Задачи M2316–M2325, Ф2323–Ф2332, *Квант*, 2013, номер 5, 12–14

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–6–2013» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2316» или «Ф2323». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2316, М2317а, М2318–М2320, М2321а,б, М2322, М2323а предлагались на заключительном этапе XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике, задачи М2324 и М2325а – на LIV Международной математической олимпиаде.

Задачи М2316–М2325, Ф2323–Ф2332

М2316. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.

П.Кожевников

М2317. а) Существует ли такое натуральное n, что число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$ для любых: а) ненулевых; б) ненулевых четных; в) нечетных цифр a и b? (Здесь через $\overline{x\ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, …, y.)

В.Сендеров

М2318. На окружности отметили n точек, разбивающие ее на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n новых точек, разбивающих окружность на n новых дуг. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)

И.Митрофанов

М2319. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?

С.Берлов

М2320. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c – центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC, CA, AB соответственно. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 – в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

Л.Емельянов, А.Полянский

М2321. Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, … – последовательность простых чисел в порядке возрастания. Пусть $P_k = 2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p_k$ – произведение первых k простых чисел, а $Q_k = 3\cdot5\cdot\ldots\cdot p_{k+1}$ – произведение первых k нечетных простых чисел. Найдите все натуральные $k > 1$ такие, что число: а) $P_k - 1$; б) $Q_k - 1$; в) $P_k + 1$ является точной (большей, чем первая) степенью натурального числа. г) При каких k число $Q_k + 1$ является степенью двойки?

В.Сендеров

М2322. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов, каждый в натуральное число рублей, так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать?

О.Подлипский

М2323. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая: а) незамкнутая; б*) замкнутая n-звенная несамопересекающаяся ломаная, что на каждой из n данных прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.

Фольклор

М2324. Пусть вневписанная окружность треугольника

ABC, лежащая напротив вершины A, касается стороны BC в точке A_1. Точки B_1 на стороне CA и C_1 на стороне AB определяются аналогичным образом с использованием вневписанных окружностей, лежащих напротив вершин B и C соответственно. Известно, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Вневписанной окружностью треугольника ABC, лежащей напротив вершины A, называется окружность, которая касается отрезка BC, продолжения стороны AB за точку B и продолжения стороны AC за точку C. Вневписанные окружности, лежащие напротив вершин B и C, определяются аналогично.

А.Полянский

М2325. Пусть $n \geq 3$ — целое число. Рассмотрим окружность и $n + 1$ точек на ней, разбивающих ее на равные дуги. Рассмотрим все способы пометить эти точки числами 0, 1, … , n так, что каждое число использовано ровно один раз. Два способа, отличающихся поворотом, считаются одинаковыми. Способ пометки называется *красивым,* если для любых четырех меток $a < b < c < d$ таких, что $a + d = b + c$, хорда, соединяющая точки с метками a и d, не пересекает хорду, соединяющую точки с метками b и c.

Пусть M — количество красивых способов пометки. Пусть N — количество упорядоченных пар (x,y) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $x + y \leq n$ и НОД$(x,y) = 1$. Докажите, что $M = N + 1$.

А.Голованов, М.Иванов

Рис. 1

Ф2323. В точке A – середине дна стакана с вертикальными стенками – находится тяжелый шарик (рис.1). С какой по величине и направлению скоростью надо выстрелить шарик так, чтобы, ударившись n раз о стенки, он вернулся в исходное положение? Какое время понадобится на такое движение? Ширину стакана считать равной $2l$, столкновения шарика со стенками – абсолютно упругими.

А.Буров

Ф2324*. Тонкостенная труба с жесткими стенками, поперечным круглым сечением $S = 10$ см^2 и длиной L = 1 м закрыта плоской тонкой заслонкой снизу и открыта сверху. Эту трубу, удерживая слегка отклоненной от вертикального положения, опустили в воду озера так, что ее верхний конец оказался чуть выше уровня воды в озере. После этого отверстие очень быстро открыли. Заслонка двигалась поступательно в направлении, перпендикулярном оси трубы. На какую максимальную высоту над уровнем воды в озере выплеснется вода из трубы? Рассмотрите два случая: а) сечение трубы при приближении к нижнему концу плавно возрастает от величины S за счет раструба на отрезке, сравнимом по длине с диаметром внутреннего сечения; б) сечение постоянно и равно S вплоть до самого нижнего конца трубы. Во втором случае эффективное сечение потока на входе воды в трубу меньше полного геометрического сечения: $S_{\text{эфф}}/S = k_{\text{эфф}} = 0{,}5$.

