Н. Ю. Решетихин, Алгебраический анзац Бете для $SO(N)$-инвариантных трансфер-матриц, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1988, том 169, 122–140

Н.Ю.Решетихин

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНЗАЦ БЕТЕ ДЛЯ $SO(N)$-ИНВАРИАНТНЫХ ТРАНСФЕР-МАТРИЦ

Введение

Метод диагонализации трансфер-матриц [1] в точно-решаемых моделях статистической физики и интегрируемых квантовых системах использующий перестановочные соотношения между элементами квантовой матрицы монодромии [1 - 3] достаточно хорошо описан в литературе для матриц монодромии размера 2х2. Этот метод известен как алгебраический анзац Бете [3]. В случае когда размерность матрицы монодромии больше играет роль матричная структура R-матрицы [4, 5] - матрицы описывающей перестановочные соотношения между элементами квантовой матрицы монодромии. Для R -матриц инвариантных относительно действия групп $SU(n)$ и $Sp(2n)$ эта задача решена в работах [4, 6] и [7] соответственно. Для R -матриц, инвариантных относительно группы $SO(2k)$ эта задача решена для матриц монодромии, действующих в векторном представлении $SO(2k)$ [8].

В настоящей работе предложена конструкция, обобщающая алгебраический анзац Бете на случай R -матриц с симметрией $SO(2k+1)$ и $SO(2k)$ для матриц монодромии, действующих в спинорном представлении. В § 1 приведена основная конструкция квантового метода обратной задачи и сформулирована задача. Алгебраический анзац Бете (ААБ) для R -матриц с блочной структурой построен а § 2. Этот параграф следует рассматривать как обобщение и развитие работы [5] в которой впервые была сделана попытка построения алгебраического анзаца Бете для произвольной R -матрицы с фиксированной блочной структурой. В § 3 ААБ применяется к моделям с $SO(2k+1)$ инвариантной R -матрицей. В § 4 рассмотрена модель с $SO(2k)$ -инвариантной R -матрицей в спинорном представлении. В § 5 обсуждаются возможные применения полученных результатов и не решенные вопросы.

Автор благодарен Л.Д.Фаддееву, П.П.Кулишу, Е.К.Склянину, Ф.А.Смирнову, В.О.Тарасову и Л.А.Тахтаджяну за интересные обсуждения.

§ I. Постановка задачи

Напомним, что в точно-решаемых моделях статистической физики и в интегрируемых квантовых системах основную роль играет квантовая матрица монодромии (КММ). Это матрица, действующая в конечномерном пространстве V, элементы которой зависят от комплексного параметра и спектрального параметра и являются операторами в пространстве состояний $\mathcal{H}$ рассматриваемой системы. Перестановочные соотношения между матричными элементами КММ описываются матрицей $R(u)$ действующей в $V\otimes V$ элементы которой являются функциями от спектрального параметра и имеют вид:

$$R_{12}(u)T_1(u+v)T_2(v)=T_2(v)T_1(u+v)R_{12}(u), \qquad (I.1)$$

где $T_1(u)=T(u)\otimes 1$, $T_2(u)=1\otimes T(u)$, $R_{12}(u)=R(u)$, а матрица $R(u)$ удовлетворяет соотношению Янга-Бакстера:

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v)=R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u). \qquad (I.2)$$

Здесь нижние индексы указывают вложение матрицы $R(u)$ в $V\otimes V\otimes V$.

Часто удобно иметь дело с семейством матриц монодромии $T^{\lambda}(u)$ действующих в пространствах V^{λ} (вообще говоря разной размерности). В этом случае матрицы монодромии и R -матрицы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R^{\lambda\mu}(u)T_1^{\lambda}(u+v)T_2^{\mu}(v)=T_2^{\mu}(v)T_1^{\lambda}(u+v)R^{\lambda\mu}(u) \qquad (I.3)$$

$$R_{12}^{\lambda\mu}(u)R_{13}^{\lambda\nu}(u+v)R_{23}^{\mu\nu}(v)=R_{23}^{\mu\nu}(v)R_{13}^{\lambda\nu}(u+v)R_{12}^{\lambda\mu}(u). \qquad (I.4)$$

Здесь в (I.3) левая и правая части действуют в $V^{\lambda}\otimes V^{\mu}$, в (I.4) – в $V^{\lambda}\otimes V^{\mu}\otimes V^{\nu}$.

Из (I.3) следует коммутативность следов матриц $T^{\lambda}(u)$ по V^{λ}:

$$[t^{\lambda}(u),t^{\mu}(v)]=0,\quad t^{\lambda}(u)=tr_{V^{\lambda}}(T^{\lambda}(u)). \qquad (I.5)$$

Операторы $t^{\lambda}(u)$ называются трансфер-матрицами. Они играют роль производящих функций квантовых законов сохранения для квантовых интегрируемых систем [I – 3]. В моделях статистической физики они интерпретируются как матрицы перехода между состояниями на строках решетки [9]. Поэтому важно найти спектр этих операторов с данной R -матрицей. Эта задача и решается ниже, сначала в достаточной общей постановке, а затем, для $SO(N)$ инвариантных моделей.

§ 2. Алгебраический анзац Бете для блочных R -матриц

Рассмотрим матрицу $R(u)$, действующую в $V\otimes V$, $V=W\oplus W$ Предположим, что она сплетает пару матриц монодромии $T(u)$, действующих в квантовом пространстве $\mathcal{H}$, т.е. справедливо соотношение (I.I).

В $W\oplus W$ базисе матрица $T(u)$ имеет блочный вид:

$$T(u)=\begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & \mathcal{D}(u) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $A, B, C, \mathcal{D}$ - матрицы размера $d\times d$ ($d=\dim W$) с элементами - операторами, действующими в $\mathcal{H}$.

Потребуем, чтобы существовал такой $W\oplus W$ базис в котором матрицы $R(u)$ и $T(u)$ имеют следующие свойства:

$i)$ матрица $R(u)$ имеет следующую блочную структуру

$$R(u)=\begin{pmatrix} S(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(u) & \mathcal{U}(u) & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathcal{U}}(u) & Q(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(u) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

где $S, Q, \mathcal{U}$ действуют в $W\otimes W$

$ii)$ $Q(u)\longrightarrow u\, Q^{(0)},\quad u\longrightarrow 0$

$$iii)\ \mathcal{U}(u)=\frac{f(u)}{s(u)}P\,Q^{(0)^{-1}}Q(u),\quad \widetilde{\mathcal{U}}(u)=\frac{f(u)}{s(u)}Q(u)\,Q^{(0)^{-1}}P$$

где $f(u)$ - некоторая скалярная функция, P - матрица перестановки в $W\otimes W$: $P\, f\otimes g = g\otimes f$, $s(u)=u$ для рациональных R -матриц, $s(u)=\operatorname{sh} u$ для тригонометрических R -матриц.

