К. К. Лаврентьев, Одна задача рассеяния нестационарных волн на одномерном препятствии, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1978, том 78, 134–137

К.К.Лаврентьев

ОДНА ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ОДНОМЕРНОМ ПРЕПЯТСТВИИ

I. В настоящей статье рассматривается вопрос о построении решения задачи рассеяния нестационарных волн на одномерном препятствии, которое описывается следующим граничным условием:

$$u\big|_{\rho\to 0} = a(z,t)\ln\frac{\rho}{2} + h\cdot a(z,t) + o(1)$$

$$\rho = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

где x_1, x_2, z - декартовы координаты в R^3, h - некоторая фиксированная постоянная. Аналогичная задача для более общего случая $h=h(z)$ рассматривалась в работах [I], [2] где для нее была доказана теорема существования и единственности решения и получено интегральное уравнение для нахождения ядра разрешающего оператора. Оказывается, что в случае $h=const$ решение может быть получено явно в виде разложения по собственным функциям некоторого самосопряженного оператора.

II. Пусть $u(x_1,x_2,z,t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = \Delta_3 u, \quad \rho\neq 0 \\ &u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x_1,x_2,z) \\ &u\big|_{\rho=0} = a(z,t)\ln\frac{\rho}{2} + h\,a(z,t) + o(1) \end{aligned} \tag{I}$$

Будем искать u в виде $u = u_1 + u_2$ где

$$\begin{aligned} &u_{1tt} = \Delta_3 u_1 \qquad \rho\neq 0 \\ &u_1\big|_{t=0} = 0 \qquad u_{1t}\big|_{t=0} = \psi_1(\rho,z) \\ &u_1\big|_{\rho\to 0} = a(z,t)\ln\frac{\rho}{2} + h\cdot a(z,t) + o(1) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &u_{2tt} = \Delta_3 u_2 \\ &u_2\big|_{t=0} = 0 \\ &u_{2t}\big|_{t=0} = \psi_2(\rho,\varphi,z) \end{aligned} \tag{3}$$

В (2), (3) ρ,φ,z - цилиндрические координаты, а для ψ_1 и ψ_2 справедливо:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi \, d\varphi$$

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi$$

функция U_2 определяется по формуле Пуассона и задача нахождения U сводится к определению U_1. Если $\Psi \in \mathcal{D}(A_h)$ (A_h см. [2]), то для (2) имеет место теорема существования и единственности решения. Найдем U_1. Для этого сделаем в (2) преобразование Фурье по z и перейдем к цилиндрической системе координат

$$\tilde{U}_{1_{tt}} = \tilde{U}_{1_{\rho\rho}} + \frac{1}{\rho}\tilde{U}_{1_\rho} - \kappa^2 \tilde{U}_1 \qquad \rho \neq 0$$

$$\tilde{U}_1\big|_{t=0} = 0 \qquad \tilde{U}_{1_t}\big|_{t=0} = \tilde{\Psi}_1(\rho,\kappa)$$

$$\tilde{U}_1\big|_{\rho\to 0} = \tilde{a}(\kappa,t)\ln\frac{\rho}{2} + h\cdot\tilde{a}(\kappa,t) + o(1)$$

Введем новую искомую функцию $\tilde{V} = \sqrt{\rho}\,\tilde{U}$, тогда

$$\tilde{V}_{tt} = \tilde{V}_{\rho\rho} + \frac{1}{4\rho^2}\tilde{V} - \kappa^2\tilde{V}$$

$$\tilde{V}\big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial\tilde{V}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sqrt{\rho}\;\tilde{\Psi}_1(\rho,\kappa) \tag{4}$$

$$\tilde{V}_{\rho\to 0} = \sqrt{\rho}\,\tilde{a}(\kappa,t)\ln\frac{\rho}{2} + \sqrt{\rho}\,h\tilde{a}(\kappa,t) + o(\sqrt{\rho})$$

Для $\tilde{V}$ справедливы следующие формулы разложения (см.[3]):

$$\tilde{V}(\rho,\kappa,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{ip'-\infty}^{ip'+\infty} + \int_{ip+\infty}^{ip-\infty}\right)\Phi(\rho,\kappa,t,\lambda)\,d\lambda$$

$$\Phi(\rho,\kappa,t,\lambda) = \int_0^\infty G(\rho,y,\lambda)\cdot\tilde{V}(y,\kappa,t)\,dy \tag{5}$$