В.Озеров

Ф2325. Три одинаковые массы (например, равные единице) закреплены в вершинах правильного треугольника со стороной a. В скольких положениях равновесия может находиться пробная точка массой m под действием ньютоновского притяжения со стороны масс, сосредоточенных в вершинах треугольника?

В.Никонов

Ф2326. Небо над Африкой закрыто облаками. Большая лужа глубиной 0,5 м заполнена мутной темной водой (в воде присутствует взвесь черной глины – слоны постарались) с температурой $+25$ °C, равной температуре воздуха над лужей. Если погрузить в воду влагозащищенный люксметр, обратив его чувствительный элемент вверх, то он показывает, что на глубине 10 см свет в 2,72 раза слабее, чем возле самой поверхности, на глубине 20 см – слабее еще в 2,72 раза и т.д. В некоторый момент Солнце перешло в зенит и облака раскрылись. Поток излучения Солнца, достигший поверхности лужи, равен $E = 1000$ Вт/м^2. Какой через 1 минуту после начала освещения будет температура воды в этой луже на глубине 5 см и какой она будет на глубине 40 см?

А.Светлов

Ф2327. Три маленьких шарика расположены вдоль оси координат x в космосе. Вокруг больше ничего нет, гравитационными силами взаимодействия можно пренебречь по сравнению с электрическими. Скорости всех шариков в начальный момент равны нулю; координаты шариков x, $2x$, $4x$; заряды шариков q, $4q$, $9q$; массы шариков m, $3m$, $2m$ соответственно. Какими будут скорости шариков через очень большое время?

А.Зильберман

Ф2328. Идеальная батарейка, амперметр и вольтметр соединены последовательно в замкнутую цепь. Показания приборов равны 1А и 10 В соответственно. Если параллельно амперметру подключить резистор с неким неизвестным сопротивлением, то показание амперметра станет 0,9 А, а показание вольтметра будет 10,2 В. Какова ЭДС батарейки? Каковы внутренние сопротивления приборов? Каково это «неизвестное сопротивление»?

А.Зильберман

Ф2329. Выпрямитель сетевого напряжения (220 В, 50 Гц) представляет собой последовательно соединенные резистор сопротивлением 0,5 кОм и полупроводниковый диод, выдерживающий прямой ток 1 А и обратное напряжение 400 В. Конденсатор емкостью 0,001 Ф сначала подключили к выпрямителю и дождались максимальной зарядки (рис. 2). Затем контакт ключа перекинули,

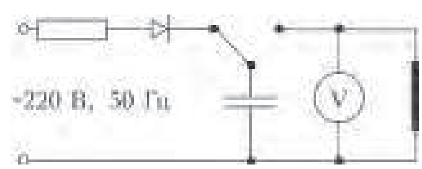

Рис. 2

и обкладки конденсатора оказались подключенными к медной проволочке длиной $L = 4{,}7$ см с поперечным сечением $S = 10^{-2}$ мм^2. Проволочка находится в воздухе при комнатной температуре $t_0 = 20\ ^\circ$C. Что будет показывать идеальный вольтметр через 10 с после подключения проволочки? Необходимые для решения задачи дополнительные данные найдите самостоятельно. При реальном проведении такого эксперимента для безопасности рекомендуется проволочку поместить между листами бумаги. Считайте, что молярная теплоемкость меди (и твердой, и жидкой) не меняется с температурой и равна $3R = 25$ Дж/(моль·К).