$iv)$ $\left(Q^{(0)^{-1}}_{12}\right)^{t_1}=c\,\Pi_{12}$ где Π_{12} - некоторый проектор в $W^*\otimes W$. Обозначим через $\widetilde{W}$ образ проектора Π: $\widetilde{W}=\Pi(W^*\otimes W)$

$v)$ В $\mathcal{H}$ имеется подпространство $\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$ такое, что $C_{ij}(u)\mathcal{H}_0=0$ а для $A_{ij}(u)$ и $\mathcal{D}_{k\ell}(u)$ подпространство $\mathcal{H}_0$ - собственно.

Отметим, что если $R(u)$ - полином по u и $R(u)\to u^q I, u\to\infty$ то $f(u)$ может быть только константой.

Сделанных предположений о структуре $R(u)$ и $T(u)$ теперь достаточно, чтобы явно построить собственные векторы $t(u)=tr_V T(u)$ Для этого используем следующий анзац

$$F = B_{i_1 j_1}(u_1^{(1)})\ldots B_{i_n j_n}(u_n^{(1)}) F^{(1)}_{i_1\ldots i_n, j_1\ldots j_n}, \tag{2.3}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Векторы $F^{(1)}$ выбираем так, чтобы

$$_{i_k j_k}\Pi_{i'_k j'_k} F^{(1)}_{i_1\ldots i'_k\ldots i_n, j_1\ldots j'_k\ldots j_n} = F_{i_1\ldots i_n, j_1\ldots j_n} \in \mathcal{H}_0. \tag{2.4}$$

Здесь $_{ij}\Pi_{k\ell} = e_i^*\otimes e_j^* \Pi e_k \otimes e_\ell$.

Используя перестановочные соотношения (I.2) и перечисленные выше свойства $R(u)$ и $T(u)$, можно доказать, что:

$$tr_a(A_a(u))\cdot F = B_{i_1 i'_1}(u_1^{(1)})\ldots B_{i_n i'_n}(u_n^{(1)})\left(t^{(1)}_{(11'),\ldots,(nn')}(u)\right)^{i_1\ldots i_n i'_1\ldots i'_n}_{j_1\ldots j_n, j'_1\ldots j'_n}$$

$$F^{(1)}_{j'_1\ldots j'_n, j_1\ldots j_n} + \frac{f(u-u_1^{(1)})}{s(u-u_1^{(1)})} B_{i_1 i'_1}(u) B_{i_2 i'_2}(u_2^{(1)})\ldots B_{i_n i'_n}(u_n^{(1)})\cdot$$

$$\cdot \operatorname{res}_{u=u_1^{(1)}}\left(t^{(1)}_{(11')\ldots(nn')}(u)\right)^{i_1\ldots i_n, i'_1\ldots i'_n}_{j_1\ldots j_n, j'_1\ldots j'_n} F^{(1)}_{j'_1\ldots j'_n, j_1\ldots j_n} + \ldots, \tag{2.5}$$

где матрица $t^{(1)}_{(11')\ldots(nn')}(u)$ действует в $\widetilde{W}_{(11')}\otimes\widetilde{W}_{(22')}\otimes \ldots \otimes\widetilde{W}_{(nn')}\otimes\mathcal{H}_0$ имеет следующий вид

$$t^{(1)}_{(11')\ldots(nn')}(u) = \Pi_{11'}\ldots\Pi_{nn'}\, tr_a\left\{ S^{t_1}_{1a}(u_1^{(1)}-u) Q^{-1}_{1'a}(u_1^{(1)}-u)\right.$$

$$\left.\ldots S^{t_n}_{na}(u_n^{(1)}-u) Q^{-1}_{n'a}(u_n^{(1)}-u)\widetilde{A}_a(u)\right\}\Pi_{11'}\ldots\Pi_{nn'} \tag{2.6}$$

Здесь через t_i обозначена операция транспозиции в i-ом пространстве, а через $\widetilde{A}(u)$ - сужение $A(u)$ на $\mathcal{H}_0$. Нижние индексы у матриц означают пространства в которых они действуют, при этом $W_i \simeq W_{i'} \simeq W_a \simeq W$. В (2.5) явно не выписаны члены, аналогичные второму слагаемому, в которых $u_1^{(1)}$ заменяется на $u_j^{(1)}, n\geq j\geq 2$.

Аналогичное соотношение, как нетрудно убедиться, имеется в для $tr_a\,\mathcal{D}_a(u)$:

$$tr_a(\mathcal{D}_a(u))\cdot F = B_{i_1 i_1'}(u_1^{(1)})\dots B_{i_n i_n'}(u_n^{(1)})\left(\tilde{t}^{(1)}_{(11')\dots(nn')}(u)\right)^{i_1\dots i_n, i_1'\dots i_n'}_{j_1\dots j_n, j_1'\dots j_n'}$$

$$F^{(1)}_{j_1'\dots j_n', j_1\dots j_n} + \frac{f(u-u_1^{(1)})}{s(u-u_1^{(1)})} B_{i_1 i_1'}(u) B_{i_2 i_2'}(u_2^{(1)})\dots B_{i_n i_n'}(u_n^{(1)})\cdot$$

$$\cdot \operatorname{res}_{u=u_1^{(1)}} \left(\tilde{t}^{(1)}_{(11')\dots(nn')}(u)\right)^{i_1\dots i_n, i_1'\dots i_n'}_{j_1\dots j_n, j_1'\dots j_n'} F^{(1)}_{j_1\dots j_n, j_1'\dots j_n'} + \dots \qquad (2.7)$$

где матрица $\tilde{t}^{(1)}_{(11')\dots(nn')}(u)$ действует в $\widetilde{W}_{(11')}\otimes\widetilde{W}_{(22')}\otimes\dots\otimes\mathcal{H}_0$ и имеет следующий вид:

$$\tilde{t}^{(1)}_{(11')\dots(nn')}(u) = \Pi_{11'}\dots\Pi_{nn'} tr_a\left\{\left(Q^{-1}_{a1}(u-u_1^{(1)})\right)^{t_1} S_{a1'}(u-u_1^{(1)})\cdot\right. \qquad (2.8)$$

$$\left.\dots\left(Q^{-1}_{an}(u-u_n^{(1)})\right)^{-t_n} S_{an'}(u-u_n^{(1)})\widetilde{\mathcal{D}}_a(u)\right\}\Pi_{11'}\dots\Pi_{nn'}.$$

