М. А. Шубин, О некоторых свойствах псевдодифференциальных операторов с негладкими символами,
Докл. АН СССР, 1972, том 207, номер 3, 551–553

https://www.mathnet.ru/dan37277

Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 3

УДК 517.948.35 МАТЕМАТИКА

М. А. ШУБИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 IV 1972)

В этой работе рассматриваются псевдодифференциальные операторы в $\mathbf{R}^n$, заданные вейлевским символом. Обычные условия гладкости, налагаемые на символ, заменены здесь некоторым не использованным ранее условием, означающим, что символ мало отличается на бесконечности от своего усреднения.

1. Пусть $a(x, \xi)$ — измеримая комплекснозначная функция на $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$. Такой функции мы будем сопоставлять оператор $\hat{a}$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$ (вообще говоря, неограниченный) по формуле

$$(\hat{a}u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i\langle x-y, \xi\rangle} u(y)\, dy\, d\xi.$$

В этом случае говорят, что $a(x, \xi)$ есть вейлевский или симметричный символ оператора $\hat{a}$.

Введем оператор G гауссовского усреднения символов:

$$(Ga)(x, \xi) = \frac{2^n}{\pi^n}\int e^{-2[(x-x')^2+(\xi-\xi')^2]} a(x', \xi')\, dx'\, d\xi'.$$

Будем в дальнейшем рассматривать символы $a(x, \xi)$, удовлетворяющие одному из трех следующих ограничений:

$$|a(x, \xi)| < M, \quad (x, \xi) \in \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n; \tag{1}$$

$$a(x, \xi) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| + |\xi| \to +\infty; \tag{2}$$

существует такое целое $N \geqslant 0$, что

$$[(1-G)^N a] \in L^2(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (3).

Тогда оператор $\hat{a}$ ограничен в $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Обратно, если оператор $\hat{a}$ ограничен, то его символ $a(x, \xi)$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничена функция $(1-G)^N a$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (3).

Тогда оператор $\hat{a}$ вполне непрерывен в $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Обратно, если $\hat{a}$ вполне непрерывен, то условие (2) *выполняется для $a(x, \xi)$ тогда и только тогда, когда оно выполняется для $(1-G)^N a$.*

Теорема 3. *Если выполнено условие* (1), *то оператор $\hat{a}$ ограничен тогда и только тогда, когда при некотором целом $N \geqslant 0$ ограничен оператор с вейлевским символом $(1-G)^N a$.*

Теорема 4. *Если выполнено условие* (2), *то оператор* $\hat{a}$ *вполне непрерывен тогда и только тогда, когда при некотором целом* $N \geqslant 0$ *вполне непрерывен оператор с вейлевским символом* $(1-G)^N a$.

2. Доказательство теорем 1 — 4. Мы выведем теоремы 1 — 4 из результатов Ф. А. Березина о виковских и антивиковских символах операторов (см. ([1])), а также из принадлежащего В. Л. Ройтбурду ([2]) замечания о связи этих символов с символом Вейля. Это замечание состоит в том, что оператор с антивиковским символом $a(x, \xi)$ имеет символ Вейля, равный $(Ga)(x, \xi)$, а оператор с символом Вейля $a(x, \xi)$ имеет виковский символ $(Ga)(x, \xi)$. Из свойств антивиковского и виковского символов мы будем использовать следующие (см. ([1])):

если антивиковский символ ограничен, то и оператор ограничен;

если антивиковский символ стремится к 0 при $|x|+|\xi| \to +\infty$, то оператор вполне непрерывен;

если оператор ограничен, то его виковский символ ограничен;

если оператор вполне непрерывен, то его виковский символ стремится к 0 при $|x|+|\xi| \to +\infty$.

Наконец, нам понадобится тот факт, что норма Гильберта — Шмидта оператора с вейлевским символом $a(x, \xi)$ равна норме функции $a(x, \xi)$ в $L^2(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n)$ (см., например, ([3])).

Перейдем к доказательству теорем 1 — 4. Заметим, что из (1) вытекает, что оператор с антивиковским символом $a(x, \xi)$ или, что то же самое, с вейлевским символом $(Ga)(x, \xi)$ ограничен. Поэтому оператор $\hat{a}$ ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор с вейлевским символом $(1-G)a$. Повторяя это рассуждение, мы получим, что при условии (1) ограниченность $\hat{a}$ равносильна ограниченности оператора с вейлевским символом $(1-G)^N a$. Теорема 3 доказана. Аналогично доказывается теорема 4.

