A. I. Pluta, V. Ya. Stetsenko, The summary to article «about one variant of method Zeidel», *Mat. Model.*, 2003, Volume 15, Number 12, 29–36

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2003г., том 15, номер 12, стр. 29-36

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА ЗЕЙДЕЛЯ

© *А.И. Плюта, В.Я. Стеценко*

Ставропольский Государственный Университет

В статье предлагается один из вариантов решения систем линейных алгебраических уравнений методами Зейделя различных порядков и ускорения сходимости. При этом предлагаются методы построения двух последовательностей u_n и v_n, а также их «уточнений» u_n^* и v_n^*, которые являются последовательностями, более быстро сходящимися к искомому решению уравнения. Рассматриваются численные примеры реализации варианта метода Зейделя «порядка ноль» и «порядка один». По предлагаемому методу составлена программа на языке программирования TURBO PASCAL.

THE SUMMARY TO ARTICLE « ABOUT ONE VARIANT OF METHOD ZEIDEL ».

A.I. Pluta, V.Ya. Stetsenko

In article one of variants of the decision of systems of the linear algebraic equations is offered by methods Zeidel of various orders and acceleration of convergence. Thus methods of construction of two sequences u_n, v_n, and also their "specifications" u_n^* and v_n^* which are the sequences more quickly converging to the required decision of the equation are offered. Numerical examples of realization of a variant of method Zeidel « the order a zero » and « the order one » are considered. On an offered method the program in programming language TURBO PASCAL is made.

Балансовая модель производства является одной из наиболее простых математических моделей. Она записывается в виде системы уравнений, каждое из которых выражает требование равенства (баланса) между количеством продукции, производимой отдельным экономическим объектом, и совокупной потребностью в этом продукте. Балансовые модели основываются на понятии межотраслевого баланса, который представляет собой таблицу, характеризующую связи между отраслями (экономическими объектами) экономической системы. В настоящее время большое число работ посвящается этой модели и ее применению для решения различных задач. Такой интерес к балансовой модели определяется тем, что, оказалось, эта модель хорошо отражает многие существенные особенности современного производства и в то же время легко поддается расчету. Во многих странах мира балансовый метод используется для экономического анализа, планирования и прогнозирования.

Система балансовых уравнений может быть записана в матричной форме в виде следующего уравнения:

$$x=Ax+f.$$

Существуют различные численные методы решения данного уравнения. Ниже будет предложен вариант численного метода решения данного уравнения.

В данной статье используется терминология монографии [3], в частности понятие конуса и связанного с ним понятия полуупорядоченности пространства, монотонности и др.

Для того чтобы изложить суть предлагаемого варианта численного метода необходимо подробней остановиться на методе Зейделя и методе ускорения сходимости приближений.

Одна из возможных интерпретаций метода Зейделя, изложенная в [1], решения линейных алгебраических систем и более общих операторных уравнений, заключается в следующем. Если требуется решить уравнение вида

$$x = Ax + f, \tag{1}$$

где x – неизвестный элемент некоторого банахова пространства E, f – заданный элемент из E, A – линейный оператор, действующий в E, то при условии, что

$$A=A_1+A_2$$

и в предположении, что существует обратный оператор к оператору $(I-A_1)$, уравнение (1), можно переписать в эквивалентном виде

$$x = (I - A_1)^{-1} \cdot A_2 x + (I - A_1)^{-1} \cdot f, \tag{2}$$

после чего к полученному уравнению применить метод последовательных приближений

$$x_{m+1} = (I - A_1)^{-1} A_2 x_m + (I - A_1)^{-1} f \qquad (m = 1,2,\ldots),$$

который можно также записать в виде

$$y_{m+1} = A_1 y_{m+1} + A_2 y_m + f \qquad (m = 1,2,\ldots), \tag{3}$$

Т.е. по сути, применять метод последовательных приближений для решения операторного уравнения вида

$$x = Dx + h, \tag{4}$$

где $D = (I - A_1)^{-1} \cdot A_2$, $h = (I - A_1)^{-1} \cdot f$.