Используя соотношения (I.I) и свойство) матрицы $T(u)$ нетрудно показать, что матрицы $t^{(1)}(u)$ и $\tilde{t}^{(1)}(u)$ коммутируют:

$$[t^{(1)}(u), t^{(1)}(v)] = [t^{(1)}(u), \tilde{t}^{(1)}(v)] = [\tilde{t}^{(1)}(u), \tilde{t}^{(1)}(v)] = 0. \qquad (2.9)$$

Обозначим через $\Lambda^{(1)}(u)$ и $\tilde{\Lambda}^{(1)}(u)$ собственные значения $t^{(1)}(u)$ и $\tilde{t}^{(1)}(u)$ соответственно. Из ii) и явного вида матриц $t^{(1)}(u), \tilde{t}^{(1)}(u)$ следует, что при $u=u_j^{(1)}$ функции $\Lambda^{(1)}(u)$ и $\tilde{\Lambda}^{(1)}(u)$ имеют полюса и что справедлива

ТЕОРЕМА I. Вектор F является собственным для $t(u)$, если $F^{(1)}$ - собственный для $t^{(1)}(u)$ и $\tilde{t}^{(1)}(u)$ и числа $u_j^{(1)}$ удовлетворяют системе:

$$\operatorname{res}_{u=u_j^{(1)}} \Lambda^{(1)}(u) = -\operatorname{res}_{u=u_j^{(1)}} \tilde{\Lambda}^{(1)}(u). \qquad (2.10)$$

При этом:

$$t(u)F = \left(\Lambda^{(1)}(u) + \tilde{\Lambda}^{(1)}(u)\right)F$$
$$t^{(1)}(u)F^{(1)} = \Lambda^{(1)}(u)F^{(1)}, \quad \tilde{t}^{(1)}(u)F^{(1)} = \tilde{\Lambda}^{(1)}(u)F^{(1)}. \qquad (2.11)$$

Для доказательства достаточно заметить, что если условие (2.10) выполнено, то "нежелательные" слагаемые в (2.5) и (2.7) взаимно уничтожаются.

Эта теорема сводит задачу диагонализации следа квантовых матриц монодромии размера $2d \times 2d$ и диагонализации следов двух матриц монодромии размера $d \times d$.

§ 3. Алгебраический анзац Бете для $SO(2k+1)$ инвариантных моделей

Для построения собственных векторов $SO(2k+1)$ -инвариантных трансфер-матриц нам понадобятся спинор-спинорная и спинор-векторная R -матрицы. Спинорное представление $SO(2k+1)$ неприводимо имеет старший вес $\omega_k = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ (в обозначениях [4]), $\dim V^{\omega_k} = 2^k$ Оно реализуется спинорными образующими

$$\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\delta_{ab}, \quad M_{ab} = \gamma_a \gamma_b - \delta_{ab}. \tag{3.1}$$

Тензорное произведение $V^{\omega_k} \otimes V^{\omega_k}$ раскладывается на неприводимые компоненты:

$$V^{\omega_k} \otimes V^{\omega_k} = \sum_{p=0}^{k-1} \oplus V^{\omega_p} \oplus V^{2\omega_k} \tag{3.2}$$

Далее примем обозначение $V^s \equiv V^{\omega_k}$, в (3.2) V^{ω_p} - неприводимое представление $SO(2k+1)$ в антисимметричных тензорах ранга $0 \leqslant k-1$, $V^{2\omega_k}$ - неприводимое представление $SO(2k+1)$ со старшим весом $2\omega_k$, Для проекторов на компоненты V^{ω_ℓ} можно написать явную формулу:

$$\mathcal{P}^{(\ell)} = 2^{-k}(-1)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}} \sum_{1 \leqslant a_1 < \ldots < a_\ell \leqslant 2k+1} (1 \otimes C\gamma_{a_1} \ldots \gamma_{a_\ell}) K (C\gamma_{a_\ell} \ldots \gamma_{a_1} \otimes 1), \tag{3.3}$$

где C - матрица зарядового сопряжения $C\gamma_a^t C = \gamma_a$, $K_{12} = P_{12}^{t_1}$ где P - матрица перестановки в $V^s \otimes V^s$, t_1 - транспонирование по первому пространству.

Спинор-векторная $SO(2k+1)$ -инвариантная R -матрица имеет следующий вид:

$$R^{V,S}(u|k) = u + \frac{2k-1}{2} - M, \tag{3.4}$$

где M - матрица генераторов (3.1).

Матрица (3.4) унитарна и кроссинг-симметрична:

$$R^{V,S}(u|k)\, R^{V,S}(-u|k) = \left(u + \frac{2k+1}{2}\right)\left(-u + \frac{2k+1}{2}\right), \tag{3.5}$$

$$C_2 R_{12}^{V,S}(u|\kappa)^{t_2} C_2 = R_{12}^{V,S}(u|\kappa)^{t_1} = -R_{12}^{V,S}(-u-2\kappa+1|\kappa). \qquad (3.6)$$

Спинор-спинорная R -матрица находится из уравнения:

$$R_{12}^{S,S}(u) R_{13}^{S,V}(u+v) R_{23}^{S,V}(v) = R_{23}^{S,v}(v) R_{13}^{S,v}(u+v) R_{12}^{S,S}(u).$$

Из этого уравнения можно найти $R^{S,S}(u)$ в виде разложения по образующим γ_a и (следуя [10]) в виде спектрального разложения по проекторам (3.3) (см. [11], [12])

$$R^{S,S}(u|\kappa) = 2^{-\kappa} \sum_{s=0}^{\kappa} u_s(u) P \sigma^{(s)} = \sum_{s=0}^{\kappa} \rho_s(u) \mathcal{P}^{(s)}, \qquad (3.7)$$

где

$$\sigma^{(s)} = \sum_{1 \leq a_1 < \ldots < a_s \leq 2\kappa+1} \gamma_{a_1} \ldots \gamma_{a_s} \otimes \gamma_{a_1} \ldots \gamma_{a_s}$$

$$u_{2\ell-1}(u) = (-1)^{\ell} \prod_{s=0}^{\ell-1} (u+4s-2) \prod_{m=\ell}^{\left[\frac{\kappa-1}{2}\right]} (u+4\kappa-4m) \prod_{m=0}^{\left[\frac{\kappa}{2}\right]} (u+4m),$$

$$u_{2\ell}(u) = (-1)^{\ell} \prod_{s=0}^{\ell-1} (u+4s) \prod_{m=\ell}^{\left[\frac{\kappa}{2}\right]} (u+4\kappa-4m-2) \prod_{m=1}^{\left[\frac{\kappa-1}{2}\right]} (u+4m-2) \qquad (3.9)$$

$$\rho_s(u) = (-1)\, u_s(-u-2\kappa+1) \qquad (3.10)$$

$$\rho_{s+2}(u) = \frac{u+2\kappa-2\kappa-1}{u-2\kappa+2s+1} \rho_s(u), \quad \rho_\kappa(u) = \frac{u+1}{u-1} \rho_{\kappa-1}(u). \qquad (3.11)$$

