует эквивариантную клеточную структуру в \tilde{X} . Выберем над каждой клеткой пространства X клетку пространства \tilde{X} и снабдим эти клетки в \tilde{X} какими-нибудь ориентациями. Обозначим через $C_*(\tilde{X})$ целочисленный клеточный цепной комплекс пространства X . Естественное действие группы $H_1(X)$ в \tilde{X} наделяет $C_*(\tilde{X})$ структурой комплекса над R . При каждом $i \geq 0$ R -модуль $C_i(\tilde{X})$ свободен и изоморфен R^{α_i} , где α_i – число i -мерных клеток пространства X . Более того, выбранные выше ориентированные клетки в \tilde{X} очевидным образом определяют естественные базисы R -модулей $C_0(\tilde{X}), C_1(\tilde{X}), \dots$. Обозначим через $A_i(X)$ матрицу граничного гомоморфизма $C_{i+1}(\tilde{X}) \rightarrow C_i(\tilde{X})$ относительно указанных базисов. Матрица $A_i(\tilde{X})$ имеет α_{i+1} строк и α_i столбцов. Положим

$$E_j^i(X) = E_{\beta_{i-1}}(A_i(X)), \text{ где } \beta_{i-1} = j-1 + \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^{r+i-1} \alpha_r.$$

Таким образом, $E_j^i(X)$ – идеал кольца R , порожденный минорами матрицы $A_i(X)$ порядка $\alpha_i - \alpha_{i-1} + \dots + (-1)^i \alpha_0 - j + 1$. Очевидно, что идеал $E_j^i(X)$ не зависит от выбора естественных базисов в $C_{i+1}(\tilde{X})$ и $C_i(\tilde{X})$. Также очевидно, что идеал $E_j^i(X)$ полностью определяется $(i+1)$ -мерным остовом пространства X . Как показывает следующая теорема, идеал E_j^i гомотопически инвариантен.

2.3. Теорема. Пусть X и X' – связанные конечные клеточные пространства, и пусть $f: X \rightarrow X'$ – гомотопическая эквивалентность. Тогда для любых i, j с $i \geq 0$

$$f_*(E_j^i(X)) = E_j^i(X'). \quad (2.3.1)$$

Доказательство. Напомню, что клеточное вложение $g: Y \rightarrow Y'$ называется элементарным клеточным расширением, если: 1) $Y' = g(Y) \cup D$, где D – замкнутый шар, пересекающийся с $g(Y)$ по шару $B \subset \partial D$ с $\dim B = \dim D - 1$; 2) клеточная структура пространства Y' получается из клеточной структуры пространства $g(Y)$ добавлением двух клеток $\text{Int } D$ и $\partial D \setminus B$. Отображение $Y' \rightarrow Y$, гомотопически обратное элементарному клеточному расширению, называется элементарным клеточным стягиванием. Если $f: X \rightarrow X'$ – элементарное клеточное расширение или стягивание, то равенство (2.3.1) прямо следует из сопоставления матриц $A_i(X)$ и $A_i(X')$. Поскольку каждая простая гомотопическая эквивалентность гомотопна композиции некоторого числа элементарных клеточных расширений и элементарных клеточных стягиваний, равенство (2.3.1) справедливо и в случае, когда f – простая гомотопическая эквивалентность. Общий случай сводится к этому следующим приемом. Пусть A – обратимая квадратная матрица порядка n над кольцом $\mathbb{Z}[\pi_1(X')]$, представляющая кручение Уайтхеда $\tau(f)$ гомотопической эквивалентности f . Выберем четное число $N > \max(i, \dim X')$. Рассмотрим букет

$X' \vee S^N \vee S^N \vee \dots \vee S^N$ (n сфер S^N) и приклеим к нему n экземпляров $(N+1)$ -мерного шара по краям этих шаров так, чтобы у получающегося клеточного пространства, скажем, X'' матрица $A_N(X'')$ равнялась A . Поскольку A — обратимая матрица, включение $in: X' \rightarrow X''$ является гомотопической эквивалентностью, кручение Уайтхеда которой равно $\tau(f)^{-1}$. Очевидно, что $in_*(E_j^i(X')) = E_j^i(X'')$ при $i < N$. С другой стороны, $\tau(in \circ f) = 1$ и, значит, по доказанному выше $E_j^i(X'') = (in \circ f)_*(E_j^i(X))$. Отсюда следует равенство (2.3.1).