Именно такую интерпретацию допускает классический метод Зейделя решения линейных систем алгебраических уравнений. Для того, чтобы этот метод был реализуем, достаточно, чтобы число $\lambda=1$ не являлось точкой спектра оператора A_1, а для этого, в частности, достаточно, чтобы спектральный радиус $r(A_1)$ оператора A_1 удовлетворял неравенству

$$r(A_1)<1. \tag{5}$$

При этом для определенных классов операторов A такое преобразование уравнения (1) (а именно, переход от уравнения (1) к вспомогательному и эквивалентному уравнению (2)) обладает следующей полезной особенностью: спектральный радиус оператора $(I - A_1)^{-1} A_2$, как было установлено в [2], в уравнении (2) не больше, и, как правило, меньше спектрального радиуса $r(A)$ оператора A в исходном уравнении (1). А это, в частности, обеспечивает, вообще говоря, более быструю сходимость последовательности $\{y_m\}$ к единственному решению x^* уравнения (1) метода Зейделя (3) по сравнению с обычным методом последовательных приближений

$$x_{m+1} = (A_1 + A_2)x_m + f \qquad (m = 0,1,\ldots).$$

Более того, в этом случае удается получить явные оценки для эффекта ускорения сходимости метода Зейделя по сравнению с обычным методом последовательных приближений и указать другие алгоритмы построения еще более быстро сходящихся приближений к неизвестному решению x^*.

Рассмотрим уравнение (1) с матричным оператором A. В [2] было установлено, что для уравнения (1) при условии (5), метод Зейделя монотонно зависит от выбора матрицы A_1, а именно, с возрастанием количества ненулевых элементов матрицы A_1 скорость сходимости метода (3) возрастает, точнее говоря не уменьшается. Это можно интерпретировать следующим образом: чем большую часть A_1 матрицы A мы оставляем в обращаемой части $(I-A_1)^{-1}$ уравнения, тем быстрее приближения, полученные по методу Зейделя (3), сходятся к решению x^*. Уместно, однако, сразу заметить при этом, что с «возрастанием» «доли» A_1, вообще говоря, усложняется процедура определения приближений по методу Зейделя, эта процедура будет самой простой, если в качестве A_1 брать «нижнюю» треугольную часть матрицы A, т.е. полагать

$$y_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j^{(m+1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} y_j^{(m)} + f_i \qquad \left(i=\overline{1,n}\right) \tag{6}$$

что как раз соответствует классической схеме метода Зейделя. Если же «присоединить» к матрице A_1 еще и главную диагональ, то в этом случае метод Зейделя примет несколько нетрадиционный вид:

$$y_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} y_j^{(m+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j^{(m)} + f_i \qquad \left(i=\overline{1,n}\right) \tag{7}$$

т.е. примет вид неявной схемы, при которой для определения $(m+1)$-го приближения по компоненте с номером i, т.е. при определении $y_i^{(m+1)}$ нам придется решать для каждого i одно скалярное уравнение с неизвестным $y_i^{(m+1)}$. Этот метод назовем *методом Зейделя первого порядка.*

Аналогичным образом определяются методы Зейделя второго и более высоких порядков. Тем самым, чем «большая» часть матрицы A будет включаться в A_1, тем сложнее будет фактически реализация метода Зейделя, т.к. с «ростом» матрицы A_1 возрастает порядок системы уравнений, которую приходится решать для определения каждого следующего приближения, и соответственно, усложняется схема реализации метода Зейделя.

В классической схеме метода Зейделя порядок соответствующей системы фактически равен нулю.

Понятно, что применение неявных схем требует решения вспомогательных систем линейных уравнений. Количество неизвестных в этих системах прямо зависит от «порядка» метода Зейделя. Оно тем больше, чем выше «порядок». В любом случае при применении метода Зейделя «невысокого порядка», «порядок» соответствующей системы, вообще говоря, меньше числа k – порядка исходной системы линейных алгебраических уравнений, и потому применение соответствующей схемы является более простым, нежели решение исходной системы n уравнений с n неизвестными.