Из (3.7)-(3.11) заключаем, что матрица $R^{S,S}(u)$ кроссинг-симметрична:

$$R_{12}^{S,S}(u|\kappa)^{t_1} = (-1)^{\kappa} C_1 R_{12}^{S,S}(-u-2\kappa+1|\kappa) C_1 \qquad (3.12)$$

и унитарна

$$R^{S,S}(u|\kappa) R^{S,S}(-u|\kappa) = \prod_{\ell=1}^{\kappa} (u+2\ell-1)(-u+2\ell-1). \qquad (3.13)$$

Рассмотрим сужение спинорного представления V^S на подалгебру $SO(2\kappa-1)$. Понятно, что $V^S(\kappa)\downarrow_{SO(2\kappa-1)} = V^S(\kappa-1) \oplus V^S(\kappa-1)$

ТЕОРЕМА 2. При ограничении $SO(2k+1)\downarrow SO(2k-1)$ матрица $R^{SS}(u|k)$ имеет блочную структуру (2.2) с $W=V^{S}(k-1)$, кроме того,

$$
\begin{aligned}
& S(u)=(u+2k-1)\,R^{S,S}(u|k-1),\\
& Q(u)=u\,R^{S,S}(u+2|k-1),\\
& \mathcal{U}(u)=\widetilde{\mathcal{U}}(u)=P\,R^{S,S}(u+2|k-1)\left(R^{S,S}(2|k-1)\right)^{-1}\\
& \Pi=\mathcal{P}^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Эта теорема доказывается непосредственно вычислением.

ТЕОРЕМА 3. Обозначим

$$
f_k(u)=\prod_{l=1}^{k}(u+2l-1). \tag{3.15}
$$

Справедливо следующее соотношение, связывающее $R^{S,S}(u)$ и $R^{S,\vartheta}(u)$:

$$
\mathcal{P}^{(1)}_{23}R^{S,S}_{12}\left(u-\frac{2k-3}{2}\Big|k\right)R^{SS}_{13}\left(u+\frac{2k-3}{2}\Big|k\right)\mathcal{P}^{(1)}_{23}=
$$
$$
=\frac{f_k\left(u+\frac{2k-3}{2}\right)f_k\left(-u-\frac{2k-3}{2}\right)}{\left(-u+\frac{2k+1}{2}\right)}(-1)^{k-1}R^{S,\vartheta}_{1,(23)}(u|k). \tag{3.16}
$$

Предположим далее, что QMM $T(u|k)$, действующая в $V^{S}(k)$ удовлетворяет требованию) из § 2 для всех k. Мы видим, что структура $R^{S,S}(u)$ позволяет использовать анзац (2.3) для построения собственных векторов $t(u)$.

Легко убедиться, что в этом случае

$$
T^{-1}(u)\mathcal{H}_0=\begin{pmatrix} A^{-1}(u)\mathcal{H}_0, & -A^{-1}(u)B(u)\bar{\mathcal{D}}(u)\mathcal{H}_0\\ 0\;, & \bar{\mathcal{D}}(u)\mathcal{H}_0\end{pmatrix} \tag{3.17}
$$

Потребуем чтобы квантовая матрица монодромии удовлетворяла соотношению кроссинг-симметрии:

$$
C\,T(u)^{t}\,C^{-1}=T(u+N-2)^{-1},\quad N=2k+1. \tag{3.18}
$$

Здесь t – транспонирование, C – матрица зарядового сопряжения.

Пользуясь тем, что матрица зарядового сопряжения антидиагональна в блочном базисе

$$C=\begin{pmatrix} 0 & C' \\ C' & 0 \end{pmatrix},$$

из кроссинг-симметрии $T(u)$ получаем:

$$C'\mathcal{D}^t_{\varkappa_0}(u)C' = A^{-1}_{\varkappa_0}(u+N-2), \tag{3.19}$$

где $A_{\varkappa_0}(u)$ обозначает ограничение блока $A(u)$ на подпространство

В самом общем случае матрицы $A_{\varkappa_0}(u)$ и $\mathcal{D}_{\varkappa_0}(u)$ содержат скалярные множители. С учетом (3.19), (3.18) можем написать:

$$A_{\varkappa_0}(u) = a_\kappa(u)\,T(u|\kappa-1) \tag{3.20}$$

$$\mathcal{D}_{\varkappa_0}(u) = a^{-1}_\kappa(u+N-2)(C'T^{-1}(u+N-2|\kappa-1)C')^t = \\ = a^{-1}_\kappa(u+N-2)\,T(u+2|\kappa-1).$$

Продолжая процедуру редукции получим, последовательность функций $a_1(u),\ldots,a_\kappa(u)$ которая определяет спектр трансфер-матриц. В терминологии работы [13] они образуют параметры обобщенной модели.

Введем семейство трансфер-матриц:

$$t(u|\{w\}|\kappa) = tr_a\left(R^{V,S}_{1a}\left(u-w_1-\tfrac{2\kappa+1}{2}\Big|\kappa\right)\ldots R^{V,S}_{na}\left(u-w_n-\tfrac{2\kappa-1}{2}\Big|\kappa\right)T_a(u|\kappa)\right). \tag{3.21}$$

Легко проверить, что трансфер-матрицы (2.6) и (2.8) для рассматриваемого класса $SO(2\kappa+1)$ -инвариантных моделей имеют вид:

$$t^{(1)}(u) = a_\kappa(u)\prod_{j=1}^{n_1}\frac{1}{u-u^{(1)}_j}\prod_{j=1}^{n}(u-w_j)\,t(u|\{u^{(1)}_j\}^{n_1}_{j=1}|\kappa-1), \tag{3.22}$$

$$\tilde{t}^{(1)}(u) = a^{-1}_\kappa(u+2\kappa-1)\prod_{j=1}^{n_1}\frac{1}{u-u^{(1)}_j}\prod_{j=1}^{n}(u-w_j-2)\,t(u+2|\{u^{(1)}_j\}^{n_1}_{j=1}|\kappa-1) \tag{3.23}$$

Если через $\Lambda(u|\{w\}|\kappa)$ обозначить собственные значения этой матрицы, то для них, из теоремы I и формул (3.22) и (3.23) получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\Lambda(u|\{w\}|\kappa) = a_\kappa(u)\frac{P(u)}{P_1(u)}\Lambda(u|\{u^{(1)}\}_{n_1}|\kappa-1)+ \tag{3.24}$$

$$+ a_{\kappa}^{-1}(u+2\kappa-1)\,\frac{P(u-2)}{P_1(u)}\,\Lambda(u+2\,|\,\{u^{(1)}\}_{n_1}\,|\,\kappa-1)$$