2.4. Следствие. Пусть X — связное конечное клеточное пространство. Если $j < 0$, то $E_j^1(X) = 0$. Если $j \geq 0$, то идеал $E_j^1(X)$ равен j -му элементарному идеалу группы $\pi_1(X)$ в смысле Фокса.

Доказательство. В силу теоремы 2.3 идеалы $E_j^i(X)$ не меняются при стягивании одномерной клетки пространства X с разными концами в точку. Поэтому можно считать, что X имеет только одну нульмерную клетку. Клеточная структура пространства X определяет задание группы $\pi_1(X)$ образующими и соотношениями. Матрица $A_1(X)$ есть не что иное, как матрица Александра этого задания. Так как $a_0(X) = 1$,

$$E_j^1(X) = E_{a_0(X)+j-1}(A_1(X)) = E_j(A_1(X)).$$

Если $j < 0$, то $E_j(A_1(X)) = 0$. Если $j \geq 0$, то $E_j(A_1(X))$ — это j -й элементарный идеал группы $\pi_1(X)$ в смысле Фокса.

2.5. Из теоремы 2.3 следует также, что элементарные идеалы сохраняются при подразделении клеточной структуры. Этот факт позволяет очевидным образом определить элементарные идеалы компактного PL-многообразия.

§ 3. Теоремы симметричности для элементарных идеалов

3.1. Теорема. Пусть M — замкнутое m -мерное PL-многообразие и пусть χ — его эйлерова характеристика. Пусть $a \mapsto \bar{a}$ — инволюция кольца $Z[H_1(M)]$, переводящая $h \in H_1(M)$ в $w_1(h) \cdot h^{-1}$, где $w_1(h) = -1$, если h — класс дезориентирующих петель, и $w_1(h) = 1$ в противном случае. Тогда для любых i, j с $0 \leq i \leq m-1$

$$\overline{E_j^i(M)} = E_{j-(-1)^i \chi}^{m-i-1}(M).$$

В частности, если m нечетно, $m = 2r + 1$, то $\chi = 0$ и $\overline{E_j^r(M)} = E_j^r(M)$ для любого j .

Доказательство. Пусть X — кусочно-линейная триангуляция многообразия M . Хорошо известно, что если σ — симплекс триангуляции X , то объединение всех симплексов первого барицентрического подразделения триангуляции X , имеющих в качестве вершины барицентр симплекса σ и не имеющих других общих точек с σ , является клеткой размерности $m - \dim \sigma$. Такие клетки, отвечающие всевозможным симплексам σ триангуляции X , составляют клеточное разбиение многообразия M , «двойственное» триангуляции X . Обозначим это разбиение через X^* . Известно (см., например, [8]), что при надлежащем выборе естественных базисов в модулях клеточных цепей матрицы $A_i(X^*)$ и $A_{m-i-1}(X)$

граничных гомоморфизмов соответственно $C_{i+1}(\tilde{X}^*) \rightarrow C_i(\tilde{X}^*)$ и $C_{m-i}(\tilde{X}) \rightarrow C_{m-i-1}(\tilde{X})$ связаны равенством $A_i(X^*) = \pm \overline{A_{m-i-1}(X)}^T$, где T — транспонирование, а черта обозначает поэлементное применение инволюции $a \mapsto \bar{a} : Z[H_1(X)] \rightarrow Z[H_1(X)]$. Пусть α_i — число i -мерных симплексов триангуляции X . Пусть γ_i — число i -мерных клеток разбиения X^* . Очевидно, что $\gamma_i = \alpha_{m-i}$ при всех i . Согласно определениям, идеал $E_j^i(M)$ порождается минорами матрицы $A_i(X)$ порядка $\alpha_i - \alpha_{i-1} + \dots + (-1)^i \alpha_0 - j + 1$. Идеал $E_{j-(-1)^i \chi}^{m-i-1}(M)$ порождается минорами матрицы $A_{m-i-1}(X^*)$ того же порядка, так как