Итак, метод Зейделя осложняется в реализации с «ростом» матрицы A_1, и потому, естественно, на эту более сложную схему метода Зейделя имеет смысл идти лишь в том случае, если при этом улучшается скорость сходимости. Оказывается, что именно так и обстоит дело, что следует из теоремы, доказанной в [2] и приведенной в монографии [3].

Теорема 1. *Пусть* $A \geq \theta$, $r(A)<1$, *и оператор* A_1 *переводит каждый внутренний элемент конуса* R_+^n *неотрицательных векторов пространства* R^n *во внутренний элемент. Тогда имеет место неравенство*

$$r[(I-A_1)^{-1}A_2]<r(A).$$

На основании теоремы имеет место

С л е д с т в и е. *В условиях теоремы* 1 *метод Зейделя сходится быстрее, чем метод последовательных приближений, а метод* (7) *сходится, вообще говоря, быстрее, чем метод* (6).

Суть излагаемого в данной статье варианта метода Зейделя, для построения приближений, сходящихся к точному решению операторного уравнения, состоит в том, что к полученному уравнению (4) предлагается применить метод ускорения сходимости приближений, описанный в [3]. Изложим суть применяемого метода.

Рассмотрим операторное уравнение вида (4). Предположим, что спектральный радиус $\rho(D) < 1$; поэтому уравнение (4) имеет единственное решение x^*, которое является пределом последовательных приближений

$$x_{n+1} = Dx_n + h \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

при любом начальном приближении $x_0 \in E$. Допустим, что начальное приближение $x_0=u_0$ выбрано так, что

$$u_0 \le Du_0+h. \tag{8}$$

Тогда последовательные приближения

$$u_{n+1}=Du_n+h \tag{9}$$

будут удовлетворять соотношениям

$$u_0 \le u_1 \le \ldots \le u_n \le u_{n+1} \le \ldots \le x^*. \tag{10}$$

Аналогично, если начальное приближение $x_0 = v_0$ удовлетворяет соотношению

$$v_0 \ge Dv_0 + h, \tag{11}$$

то последовательные приближения

$$v_{n+1} = Dv_n + h \tag{12}$$

удовлетворяют соотношениям

$$x^* \le \ldots \le v_{n+1} \le v_n \le \ldots \le v_1 \le v_0. \tag{13}$$

Таким образом, если удается найти элементы u_0 и v_0, удовлетворяющие соответственно соотношениям (8) и (11), то мы получаем монотонные приближения к точному решению x^* операторного уравнения (4). Наличие двусторонних монотонных приближений дает одновременно оценку погрешности: если приближенным значением решения x^* считать элемент $(u_n + v_n)/2$, то из (10) и (13) вытекает оценка

$$-\frac{1}{2}(v_n - u_n) \le \frac{1}{2}(u_n + v_n) - x^* \le \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

Основную трудность составляет отыскание начальных приближений u_0 и v_0. В [3] указан алгоритм отыскания таких начальных приближений. Изложим его суть.

Пусть z_0 – внутренняя точка конуса K. Если $\rho(D) < 1$, то обязательно найдется номер r, такой, что для данного вектора z_0 обязательно будет выполнено неравенство

$$D^r z_0 \le \chi z_0,$$

где $\chi < 1$. Тогда элемент

$$z_1 = \chi^{1-\frac{1}{r}} z_0 + \chi^{1-\frac{2}{r}} Dz_0 + \ldots + D^{r-1} z_0$$

удовлетворяет неравенству

$$Dz_1 \le \chi^{\frac{1}{r}} z_1. \tag{14}$$

Не ограничивая общности можно считать, что z_1 является внутренним элементом конуса K. Поэтому для некоторого вещественного $b>0$ будет выполнено следующее неравенство:

$$-b(1-\chi^{\frac{1}{r}})z_1 \le h \le b(1-\chi^{\frac{1}{r}})z_1. \tag{15}$$

Положим тогда

$$u_0 = -bz_1, \qquad v_0 = bz_1.$$

Эти элементы удовлетворяют соотношениям (8) и (11). Действительно, в силу (14)

$$Du_0 + h = -b \cdot Dz_1 + h \ge -b\chi^{1/r} z_1 + h,$$

и (8) вытекает из левой части неравенств (15).