А.Тарчевский

Ф2330*. Длинный ($L = 10$ м) соленоид представляет собой намотанную в один слой на цилиндрический каркас диаметром $D = 0{,}1$ м проволоку прямоугольного сечения с размером сечения $a \times a$ ($a = 0{,}1$ мм). Поверхность проволоки покрыта тонким слоем непроводящего ток лака. Выполняются такие соотношения: $L \gg D \gg a$. Витки проволоки расположены вплотную друг к другу. Концы проволоки выведены перпендикулярно оси симметрии соленоида и далеко-далеко от соленоида подключены к батарейке. По проволоке течет ток I. Вблизи центра соленоида на его внешней поверхности сидит маленький жук. У жука есть совсем маленький компас, и он ползет все время в направлении вектора индукции магнитного поля. Какова форма траектории движения жука по соленоиду? Считая, что длина пути жука от точки старта составила $s = 1$ м, найдите величину перемещения жука.

С.Жуков

Ф2331. Граница раздела областей пространства, в одной из которых есть однородное магнитное поле с индукцией $B = 10$ Тл, а в другой магнитного поля нет, представляет собой плоскость. Естественно, что вектор $\vec{B}$ параллелен этой границе раздела. Из области, где поля нет, в область с магнитным полем влетает электрон с зарядом e. Его скорость в момент пересечения границы перпендикулярна вектору $\vec{B}$, составляет угол α с плоскостью границы раздела и величина скорости много меньше скорости света. Движущийся в магнитном поле с ускорением a электрон излучает, и мощность электромагнитных волн – так называемого синхротронного излучения – пропорциональна квадрату произведения величины заряда на величину ускорения, деленного на скорость света: $W = \delta (ea/c)^2$. Коэффициент пропорциональности обозначен символом δ, он имеет размерность электрического сопротивления и равен $\delta = 20$ Ом. При каком значении угла α электрон не покинет область с магнитным полем?

Для справки: в Международной системе единиц (СИ) мощность излучения заряда q, движущегося с ускорением a, равна

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2q^2}{3c^3}.$$

Д.Сергеев

Ф2332. Центр квадрата со стороной 1 см находится на главной оптической оси тонкой линзы. Действительное изображение квадрата, которое создает линза, – это трапеция, параллельные стороны которой перпендикулярны главной оптической оси линзы, пересекают ее и имеют длины 2 см и 3 см. Каково расстояние между этими сторонами трапеции?

Е.Кузнецов

Решения задач М2301–М2308, Ф2308–Ф2314

М2301. *Дана числовая последовательность 1, −2, −3, 4, 5, 6, −7, −8, −9, −10, 11, 12, 13, 14, 15, −16, … (эта последовательность получается из последовательности 1, 2, 3, 4, … расстановкой знаков: одно число со знаком «+», затем два числа со знаком «−» три числа со знаком «+», четыре числа со знаком «−», и т.д.). Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что сумма первых n членов этой последовательности равна 0.*

Разделим числа данной последовательности на группы: (1, −2, −3, 4); (5, 6, −7, −8, −9, −10, 11, 12); (13, 14, 15, −16, −17, −18, −19, −20, −21, 22, 23, 24); … Здесь k-я группа устроена так: берем $4k$ последовательных натуральных чисел и у средних $2k$ чисел меняем знак с «+» на «−». Таким образом, в одной группе среднее арифметическое средних $2k$ чисел противоположно среднему арифметическому крайних $2k$ чисел, а значит, сумма всех чисел в одной группе равна 0.
Это означает, что для любого n вида $4(1 + 2 + \ldots + k) = 2k(k+1)$ сумма первых n членов этой последовательности равна 0.
Нетрудно убедиться, что кроме найденных n других значений n, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

В.Расторгуев

М2302. *Внутри угла AOD проведены лучи OB и OC, причем $\angle AOB = \angle COD$. В углы AOB и COD вписаны непересекающиеся окружности. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных к этим окружностям лежит на биссектрисе угла AOD.*

Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, R_1 и R_2 – их радиусы, а L – точка пересечения касательных (см. рисунок). Заметим, что L лежит на отрезке O_1O_2. Так как $\angle AOB = \angle COD$, то достаточно показать, что OL – биссектриса угла O_1OO_2. Поскольку окружности гомотетичны с центром L, то $\frac{O_1L}{O_2L} = \frac{R_1}{R_2}$. С другой стороны, из подобия прямоугольных треугольников OO_1K_1 и OO_2K_2 (где K_1 и K_2 – точки касания окруж-