где

$$P(u)=\prod_{j=1}^{n}(u-w_j),\quad P_1(u)=\prod_{j=1}^{n_1}(u-u_j^{(1)})$$

$$\Lambda(u\,|\,\{w\}\,|\,0)\equiv\prod_{j=1}^{n}(u-w_j-1)\,. \tag{3.25}$$

Это рекуррентное соотношение легко разрешается и для получаем

$$\Lambda(u\,|\,\{w\}\,|\,\kappa)=\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_\kappa=\pm}b_{\sigma_1}(u\,|\,1)\,b_{\sigma_2}(u+1-\sigma_1\,|\,2)\dots \tag{3.26}$$

$$\dots b_{\sigma_\kappa}\Big(u+\kappa-1-\sum_{j=1}^{\kappa-1}\sigma_j\,\Big|\,\kappa\Big),$$

$$b_+(u\,|\,l)=a_{\kappa-l+1}(u)\,\frac{P_{l-1}(u)}{P_l(u)}\,, \tag{3.27}$$

$$b_-(u\,|\,l)=a_{\kappa-l+1}^{-1}(u+2\kappa-2l+1)\,\frac{P_{l-1}(u-2)}{P_l(u)}\,, \tag{3.28}$$

где $u_j^{(0)}\equiv w_j$, $l=1,\dots,\kappa-1$

$$b_+(u\,|\,\kappa)=a_1(u)\,P_{\kappa-1}(u)\,\frac{P_\kappa(u-1)}{P_\kappa(u)}\,, \tag{3.29}$$

$$b_-(u\,|\,\kappa)=a_1^{-1}(u+1)\,P_{\kappa-1}(u-2)\,\frac{P_\kappa(u+1)}{P_\kappa(u)}\,. \tag{3.30}$$

Согласно теореме I числа $u_j^{(l)}$ удовлетворяют системе уравнений (2.10). В рассматриваемом случае эта система имеет следующий вид:

$$\frac{a_\kappa(u_j^{(1)})\,a_\kappa(u_j^{(1)}+2\kappa-1)}{a_{\kappa-1}(u_j^{(1)})\,a_{\kappa-1}(u_j^{(1)}+2\kappa-3)} = -\frac{P_1(u_j^{(1)}+2)P_2(u_j^{(1)})P(u_j^{(1)}-2)}{P_1(u_j^{(1)}-2)P_2(u_j^{(1)}+2)P(u_j^{(1)})}$$

. . . .

$$\frac{a_{\kappa-\ell+1}(u_j^{(\ell)})\,a_{\kappa-\ell+1}(u_j^{(\ell)}+2\kappa-2\ell+1)}{a_{\kappa-\ell}(u_j^{(\ell)})\,a_{\kappa-\ell}(u_j^{(\ell)}+2\kappa-2\ell-1)} = -\frac{P_\ell(u_j^{(\ell)}+2)P_{\ell+1}(u_j^{(\ell)})P_{\ell-1}(u_j^{(\ell)}-2)}{P_\ell(u_j^{(\ell)}-2)P_{\ell+1}(u_j^{(\ell)}+2)P_{\ell-1}(u_j^{(\ell)})},$$

. . . .

$$a_1(u_j^{(\kappa)})\,a_1(u_j^{(\kappa)}+1) = -\frac{P_\kappa(u_j^{(\kappa)}+1)P_{\kappa+1}(u_j^{(\kappa)}-2)}{P_\kappa(u_j^{(\kappa)}-1)P_{\kappa-1}(u_j^{(\kappa)})}\,. \tag{3.31}$$

Собственные векторы $t(u|\kappa)$, отвечающие собственным значениям (3.26), строятся рекуррентно, по процедуре описанной в разделе 2.

Таким образом, мы нашли спектр $SO(2\kappa+1)$ инвариантной трансфер-матрицы, используя цепочку вложений $SO(2\kappa+1)\supset SO(2\kappa-1)\supset$ $\supset\ldots\supset SO(3)$.

§ 4. Спектр $SO(2\kappa)$ инвариантных трансфер-матриц

Генераторы алгебры $SO(2\kappa)$ в спинорном представлении строятся через спинорные образующие γ_a

$$M_{ab} = \gamma_a\gamma_b - \delta_{ab}\,,\quad \gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\delta_{ab}\,. \tag{4.1}$$

У $SO(2\kappa)$ имеются два спинорных представления $V^{(\pm)}$ характеризующиеся значением спиральности $\Gamma = (i)^{\kappa/2}\gamma_1\ldots\gamma_\kappa$, $\dim V^{(\pm)} = 2^{\kappa-1}$. В соответствии с этим имеется четыре спинор-спинорные R -матрицы $R^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$, $\varepsilon, \varepsilon' = \pm$ и две спинор-векторные R -матрицы $R^{\pm,V}(u)$. Из $SO(2\kappa)$ инвариантности следует, что $R^{(+,+)}(u) = R^{-,-}(u)$ и $R^{+,-}(u) = P R^{-,+}(u) P$ Тензорные произведения $V^{(s)}\otimes V^{(s')}$ имеют следующие неприводимые компоненты:

$$V^{(\varepsilon)} \otimes V^{(\varepsilon)} = V^{\omega(\varepsilon)} \oplus V^{\omega_{k-2}} \oplus V^{\omega_{k-4}} \oplus \dots$$

$$V^{(\varepsilon)} \otimes V^{(-\varepsilon)} = V^{\omega_{k-3}} \oplus V^{\omega_{k-5}} \oplus \dots \quad , \tag{4.2}$$

где V^{ω_ℓ}, $\ell \leq k-2$ – неприводимое представление $SO(2k)$ в полностью антисимметричных тензорах ранга ℓ, $V^{\omega(s)}$ – неприводимое представление $SO(2k)$ с сигнатурой $(1,\dots,\varepsilon)$.

Проекторы на подпространства V^{ω_ℓ} имеют следующий вид:

$$\mathcal{P}^{\varepsilon,\varepsilon',\ell} = 2\left(\Gamma^{(\varepsilon)} \otimes \Gamma^{(\varepsilon')}\right) \mathcal{P}^{(\ell)} \left(\Gamma^{(\varepsilon)} \otimes \Gamma^{(\varepsilon')}\right), \tag{4.3}$$

где $\mathcal{P}^{(\ell)}$ – проектор заданный выражением (3.3) $\Gamma^{(\pm)} = (1 \pm \Gamma)/2$

Спинор-векторная $SO(2k)$ -инвариантная R -матрица линейна по параметру u :

$$R_{12}^{v,\pm}(u|k) = u + k - 1 - M \ , \tag{4.4}$$

где M – матрица генераторов (4.I).