$$\begin{aligned} & \gamma_{m-i-1} - \gamma_{m-i-2} + \dots + (-1)^{m-i-1} \gamma_0 - j + (-1)^i \chi + 1 = \\ & = \alpha_{i+1} - \alpha_{i+2} + \dots + (-1)^{m-i-1} \alpha_m - j + 1 + [(-1)^i \alpha_0 - (-1)^i \alpha_1 + \dots + \\ & \quad + (-1)^{m+i} \alpha_m] = \alpha_i - \alpha_{i-1} + \dots + (-1)^i \alpha_0 - j + 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

3.2. Пусть l — зацепление коразмерности 2 в сфере S^{2r+1} со сферическими компонентами l_1, \dots, l_n . Пусть V — внешность зацепления l . При целом j идеал $E_j^r(V)$ кольца $Z[H_1(V)]$ называется j -м элементарным идеалом зацепления l и обозначается через $E_j(l)$. Кольцо $Z[H_1(V)]$ снабжено инволюцией $a \mapsto \bar{a}$, переводящей $h \in H_1(V)$ в h^{-1} . При естественном отождествлении колец $Z[H_1(V)]$ и $\Lambda_n = Z[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$ эта инволюция отождествляется с инволюцией в Λ_n , рассматривавшейся во Введении.

3.3. Теорема. Если $r \geq 2$, то при всех j

$$\overline{E_j(l)} = E_j(l). \quad (3.3.1)$$

Доказательство. Каждая компонента края ∂V гомеоморфна $S^1 \times S^{m-2}$, где $m = \dim V = 2r + 1$. Пусть M — замкнутое многообразие, получающееся из V заклеиванием всех компонент края произведениями $S^1 \times D^{m-1}$, где D^{m-1} — шар размерности $m-1$. Очевидно, что клеточное разбиение многообразия M можно получить из некоторого клеточного разбиения многообразия V добавлением $(m-1)$ -мерных клеток вида $\{pt\} \times \text{Int } D^{m-1}$ и m -мерных клеток вида $(S^1 \setminus \{pt\}) \times \text{Int } D^{m-1}$. Поэтому $E_j^i(M) = E_j^i(V)$ при $i \leq m-3$. В частности, $E_j(l) = E_j^r(M)$. Равенство (3.3.1) следует из теоремы 3.1.

3.4. Теорема. Если l — узел или, более общо, ограничивающее зацепление в S^3 , то $\overline{E_j(l)} = E_j(l)$ при всех j .

Для доказательства этой теоремы понадобятся следующие предварительные сведения. Напомню, что для конечно-представимого модуля F над коммутативным кольцом с единицей R и для целого j можно определить $\langle j$ -й элементарный идеал $E_j(F)$ модуля $F \rangle$. Именно если A — конечная матрица соотношений модуля F , то идеал $E_j(A)$ кольца R зависит лишь от F и j ; этот идеал и есть $E_j(F)$.

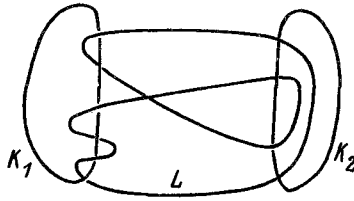


Рис. 1

3.5. Лемма. Пусть X — связное конечное клеточное пространство с отмеченной точкой x . Пусть F — это $\mathbb{Z}[H_1(X)]$ -модуль $H_1(\tilde{X}, p^{-1}(x))$, где $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — максимальное абелево накрытие. Тогда $E_j(F) = E_j^1(X)$ при всех j .