где

$$G = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{\rho y}\,H_0^1(\rho\sqrt{\lambda})\left[cJ_0(y\sqrt{\lambda}) - Y_0(y\sqrt{\lambda}) + \frac{2}{\pi}J_0(y\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}\right]}{\left[1 + ic + \frac{2}{\pi}\ln\sqrt{\lambda}\right]} & y \leq \rho \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{\rho y}\left[cJ_0(\rho\sqrt{\lambda}) - Y(\rho\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\pi}J_0(\rho\sqrt{\lambda})\ln\sqrt{\lambda}\right]H_0^1(y\sqrt{\lambda})}{\left[1 + ic + \frac{2}{\pi}\ln\sqrt{\lambda}\right]} & y > \rho \end{cases} \tag{6}$$

C - некоторая постоянная. Функция $G(\rho,y,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$G_{\rho\rho}+(\lambda+\frac{1}{4\rho^2})G=-\delta(\rho-y)$$

Используя это и тот факт, что $\tilde{V}$ есть решение задачи (4), найдем, что Φ удовлетворяет уравнению:

$$\Phi_{tt}=-\kappa^2\Phi-\lambda\Phi-\tilde{V}-(G_y\tilde{V}-\tilde{V}_yG)\Big|_{y=0}^{y=\infty}$$

Выберем теперь $C=\frac{2}{\pi}(\gamma-h)$ (γ - постоянная Эйлера) тогда

$$(G\tilde{V}-\tilde{V}_yG)\Big|_{y=0}^{y=\infty}=0$$

и следовательно Φ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{tt}+(\kappa^2+\lambda)\Phi=-\tilde{V}\\
&\Phi\big|_{t=0}=0\\
&\Phi_t\big|_{t=0}=\int_0^\infty\tilde{\Psi}_1(y,\kappa)G(y,\rho,\lambda)\,dy.
\end{aligned}\tag{7}$$

Отсюда Φ легко определяется

$$\Phi=\frac{\sin(\sqrt{\kappa^2+\lambda}\,t_+)}{\sqrt{\kappa^2+\lambda}}\cdot\int_0^\infty\Psi_1G\,dy-\frac{\sin(\sqrt{\kappa^2+\lambda}\,t_+)}{\sqrt{\kappa^2+\lambda}}*\tilde{V}\tag{8}$$

В (8) свертка производится по t , а

$$t_+=\begin{cases}t & t\geq 0\\ 0 & t<0.\end{cases}$$

Окончательно используя (5) имеем:

$$\tilde{V}=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{ip'-\infty}^{ip'+\infty}+\int_{ip+\infty}^{ip-\infty}\right)\left(\frac{\sin(\sqrt{\kappa^2+\lambda}\,t_+)}{\sqrt{\kappa^2+\lambda}}\cdot\int_0^\infty\Psi_1G\,dy\right)d\lambda\tag{9}$$

Ш. (9) представляет из себя разложение искомого решения по собственным функциям самосопряженного расширения симметричного оператора порожденного дифференциальным выражением $-y''-\frac{y}{4\rho^2}$ для $\rho\in(0,\infty)$. Спектр этого самосопряженного расширения состоит из собственного значения $\lambda_0=-e^{-\pi e}$ и непрерывной части $\lambda\geq 0$ В силу этого A_h имеет помимо непрерывного спектра $\lambda\geq 0$

ветвь $\lambda = K^2 + \lambda_0$ $K \in [0, \infty)$ непрерывного двукратного спектра с собственными функциями $\theta_{1,2} \sim K_0(\rho e^{-\frac{\pi e}{2}}) e^{\pm ikz}$. Это означает, что вдоль препятствия могут распространяться волны экспоненциально убывающие при удалении от него.

Литература

1. Благовещенский А.С., Лаврентьев К.К. Трехмерный оператор Лапласа с граничным условием на оси. – Вестн.Ленингр.ун-та, 1977, № 1, с.9-15.
2. Благовещенский А.С., Лаврентьев К.К. Рассеяние нестационарных волн на одномерном препятствии. – Зап.научн.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1976, 62, с.48-51.
3. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.1."Наука", М., 1960, 278 с.

Lavrentjev K.K. A problem of dissipation of non-stationary waves on one-dimension obstacle.

The paper deals with the problem of dissipation of non-stationary waves on one-dimension obstacle in the case $h = const$.