Матрица (4.4) унитарна и кроссинг-симметрична

$$R^{v,\varepsilon}(u|k) R^{v,\varepsilon}(-u|k) = (u+k+1)(-u+k+1) \tag{4.5}$$

$$C_2 R_{12}^{v,\varepsilon}(u|k)^{t_2} C_2 = R_{12}^{v,\varepsilon}(u|k)^{t_1} =$$

$$= -R^{v,\varepsilon_c}(-u-2k+2|k), \tag{4.6}$$

где C – матрица зарядового сопряжения, $\varepsilon_c = \varepsilon$, k – четно $\varepsilon_c = -\varepsilon$, k – нечетно.

Спинор-спинорные R -матрицы находятся из уравнения

$$R_{12}^{\varepsilon,\varepsilon'}(u) R_{13}^{\varepsilon,v}(u+v) R_{23}^{\varepsilon',v}(v) = R_{23}^{\varepsilon',v}(v) R_{13}^{\varepsilon,v}(u+v) R_{12}^{\varepsilon,\varepsilon'}(u) \tag{4.7}$$

Из этого уравнения находим разложение матриц $R^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$ по образующим γ_a и спектральные разложения:

$$R^{+,+}(u|k) = 2^{-k+1} \sum_{\substack{s=q \pmod 2 \\ s \leq q}} u_s(u) P\sigma^{(s)} =$$

$$= \sum_{\substack{s=k \pmod 2 \\ s \leq k}} \rho_s(u) \mathcal{P}^{+,+,s}, \tag{4.8}$$

$$R^{+,-}(u|\kappa)=2^{-\kappa+1}\sum_{\substack{s=p(\mathrm{mod}\,2)\\ s\leq p}} u_s(u)P\sigma^{(s)}=\sum_{\substack{s=\kappa-1(\mathrm{mod}\,2)\\ s\leq \kappa-1}}\rho_s(u)\mathcal{P}^{+,-,s},\tag{4.9}$$

где $\sigma^{(s)}$ - инвариантный тензор в $V^{(\varepsilon)}\otimes V^{(\varepsilon')}$ заданный формулой (3.8), $q=\kappa, p=\kappa-1$ при четных κ, $q=\kappa-1$, $p=\kappa$ при нечетных κ. Функции $u_s(u)$ и $\rho_s(u)$ имеют следующий вид:

$$\rho_s(u)=\prod_{\substack{0\leq t<s\\ t=s(\mathrm{mod}\,2)}}(u+2\kappa-2t-2)\prod_{\substack{t\geq s\\ t=s(\mathrm{mod})}}^{s_{max}}(u-2\kappa+2t+2)\tag{4.10}$$

$$u_s(u)=(-1)\,\rho_s(-u-2\kappa+2),$$

где s_{max} определяется из (4.8), (4.9).

Из (4.10), (4.11) следует, что матрицы $R^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$ кроссинг-симметричны и унитарны:

$$C_1 R_{12}^{\varepsilon,\varepsilon'}(u|\kappa)^{t_1}C_1=C_2R_{12}^{\varepsilon,\varepsilon'}(u|\kappa)^{t_2}C_2=(-1)R_{12}^{\varepsilon,\varepsilon'_c}(-u-2\kappa+2|\kappa)\tag{4.12}$$

$$R_{12}^{\varepsilon,\varepsilon'}(u|\kappa)\,R_{12}^{\varepsilon,\varepsilon'}(-u|\kappa)=f_\kappa^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)\,f_\kappa^{\varepsilon,\varepsilon'}(-u),\tag{4.13}$$

$$f_\kappa^{\varepsilon,\varepsilon}(u)=\prod_{\substack{1\leq s\leq\kappa\\ s=\kappa(\mathrm{mod}\,2)}}(u+2s-2),\quad f_\kappa^{\varepsilon,-\varepsilon}(u)=\prod_{\substack{1\leq s\leq\kappa-1\\ s=\kappa-1(\mathrm{mod}\,2)}}(u+2s-2).\tag{4.14}$$

Рассмотрим сужение спинорного представления $V^{(\varepsilon)}$ на подалгебру $SO(2\kappa-2)$. При таком сужении:

$$V^{(\pm)}(\kappa)=V^{(\pm)}(\kappa-1)\oplus V^{(\mp)}(\kappa-1).$$

Воспользовавшись явным видом $R^{\varepsilon,\varepsilon'}(u|\kappa)$ нетрудно проверить, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. При ограничении $SO(2\kappa)\downarrow SO(2\kappa-2)$ матрица $R^{\varepsilon,\varepsilon'}(u|\kappa)$ имеет блочную структуру (2.2). Блоки $S^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$, $Q^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$, $U^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$ у матриц $R^{\varepsilon,\varepsilon'}(u|\kappa)$ зависят от четности и имеют следующий вид:

K -четно

$$S^{+,+}(u) = (u+2K-2)\,R^{+,+}(u|K-1) \qquad (4.14)$$

$$Q^{+,+}(u) = u\,R^{-,+}(u+2|K-1) \qquad (4.15)$$

$$S^{+,-}(u) = R^{+,-}(u|K-1) \qquad (4.16)$$

$$Q^{+,-}(u) = R^{-,-}(u+2|K-1) \qquad (4.17)$$

K - нечетно

$$S^{+,+}(u) = R^{+,+}(u|K-1) \qquad (4.18)$$

$$Q^{+,+}(u) = u\,R^{+,-}(u+2|K-1) \qquad (4.19)$$

$$S^{+,-}(u) = (u+2K-2)\,R^{+,-}(u|K-1) \qquad (4.20)$$

$$Q^{+,-}(u) = R^{+,+}(u+2|K-1) \qquad (4.21)$$

матрицы $\mathcal{U}^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$ удовлетворяют соотношению:

$$\mathcal{U}_{12}^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)\left(Q_{12}^{\varepsilon',\varepsilon}(u)\right)^{-1} = \frac{P}{u}\left(Q^{\varepsilon',-\varepsilon}(0)\right)^{-1}. \qquad (4.22)$$

Предположим далее, что $T^{(\pm)}(u|K)$, действующие в $V^{(\pm)}(K)$ удовлетворяют требованию v) из раздела 2. Легко убедиться, что в этом случае

$$T^{(\varepsilon)}(u)^{-1}\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} A^{(\varepsilon)}(u)^{-1}\mathcal{H}_0, & * \\ 0, & \bar{\mathcal{D}}^{(\varepsilon)}(u)\mathcal{H}_0 \end{pmatrix} \qquad (4.23)$$

Потребуем чтобы квантовая матрица монодромии удовлетворяла кроссинг-симметрии:

$$C\,T^{(\varepsilon)}(u)^t\,C^{-1} = T^{(\varepsilon_c)}(u+N-2)$$

где C – матрица зарядового сопряжения, t –транспонирование, $N=2\kappa; \varepsilon_c=\varepsilon$ для четных κ, $\varepsilon_c=-\varepsilon$ для нечетных κ.