Доказательство. Как и при доказательстве следствия 2.4, можно считать, что x — единственная нульмерная клетка пространства X . Тогда утверждение леммы следует из того, что $A_1(X)$ — матрица соотношений модуля F .

3.6. Доказательство теоремы 3.4. Пусть, как и выше, V — внешность зацепления l , и пусть M — результат перестройки сферы S^3 вдоль зацепления l , компоненты которого снабжены нулевым оснащением. Поскольку l — ограничивающее зацепление, гомоморфизм включения $H_1(V) \rightarrow H_1(M)$ является изоморфизмом. Пусть $p: \tilde{M} \rightarrow M$ — максимальное абелево накрытие с группой скольжений $H_1(M) = H_1(V)$. Положим $\tilde{V} = p^{-1}(V)$. Заметим, что параллели компонент зацепления l поднимаются до петель в \tilde{V} и что эти петли ограничивают в \tilde{V} поднятия поверхностей Зайферта компонент. Отсюда следует, что гомоморфизм включения $H_1(\tilde{V}) \rightarrow H_1(\tilde{M})$ является изоморфизмом. Если $x \in V$, то гомоморфизм включения $H_1(\tilde{V}, p^{-1}(x)) \rightarrow H_1(\tilde{M}, p^{-1}(x))$ также является изоморфизмом. В силу леммы отсюда следует, что $E_j(l) = E_j^1(M) = E_j^1(M)$. Поэтому в силу теоремы 3.1 $E_j(l) = E_j(l)$.

§ 4. Зацепление $l \subset S^3$ с $\overline{E_2} \neq E_2$

4.1. Пусть $K = K_1 \cup K_2 \cup L$ — изображенное на рис. 1 ориентированное трехкомпонентное зацепление в S^3 . Поскольку средняя компонента L зацепления K незаузлена, результат перестройки S^3 вдоль L с оснащением $+1$ снова является сферой. Левая и правая компоненты K_1 и K_2 зацепления K после перестройки составят двухкомпонентное зацепление l в S^3 . Оказывается, что идеал $E_2(l)$ порождается элементами $t_1 - 1, t_2 - 3, 7$ кольца $\mathbb{Z}[t_1, t_1^{-1}, t_2, t_2^{-1}]$, где t_1, t_2 — гомологические классы меридианов соответственно компонент K_1, K_2 . Этот идеал несимметричен. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что образ идеала $E_2(l)$ при гомоморфизме

$$t_1 \mapsto 1, t_2 \mapsto t: \mathbb{Z}[t_1, t_1^{-1}, t_2, t_2^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \quad (4.1.1)$$

несимметричен. Обозначим этот образ через E . В силу сказанного выше $E = (t - 3, 7)$. Если $\overline{t - 3} = t^{-1} - 3 \in E$, то для достаточно большого натурального N найдутся такие целочисленные многочлены $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$, что

$$t^N(1-3t) = 7f(t) + (t-3)g(t).$$

Подставив сюда $t = 3$, получим, что $3^N \cdot 8$ делится на 7; противоречие. Значит, $E \neq E$ и тем более $E_2(l) \neq E_2(l)$.

Вычисление идеала $E_2(l)$, проделанное автором с помощью матриц Александра, весьма громоздко и утомительно. Для доказательства несимметричности идеала $E_2(l)$ достаточно доказать, что образ E этого идеала при гомоморфизме (4.1.1) равен $(t-3, 7)$. Это мы сейчас и сделаем.