Аналогично

$$Dv_0 + h = b \cdot Dz_1 + h \le b \cdot \chi^{\frac{1}{r}} z_1 + h \le b \cdot \chi^{\frac{1}{r}} z_1 + b(1-\chi^{\frac{1}{r}})z_1 = v_0.$$

Конечно, в различных частных случаях элементы u_0 и v_0 можно выбирать более простым способом. Например, если $h \in K$, то в качестве u_0, конечно, нужно выбирать элемент h.

Пусть u_0 и v_0 удовлетворяют соответственно соотношениям (8) и (11). Будем считать дополнительно, что выполнены неравенства

$$u_1 - u_0 \ge p_1(v_0 - v_1), \quad v_0 - v_1 \ge q_1(u_1 - u_0), \tag{16}$$

где одно из чисел p_1 и q_1 положительно (при $p_1 = q_1 = 0$ эти неравенства совпадают с (8) и (11)). Определим тогда элементы

$$u_1^* = \frac{u_1 + p_1 v_1}{1 + p_1}, \tag{17}$$

$$v_1^* = \frac{v_1 + q_1 u_1}{1 + q_1}. \tag{18}$$

Т е о р е м а 2. *Справедливы соотношения*

$$u_1 \le u_1^* \le x^* \le v_1^* \le v_1. \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Крайние неравенства в (19) вытекают непосредственно из (17), (18) и из неравенства $Du_0 + h \le Dv_0 + h$. Очевидно,

$$Du_1^* + h - u_1^* = \frac{1}{1+p_1}\left[D(Du_0 + h - u_0) + p_1 D(Dv_0 + h - v_0)\right]$$

и в силу (16)

$$Du_1^* + h - u_1^* \geq \theta .$$

Это значит, что элемент u_1^* удовлетворяет условию (8). Как нам уже известно, из этого условия вытекает, что $u_1^* \leq x^*$.

Аналогично

$$v_1^* - \left(Dv_1^* + h\right) = \frac{1}{1+q_1}\left[D(v_0 - Dv_0 - h) + q_1 D(u_0 - Du_0 - h)\right] \geq \theta.$$

Значит, v_1^* удовлетворяет (11), и поэтому $v_1^* \geq x^*$.

Теорема доказана.

Формулы (17) и (18) можно рассматривать как рекуррентный процесс построения последовательностей u_n^*, v_n^*. Теорема 2 означает, что этот рекуррентный процесс сходится не медленнее последовательностей (9) и (12) и сохраняет монотонность последовательных приближений.

Многочисленные примеры показывают, что в достаточно общих условиях процесс (17) и (18) сходится существенно быстрее обычного метода последовательных приближений.

Рассмотрим реализацию предложенного варианта метода Зейделя на конкретных примерах.

Пример. Пусть дано уравнение вида (1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.31 & 0.14 & 0.21 & 0.15 \\ 0.18 & 0.36 & 0.17 & 0.15 & 0.14 \\ 0.19 & 0.16 & 0.21 & 0.25 & 0.18 \\ 0.27 & 0.14 & 0.12 & 0.13 & 0.24 \\ 0.33 & 0.22 & 0.21 & 0.2 & 0.19 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Здесь точное решение уравнения $x^* = \begin{pmatrix} 454.9612529 \\ 474.9256427 \\ 468.4250761 \\ 433.8284457 \\ 545.3775432 \end{pmatrix}$, а спектральный радиус $\rho(A) = 0.9975$.

При решении примера в данном случае метод Зейделя имеет «порядок ноль».

Используя изложенный выше метод ускорения сходимости, получим приближения u_n^* и v_n^*. Соответствующие приближения u_n^* и v_n^* к координатам вектора решения представим в виде таблицы.