Как и в $SO(2\kappa+1)$ –случае из кроссинг–симметрии имеем:

$$
\begin{aligned}
C' \mathcal{D}^{(\varepsilon)}_{\varkappa_0}(u)^t C'^{-1} &= A^{(\varepsilon_c)^{-1}}_{\varkappa_0}(u+N-2) \\
C' A^{(\varepsilon)}_{\varkappa_0}(u)^t C'^{-1} &= \bar{\mathcal{D}}^{(\varepsilon_c)}_{\varkappa_0}(u+N-2).
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Здесь C' – матрица зарядового сопряжения для $SO(2\kappa-2)$. В общем случае из матрицы $A_{\varkappa_0}(u)$ и $\mathcal{D}_{\varkappa_0}(u)$ может выноситься скалярный множитель и мы имеем:

$$
A^{(\varepsilon)}_{\varkappa_0}(u) = a^{\varepsilon}_{\kappa}(u)\, T^{(\varepsilon)}(u|\kappa-1) \tag{4.25}
$$

$$
\mathcal{D}^{(\varepsilon)}_{\varkappa_0}(u) = a^{\varepsilon_c}_{\kappa}(u+N-2)^{-1}\, T^{(-\varepsilon)}(u+2|\kappa-1). \tag{4.26}
$$

Можно показать, что $a^{\varepsilon}_{\ell}(u) = a_{\ell}(u)$ для $\ell = 3,\dots,\kappa$.

Используя явный вид матриц $R^{(\varepsilon,\varepsilon')}(u)$ нетрудно доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 5. Матрицы $R^{\varepsilon,\varepsilon'}(u)$ и $R^{\varepsilon,\vartheta}(u)$ связаны следующим соотношением:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}^{\varepsilon,-\varepsilon_c,1}_{12} R^{\varepsilon,\varepsilon'}_{13}(u-2\kappa+2|\kappa) R^{(-\varepsilon_c,\varepsilon')}_{23}(u-2|\kappa)\, \mathcal{P}^{\varepsilon,-\varepsilon_c,1}_{12} = \\
&= (-1)^{\deg(f^{\varepsilon_c,\varepsilon'}_{\kappa})} \frac{f^{\varepsilon_c,\varepsilon'}_{\kappa}(2-u) f^{\varepsilon,\varepsilon'}_{\kappa}(u-2)}{u-2\kappa} R^{\vartheta,\varepsilon'}_{(12),3}(u-\kappa|\kappa).
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Введем семейство трансфер–матриц:

$$
t_{\pm}(u|\{w\}|\kappa) = \mathrm{tr}_a\left(R^{\vartheta,t}_{1a}(u-w_1-\kappa|\kappa)\dots R^{\vartheta,t}_{na}(u-w_n-\kappa|\kappa)\, T^{(\pm)}_a(u|\kappa)\right) \tag{4.28}
$$

При построении собственных векторов этих матриц можно пользоваться как элементами матрицы $T^{(+)}(u|\kappa)$, так и элементами $T^{(-)}(u|\kappa)$. Имеет место следующее соотношение:

$$
{}_{\kappa j}\mathcal{P}_{\kappa' j'}\, B^{(+)}_{\kappa' j'}(u) = {}_{\kappa j}\mathcal{P}_{\kappa' j'}\, B^{(-)}_{\kappa' j'}. \tag{4.29}
$$

Используя для собственных векторов $t_{\pm}$ анзац

$$B^{(\varepsilon_1)}_{i_1 j_1}(u^{(1)}_j)\dots B^{(\varepsilon_{n_1})}_{i_{n_1} j_{n_1}}(u^{(1)}_j)F_{i_1\dots i_{n_1},\, j_1\dots j_{n_1}} \tag{4.30}$$

получаем обобщение теоремы I:

ТЕОРЕМА 6. Вектор (4.30) будет собственным для $t_\pm(u)$ если вектор F будет собственным вектором матриц $t_+(u|\{u^{(1)}\}_{n_1}|\kappa-1)$ и $t_-(u|\{u^{(1)}\}_{n_1}|\kappa-1)$. Собственные значения $t_\pm(u|\{\tilde{w}\}_n|\kappa)$ связаны с собственными значениями $t_\pm(u|\{u^{(1)}\}_{n_1}|\kappa-1)$ соотношениями:

$$\Lambda_\varepsilon(u|\{\tilde{w}\}|\kappa)=a^\varepsilon_\kappa(u)\,\frac{P(u)}{P_1(u)}\,\Lambda_\varepsilon(u|\{u^{(1)}\}_{n_1}|\kappa-1)+$$

$$+\left(a_\kappa^{(-1)^\kappa\varepsilon c}(u+2\kappa-2)\right)^{-1}\frac{P(u-2)}{P_1(u)}\,\Lambda_{-\varepsilon}(u+2|\{u^{(1)}\}_{n_1}|\kappa-1),$$

$$\Lambda_\varepsilon(u|\{\tilde{w}\}|2)=a^\varepsilon_2(u)\,\frac{P(u)P^\varepsilon_1(u-2)}{P^\varepsilon_1(u)}+\left(a^\varepsilon_2(u+2)\right)^{-1}\,\frac{P(u-2)P^\varepsilon_1(u+2)}{P^\varepsilon_1(u)}\,, \tag{4.31}$$

$$P(u)=\prod_{j=1}^{n}(u-\tilde{w}_j),\quad P_1(u)=\prod_{j=1}^{n_1}(u-u^{(1)}_j).$$

Числа $u^{(1)}_j$ удовлетворяют системе уравнений

$$\operatorname*{res}_{u=u^{(1)}_j}\Lambda_\varepsilon(u|\{\tilde{w}\}|\kappa)=0\,. \tag{4.32}$$

Для доказательства этой теоремы нужно воспользоваться перестановочными соотношениями между $T^\varepsilon_{ij}(u|\kappa)$ и соотношениями (4.27), (4.29).