4.2. Положим $\pi = \pi_1(S^3 \setminus l)$. Задание группы π образующими и соотношениями можно получить из задания Виртингера группы $\pi_1(S^3 \setminus K)$ посредством добавления одного соотношения, убивающего гомотопический класс параллели узла L , расположенной в крае регулярной окрестности узла L и однократно зацепленной с L . Коэффициент зацепления этой параллели с K_1 равен 3, с K_2 — нулю. Поэтому меридиан компоненты L представляет в $H_1(\pi)$ класс t_1^{-3} . Рассмотрим какую-нибудь точку самопересечения диаграммы на рис. 1, являющуюся точкой пересечения проекций компонент K_1 и L или точкой самопересечения проекций узла L . Как обычно, такой точке отвечает соотношение $x_i x_{j+1} x_i^{-1} x_j^{-1} = 1$ в копредставлении Виртингера группы $\pi_1(S^3 \setminus K)$. Этому соотношению отвечает следующая строка матрицы Александра (необозначенные элементы строки равны нулю; квадратные скобки обозначают взятие гомологического класса):

$$\dots, i, \dots, j, j+1, \dots$$

$$(\dots, 1 - [x_{j+1}], \dots, -1, [x_j], \dots).$$

Поскольку гомологические классы образующих x_i, x_{j+1} в $H_1(\pi)$ равны или $t_1^{\pm 1}$, или $t_1^{\pm 3}$, соответствующая строка «приведенной» матрицы Александра, получающейся из обычной матрицы Александра подстановкой $t_1 = 1, t_2 = t$, равна $(0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0)$. Если мы добавим к рассматриваемому заданию группы π новое соотношение $x_{j+1} x_j^{-1} = 1$, то этому соотношению будет отвечать в приведенной матрице Александра точно такая же строка. Значит, при добавлении такого соотношения идеал E не меняется. Поэтому можно сразу считать, что $x_{j+1} = x_j$ в точках пересечения проекций K_1 с L и L с L (см. рис. 2, где вместо x_1, x_2, \dots используются символы a, b, c, d, e). В этих образующих соотношения Виртингера имеют вид $aba^{-1}b^{-1} = 1, aca^{-1}c^{-1} = 1, bcb^{-1}c^{-1} = 1, ae^{-1}a^{-1}d = 1, be^{-1}a^{-1}e = 1, ea^{-1}d^{-1}a = 1, bd^{-1}a^{-1}d = 1$. Упомянутое выше дополнительное соотношение имеет вид $d^{-1}ebec^2 = 1$. Таким образом, идеал E — это второй элементарный идеал матрицы, получающейся подстановкой $[a] = [b] = [c] = 1, [d] = [e] = t$ из матрицы Александра следующего задания $(a, b, c, d, e : aba^{-1}b^{-1}, aca^{-1}c^{-1}, bcb^{-1}c^{-1}, ae^{-1}a^{-1}d, be^{-1}a^{-1}e, ea^{-1}d^{-1}a, bd^{-1}a^{-1}d, d^{-1}cbec^2)$. Первым трем соотношениям отвечают нулевые строки. Четвертое соотношение равносильно шестому. В силу четвертого соотношения $e = a^{-1}da$, в силу седьмого $b = d^{-1}ad$. Поэтому E — это второй элементарный идеал матрицы, получающейся подстановкой $[a] = [c] = 1, [d] = t$ из матрицы Александра задания $(a, c, d : d^{-1}ada^{-1}d^{-1}a^{-1}da, d^{-1}cd^{-1}ada^{-1}dac^2)$. Прямое вычисление (с помощью дифференцирований Фокса) показывает, что первая строка этой матрицы над $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ равна нулю, а вторая строка равна $(t^{-2} - t^{-1} + 1, t^{-1} + 2, 0)$. Поэтому $E = (t^{-2} - t^{-1} + 1, t^{-1} + 2)$. Из равенств

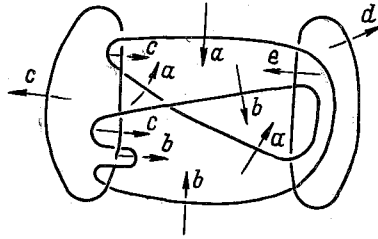


Рис. 2

$$t^{-2} - t^{-1} + 1 - t^{-1}(t^{-1} + 2) = 1 - 3t^{-1},$$

$$3(t^{-1} + 2) + (1 - 3t^{-1}) = 7,$$

$$7t^{-1} + 2(1 - 3t^{-1}) = t^{-1} + 2$$

следует, что $E = (7, 1 - 3t^{-1}) = (7, t - 3)$.