Пусть теперь выполнено условие (3). Это условие означает, что оператор с вейлевским символом $(1-G)^N a$ является оператором Гильберта — Шмидта, а значит, ограничен и вполне непрерывен. Поэтому, если дополнительно выполнено условие (1), то $\hat{a}$ ограничен в силу теоремы 3. Пусть, наоборот, оператор $\hat{a}$ ограничен. Тогда его виковский символ Ga ограничен. Аналогично, если оператор $\hat{a}$ вполне непрерывен, то $(Ga)(x, \xi)$ стремится к 0 при $|x|+|\xi| \to +\infty$. Поэтому разность $a-(1-G)^N a$ ограничена (соответственно стремится к 0). Отсюда уже вытекают теоремы 1 и 2.

3. Обозначим через G_ρ^m (m — действительное число, $\rho > 0$) класс символов $a(x, \xi)$, удовлетворяющих оценкам

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|\xi|)^{m-\rho(|\alpha|+|\beta|)};$$

этот класс был введен и изучен в работе ([4]).

Предложение 1. *Если* $a \in G_\rho^m$, *то* $(1-G)^N a \in G_\rho^{m-N\rho}$.

Доказательство. Достаточно, разумеется, проверить, что $(1-G)a \in G_\rho^{m-\rho}$. Введем обозначение $y=(x, \xi)$. Тогда имеем

$$[(1-G)a](y) = \frac{2^n}{\pi^n}\int e^{-2|y-y'|^2}[a(y)-a(y')]\,dy';$$

$$[\partial_y^\gamma(1-G)](y) = \frac{2^n}{\pi^n}\int [\partial_y^\gamma e^{-2|y-y'|^2}][a(y)-a(y')]\,dy' +$$

$$+\frac{2^n}{\pi^n}\int e^{-2|y-y'|^2}\partial_y^\gamma a(y)\,dy' = \frac{2^n}{\pi^n}\int e^{-2|y-y'|^2}[(\partial^\gamma a)(y)-(\partial^\gamma a)(y')]\,dy = I$$

(здесь использован тот факт, что $\partial_y^\gamma e^{-2|y-y'|^2} = (-1)^{|\gamma|}\partial_{y'}^\gamma e^{-2|y-y'|^2}$ и произведено интегрирование по частям).

Разобьем интеграл I в сумму двух: $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{|y-y'|\leqslant|y|/2} \ldots dy', \quad I_2 = \int\limits_{|y-y'|>|y|/2} \ldots dy'$$

(подынтегральная функция в I_1 и I_2 одна и та же и равна подынтегральной функции в интеграле I).

Заметим, что для I_2 в силу быстрого убывания экспоненты выполнена оценка

$$|I_2(y)| \leqslant C_N(1 + |y|)^{-N}, \qquad N \text{ любое.}$$

Оценим I_1:

$$|I_1| \leqslant \frac{2^n}{\pi^n} \int\limits_{|y-y'|\leqslant|y|/2} e^{-2|y-y'|^2} |(\partial^\gamma a)(y) - (\partial^\gamma a)(y')| dy' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^n}{\pi^n} \int\limits_{|y-y'|\leqslant|y|/2} e^{-2|y-y'|^2} \sum_{j=1}^{2n} |\partial^{\gamma+e_j} a(y + \theta_j(y, y')(y' - y))| dy',$$

где $0 \leqslant \theta_j(y, y') \leqslant 1$, $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица на j-м месте). Заметим теперь, что из $|y - y'| \leqslant {}^1/_2|y|$ вытекает

$${}^1/_2|y| \leqslant |y + \theta_j(y, y')(y' - y)| \leqslant {}^3/_2|y|.$$

Поэтому

$$|I_1| \leqslant \frac{2^n}{\pi^n} \int\limits_{|y-y'|\leqslant|y|/2} e^{-2|y-y'|^2} C_\gamma (1 + |y|)^{m-\rho(|\gamma|+1)} dy' \leqslant C_\gamma (1 + |y|)^{m-\rho(|\gamma|+1)},$$

что и требовалось. Предложение 1 доказано.

Предложение 1 показывает, что к символам класса G_ρ^m применима вся изложенная теория. В частности, оператор с вейлевским символом класса G_ρ^m ограничен тогда и только тогда, когда ограничен его символ, и вполне непрерывен тогда и только тогда, когда символ стремится к 0 при $|x| + |\xi| \to \infty$. Разумеется, это может быть доказано обычными методами теории псевдодифференциальных операторов. В доказательстве предложения 1 имеется очевидная аналогия с обычным доказательством ограниченности Кона и Ниренберга (см. ([5])). Мы привели здесь это рассуждение, чтобы показать, каким образом оценки производных символа связаны с требованием (3).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. А. Березин, Матем. сборн., 86, № 4, 578 (1971). [2] В. Л. Ройтбурд, ДАН, 201, № 3, 545 (1971). [3] Ф. А. Березин, Тр. Московск. матем. общ., 17, 117 (1967). [4] М. А. Шубин, ДАН, 196, № 2, 316 (1971). [5] Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг, в сборн. Псевдодифференциальные операторы, М., 1967, стр. 9.