Рекуррентные соотношения (4.31) решаются явно и для $\Lambda_\varepsilon(u)$ имеем:

$$\Lambda_\varepsilon(u|\{\tilde{w}\}|\kappa)=\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_{\kappa-1}=\pm} b_{\sigma_1}(u|1)\,b_{\sigma_2}(u+1-\sigma_2|2)$$

$$\dots b_{\sigma_{\kappa-2}}\Big(u+\kappa-3-\sum_{i=1}^{\kappa-3}\sigma_i\Big|\kappa-2\Big)\,b_{\sigma_{\kappa-1}}\Big(u+\kappa-2-\sum_{i=1}^{\kappa-2}\sigma_i\Big|\varepsilon\sigma_1\dots\sigma_{\kappa-2}\Big), \tag{4.33}$$

где

$$b_+(u|\ell)=a_{\kappa-\ell+1}(u)\,\frac{P_{\ell-1}(u)}{P_\ell(u)}\,,$$

(4.34)

$$b_-(u|l) = a_{k-l+1}(u+2k-2l)^{-1}\,\frac{P_{l-1}(u-2)}{P_l(u)}\,,$$

(4.35)

при $l = 1,\ldots,k-2\,,\ u_j^{(0)} \equiv w_j$

$$b_+(u|\varepsilon) = a_2^{\varepsilon}(u)\,P_{k-2}(u)\,\frac{P_{k-1}^{\varepsilon}(u-2)}{P_{k-1}^{\varepsilon}(u)}\,, \tag{4.36}$$

$$b_-(u|\varepsilon) = (a_2^{\varepsilon}|u+2)^{-1}\,P_{k-2}(u-2)\,\frac{P_{k-1}^{\varepsilon}(u+2)}{P_{k-1}(u)}\,. \tag{4.37}$$

Система уравнений на числа $u_j^{(l)}$ имеет следующий вид:

$$\frac{a_k(u_j^{(1)})a_k(u_j^{(1)}+2k-2)}{a_{k-1}(u_j^{(1)})a_{k-1}(u_j^{(1)}+2k-4)} = -\,\frac{P_1(u_j^{(1)}+2)P_2(u_j^{(1)})P(u_j^{(1)}-2)}{P_1(u_j^{(1)}-2)P_2(u_j^{(1)}+2)P(u_j^{(1)})}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots \tag{4.38}$$

$$\frac{a_{k-l+1}(u_j^{(l)})a_{k-l-1}(u_j^{(l)}+2k-2l+1)}{a_{k-l}(u_j^{(l)})a_{k-l}(u_j^{(l)}+2k-2l-1)} = -\,\frac{P_l(u_j^{(l)}+2)P_{l+1}(u_j^{(l)})P_{l-1}(u_j^{(l)}-2)}{P_l(u_j^{(l)}-2)P_{l+1}(u_j^{(l)}+2)P_{l-1}(u_j^{(l)})}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_3(u_j^{(k-2)})a_3(u_j^{(k-2)}+5)}{\prod\limits_{\varepsilon=\pm}a_2^{\varepsilon}(u_j^{(k-2)})a_2^{\varepsilon}(u_j^{(k-2)}+3)} = -\,\frac{P_{k-2}(u_j^{(k-2)}+2)P_{k-3}(u_j^{(k-2)}-2)}{P_{k-2}(u_j^{(k-2)}-2)P_{k-3}(u_j^{(k-2)})}\prod_{\varepsilon}\frac{P_{k-1}^{\varepsilon}(u_j^{(k-2)})}{P_{k-1}^{\varepsilon}(u_j^{(k-2)}+2)}\,,$$

$$a_2^{\varepsilon}(u_j^{(k-1),\varepsilon})\,a_2^{\varepsilon}(u_j^{(k-1),\varepsilon}+3) = -\,\frac{P_{k-1}^{\varepsilon}(u_j^{(k-1),\varepsilon}+2)P_{k-2}(u_j^{(k-1),\varepsilon}-2)}{P_{k-1}^{\varepsilon}(u_j^{(k-1),\varepsilon}-2)P_{k-2}(u_j^{(k-1),\varepsilon})}\,.$$

§ 5. Заключение

В работе рассмотрены $SO(N)$ инвариантные R -матрицы в спинорном представлении. При $N = 2k+1$ с помощью fusion -процесса из спинорных трансфер-матриц получаются все конечномерные. При $N=2k$ для того чтобы вычислить собственные значения всех конечномерных трансфер-матриц по вспомогательному пространству нужно найти либо обе спинорные трансфер-матрицы, либо одну из спинорных и векторную.

Результаты работы легко обобщаются на тригонометрические R -матрицы, связанные с алгебрами Каца-Муди $C_n^{(1)}$, $\mathcal{D}_n^{(1)}$ найденные в работах [14, 15]. Отметим, что во вспомогательных пространствах квантовых матриц монодромии, для которых R -матрицы в G -инвариантных моделях имеют нужную для анзаца Бете структуру действуют представления группы G , связанные с эрмитовыми симметрическими пространствами. Это $U(n)/U(n-p)\times U(p)$, для $G=U(n)$ [6], $Sp(2n)/SU(n)\times SU(n)$ для $G=Sp(2n)$ [7], $SO(2n)/SU(n)\times SU(n)$ для $G=SO(2n)$ [8] и $SO(N)/S(O(N-2)\times O(2))$ для $G=SO(N)$. Интересно было бы объяснить эту закономерность.

Литература

1. Склянин Е.К., Фаддеев Л.Д., Тахтаджян Л.А. ТМФ, 1979, т.40, с.194-201.
2. Kulish P.P., Sklyanin E.K. - Lecture Notes in Physics, 1982, v.151, p.61-119.
3. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Успехи мат.наук, 1979, т.34, с.5-63.
4. Кулиш П.П., Решетихин Н.Ю. ЖЭТФ, 1981, т.80, № 1, с.214-225.
5. Тахтаджян Л.А. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1981, т.101, с.158-183.
6. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu. - J.Phys. A, 1983, v.16, N 16, p.L591-L596.
7. Решетихин Н.Ю. ТМФ , 1985, т.63, с.347-359.
8. de Vega H.J., Karowski M. - LPTHE-preprint 86/21, Paris (1986).
9. Бакстер Р. Точно-решенные модели в статистической механике. М.,1985.
10. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K. - Lett.Math.Phys., v.5, N 5, p.393-403.
11. Shankar R., Witten E. - Nucl.Phys., 1978, v v.B141, p.349-360.
12. Karowski M., Thun H.J. - Nucl.Phys., 1981, v.B190, p.61-82.
13. Korepin V.E. - Commun.Math.Phys., 1982, v.86, p.391-418.
14. Jimbo M. - RIMS preprint - 521 (1985).

15. B a z h a n o v V.V. - IFVE - preprint 85-18 (1985).
16. O g i e v e t s k y E., R e s h e t i k h i n N., W i e g m a n n P. - Nucl.Phys., 1987, v.B280, FS18 , p.45-89.
17. Б у р б а к и Н. Алгебры Ли. - М. "Мир", 1969.

N.Yu.Reshetikhin. Bethe-ansatz for SO(N)-invariant transfer-matrices.

The matrix version of algebraic Bethe ansatz is proposed for R-matrices with special structure. It is shown that SO(N)-invariant R-matrices acting in spinor representation of SO(N) have this structure. The eigenvalues of corresponding transfer-matrices are calculated.