§ 5. Замечания

5.1. По аналогии с элементарными идеалами клеточных пространств можно рассматривать элементарные идеалы $E_j^i(X, Y) \subset Z[H_1(X)]$, отвечающие конечной клеточной паре (X, Y) . Это — идеалы кольца $Z[H_1(X)]$, определяемые так же, как идеалы $\{E_j^i(X)\}$, с той разницей, что вместо цепного комплекса $C_*(\tilde{X})$ следует воспользоваться относительным цепным комплексом пары $(\tilde{X}, p^{-1}(Y))$. Идеалы E_j^i инвариантны относительно гомотопических эквивалентностей $X \rightarrow X'$, индуцирующих гомотопические эквивалентности $Y \rightarrow Y'$.

5.2. Теорема симметричности 3.1 обобщается на случай многообразий с краем следующим образом: если M — компактное m -мерное PL-многообразие и если W — компактное $(m-1)$ -мерное подмногообразие края ∂M (возможно, с $\partial W \neq \emptyset$), то

$$\overline{E_j^i(M, W)} = E_{j - (-1)^i \chi(M, W)}^{m-i-1}(M, \overline{\partial M \setminus W}). \quad (5.2.1)$$

5.3. С каждым n -компонентным зацеплением l в S^3 можно связать последовательность идеалов $F_1(l), F_2(l), \dots$ кольца Λ_n , близких к элементарным идеалам $E_1(l), E_2(l), \dots$ и обладающих свойством симметрии. Именно пусть V — внешность зацепления l , и пусть m_i — окружность в ∂V , представляющая меридиан i -й компоненты зацепления l ($1 \leq i \leq n$). Положим $m = \bigcup_{i=1}^n m_i$ и $F_j(l) = E_j^1(V, m) \subset \Lambda_n$. Равенство $\overline{F_j(l)} = F_j(l)$ вытекает из следующих фактов: если W — регулярная окрестность множества m в ∂V , то $E_j^1(V, m) = E_j^1(V, W)$; в силу формулы (5.2.1)

$$\overline{E_j^1(V, W)} = E_j^1(V, \partial V \setminus \text{Int } W) = E_j^1(V, W).$$

Нетрудно проверить, что если l — узел, то $F_j(l) = E_j(l)$ при всех j .

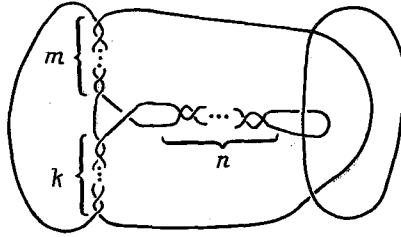


Рис. 3

5.4. Построенное в §3 зацепление l можно включить в бесконечное семейство попарно не изотопных двухкомпонентных зацеплений в S^3 с $\bar{E}_2 \neq E_2$. Пусть $l_{n,m,k}$ — зацепление, получающееся перестройкой сферы вдоль средней компоненты изображенного на рис. 3 зацепления. (Здесь n, m, k — числа полных скручиваний). При $m = 1, n = 0, k = 2$ зацепление $l_{n,m,k}$ совпадает с l . Нетрудно проверить, что отвечающий зацеплению $l_{n,m,k}$ идеал E кольца $Z[t, t^{-1}]$ порождается многочленами $(n-1)t^2 - (2n-1)t + n - 1$ и $kt + m$. Легко подобрать бесконечное число таких троек n, m, k , что соответствующие идеалы попарно различны и несимметричны.

5.5. Пусть X — конечное клеточное пространство, и пусть $G = H_1(X) / \text{Tors } H_1(X)$. По идеалу $E_j^i(X)$ строится многочлен Александера $\Delta_j^i(X)$, определяемый как образующая наименьшего главного идеала кольца $Z[G]$, содержащего образ идеала $E_j^i(X)$ при проекции $Z[H_1(X)] \rightarrow Z[G]$. Многочлены $\Delta_j^i(X)$ вычисляются по группам гомологий максимального свободного абелевого пространства X . Из результатов замечания 5.3 нетрудно вывести тот упомянутый во введении факт, что для любого зацепления в S^3 все его многочлены Александера симметричны.