Приближения к 1-й координате вектора решения		
Номер приближений n	"u_n^*"	"v_n^*"
1	*-31581.165783*	*33302.009434*
541	2.457779	906.048065
1434	440.958437	468.920229
2009	453.467382	456.450447
2957	454.923932	454.998456

4196	454.960952	454.961552
5000	454.961239	454.961266
Приближения к 2-й координате вектора решения		
1	-32943.148882	34738.487582
541	2.744047	945.628970
1434	460.313883	489.491656
2009	473.366807	476.479597
2957	474.886699	474.964463
4196	474.925329	474.925955
5000	474.925629	474.925656
Приближения к 3-й координате вектора решения		
1	-32450.640618	34219.583220
541	3.251564	932.142260
1434	454.030183	482.774902
2009	466.889377	469.955967
2957	468.386711	468.463321
4196	468.424767	468.425384
5000	468.425062	468.425089
Приближения к 4-й координате вектора решения		
1	-29994.511930	31630.236737
541	3.465972	862.843575
1434	420.510788	447.104409
2009	432.407670	435.244773
2957	433.792951	433.863828
4196	433.828160	433.828730
5000	433.828433	433.828458
Приближения к 5-й координате вектора решения		
1	-37631.653423	39686.310105
541	5.420638	1083.643995
1434	528.668463	562.034312
2009	543.594958	547.154547
2957	545.333010	545.421936
4196	545.377184	545.377900
5000	545.377527	545.377558

Итак, на 5000-й итерации точность вычислений составляет 10^{-4}.

Рассмотрим теперь применение предложенного варианта метода Зейделя в случае, когда метод Зейделя имеет «порядок один». Реализуем этот случай на изложенном выше примере.

Необходимые начальные условия полностью совпадают с начальными условиями в рассмотренном выше примере.

Используя изложенный выше метод ускорения сходимости, получим приближения u_n^* и v_n^*. Соответствующие приближения u_n^* и v_n^* к координатам вектора решения представим в виде таблицы.

Приближения к 1-ой координате вектора решения		
Номер приближений n	“u_n^*”	“v_n^*”
1	-19145.167945	20488.931731
363	20.887959	887.679663
1185	451.585334	458.327096
1957	454.926203	454.996660

3312	454.961474	454.961498
Приближения к 2-ой координате вектора решения		
1	-19935.975115	21336.627643
363	22.692057	925.744732
1185	471.407031	478.430825
1957	474.887660	474.961064
3312	474.924407	474.924432
Приближения к 3-ой координате вектора решения		
1	-19650.507350	21031.240179
363	22.616370	912.839387
1185	464.956456	471.880463
1957	468.387635	468.459997
3312	468.423861	468.423885
Приближения к 4-ой координате вектора решения		
1	-18159.668279	19436.269267
363	21.358973	845.007810
1185	430.619226	437.025430
1957	433.793809	433.860760
3312	433.827326	433.827348
Приближения к 5-ой координате вектора решения		
1	-22790.544091	24396.542036
363	28.279619	1060.858104
1185	541.354262	549.385486
1957	545.334120	545.418054
3312	545.376139	545.376167

Как видно из таблицы, по сравнению с предыдущим случаем несколько возросла скорость сходимости приближений u_n^* и v_n^* к точному решению.

Отметим также тот факт, что основные вычисления по предложенному варианту метода Зейделя получены с помощью разработанной авторами программы на языке программирования TURBO PASCAL.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гробова Т.А.* Методы итеративного агрегирования для приближенного решения линейных и нелинейных алгебраических систем и интегральных уравнений. – Ставрополь, Диссертация, 2002г.
2. *Красносельский М.А., Стеценко В.Я.* Замечания о методе Зейделя// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1969, т.9, №1, с.177-182.
3. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М: Наука, 1969, 456с.
4. *Коршунова Н.И., Плясунов В.С.* Математика в экономике. – М.: Вита-Пресс, 1996, 368с.

Поступила в редакцию 22.04.03