5.6. Элементарные идеалы клеточных пространств (и, более общо, клеточных пар) можно интерпретировать как инварианты стабильных модулей. Стабильным модулем над кольцом R называется класс пары (конечнопорожденный R -модуль F , целое число n) относительно следующего отношения эквивалентности: пары (F, n) и (F', n') эквивалентны, если $F \oplus R^a$ изоморфно $F' \oplus R^b$ и $n + a = n' + b$ для некоторых целых $a, b \geq 0$. Если R — коммутативное кольцо с единицей и $j \in \mathbb{Z}$, то j -м элементарным идеалом стабильного R -модуля, представляемого парой (F, n) , называется идеал $E_{j+n}^j(F)$ кольца R . Очевидно, что этот идеал не зависит от выбора представителя (F, n) . Если X — конечное клеточное пространство, X^i — его i -мерный остов, a_i — число i -мерных клеток в X и $p: \tilde{X} \rightarrow X$ — максимальное абелево накрытие, то, как видно из доказательства теоремы 2.3, стабильный $Z[H_1(X)]$ -модуль, представляемый парой $(H_i(\tilde{X}, p^{-1}(X^{i-1})), \alpha_{i-1} - \alpha_{i-2} + \dots + (-1)^{i-1} \alpha_0)$, является гомотопическим инвариантом пространства X . Очевидно, что $(j-1)$ -й элементарный идеал этого стабильного модуля равен $E_j^j(X)$.

5.7. Как видно из сказанного во Введении, если π — фундаментальная группа ориентированного замкнутого трехмерного многообразия M , то $\overline{E_j}(\pi) = E_j(\pi)$ при всех j . Автор (см. [9]) и, независимо, Хемпел [10] заметили, что это равенство является следствием гораздо более глубоких свойств группы π , вытекающих из двойственности Пуанкаре для многообразия M . Именно для некоторого

$n \geq 1$ группа π обладает парой заданий $(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n)$ и $(y_1, \dots, y_n; s_1, \dots, s_n)$, двойственных в следующем смысле: $\partial y_i / \partial s_j = \partial r_j / \partial x_i$ при всех $i, j = 1, \dots, n$. Более того, можно считать, что x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n — это одна и та же последовательность образующих группы π (см. [11]).

Список литературы

- [1] Seifert H. Über das Geschlecht von Knoten // Math. An. 1934. Hf 110. S. 571–592.
- [2] Torres G. On the Alexander polynomial // An. of Math. 1953. Vol. 57. P. 57–89.
- [3] Torres G., Fox R. H. Dual presentations of the group of a knot // An. of Math. 1954. Vol. 59. P. 211–218.
- [4] Levine J. A method of generating link polynomials // Amer. J. Math. 1967. Vol. 89. P. 69–84.
- [5] Тураев В. Г. Зацепление с несимметричным вторым элементарным идеалом // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1988. Т. 167. С. 93–94.
- [6] Reidemeister K. Überdeckungen von Komplexen // J. für die reine und angew. Math. 1935. Hf 173. S. 164–173.
- [7] Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.
- [8] Milnor J. W. A duality theorem for Reidemeister torsion // An. of Math. 1962. Vol. 76. P. 137–147.
- [9] Тураев В. Г. Фундаментальные группы многообразий и комплексов Пуанкаре // Мат. сб. 1979. Т. 110 (152). С. 278–296.
- [10] Hempel J. Intersection calculus on surfaces with applications to 3-manifolds // Mem. AMS. 1983. Vol. 43, N 282.
- [11] Тураев В. Г. Фундаментальные группы трехмерных многообразий и двойственность Пуанкаре // Тр. МИАН. 1983. Т. 154.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 1 марта 1989 г.

191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27