УДК 519.95

С. Б. Гашков

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОГОЧЛЕНОВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Вопрос о сложности вычисления многочленов с разных точек зрения рассматривался во многих работах, например в [1]. В настоящей работе будут приведены оценки сложности схемной реализации некоторых классов многочленов нескольких переменных в естественных базисах, состоящих из операций сложения, умножения и констант, которые обобщают некоторые результаты из [1], а также некоторые оценки, использованные автором в [2—3]. Идеи доказательств следующих далее оценок принадлежат в основном О. Б. Лупанову [4—5]. Когда писались [2—3], автор о работе [1] не знал.

Произвольный многочлен записывается в виде

$$f(X)=\sum_{\alpha\in M_f} a_\alpha X^\alpha;\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),$$

$$X^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n},\ a_\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{0\},\ M_f\subset\mathbf{N}^n,\ \mathbf{N}=\{0,1,\ldots\}.$$

Множество $\{f\in\mathbf{R}[X]:M_f\subseteq M\}$ обозначим $P(M)$, а его подмножество, состоящее из многочленов с коэффициентами 0 и 1, обозначим $P_1(M)$. Для реализации класса $P(M)$ используем базис $B=\{x+y,\ xy\}\cup\mathbf{R}$, а для реализации $P_1(M)$ — базис $B_1=\{x+y,\ xy,\ 1\}$. Все нужные далее определения можно найти в [1—5]. Сложность схемной и формульной реализации функции f обозначим соответственно $L(f)$ и $L^*(f)$, а глубину — $D(f)$. Аналогичные обозначения вводим и для классов функций, например, $L(P(M))=\max\{L(f):f\in P(M)\}$ — функция Шеннона класса $P(M)$ в случае схемной реализации. Конечное множество $M\subset\mathbf{N}^n$ назовем правильным, если вместе с каждым мультииндексом оно содержит все меньшие мультииндексы. Для любого $\alpha\in\mathbf{N}^n$, не содержащего нулей, множество $\{\beta\in\mathbf{N}^n:\beta\leqslant\alpha\}$ назовем интервалом. Мощность множества M обозначим $|M|$.

Теорема. *Пусть $M\subset\mathbf{N}^n$ — правильное множество.* (i) *Тогда*

$$L(P_1(M))\leqslant\frac{|M|}{\log_2|M|}\left(1+\frac{4\log_2\log_2|M|+O(n)}{\log_2|M|}\right)+O(|M|^{\frac{n-1}{n}}n\log_2|M|)+$$
$$+2^n,$$

$$D(P(M))\leqslant\log_2|M|+O((\log_2|M|)\cdot\log_2(n+1))^{\frac{1}{2}},$$

а если n фиксировано и $|M|\to\infty$, то

$$L(P_1(M))\leqslant\frac{|M|}{\log_2|M|}\left(1+\frac{4\log_2\log_2|M|+O_n(1)}{\log_2|M|}\right),$$

$$D(P(M))\leqslant\log_2|M|.$$

(ii) *Обозначим M_0 множество $M\cap(\mathbf{N}^{n-1}\times\{0\})$. Тогда*

$$L(P_1(M))\leqslant\frac{|M|}{\log_2|M|}\left(1+\frac{3\log_2\log_2|M|+O(1)}{\log_2|M|}\right)+O(|M_0|).$$

(iii) *Если M — интервал и $|M|\to\infty$, то*

$$L(P_1(M))\leqslant\frac{|M|}{\log_2|M|}\left(1+\frac{5\log_2\log_2|M|+O(1)}{\log_2|M|}\right),$$

$$D(P(M))\leqslant\log_2|M|,$$

а при фиксированном n и $|M|\to\infty$

$$L(P_1(M))\leqslant\frac{|M|}{\log_2|M|}\left(1+\frac{3\log_2\log_2|M|+O_n(1)}{\log_2|M|}\right).$$

(iv) *Пусть $F:\mathbf{N}^n\to\mathbf{N}$ — функция, не возрастающая по каждой переменной, $P=P(F, M)$ — класс многочленов*

$$\left\{f=\sum_{\alpha\in M}a_\alpha X^\alpha : a_\alpha\in\mathbf{Z},\ |a_\alpha|\leqslant F(\alpha)\right\},\ G=G(F,M)\text{ — число, равное}$$

$$\log_2\left(\prod_{\alpha\in M}F(\alpha)\right),\ B=\{x+y, xy, 1\}\text{ — базис.}$$

Тогда если $|M|<cG$, где c — константа, и $|M|\to\infty$, то

$$L(P)\leqslant\frac{G!}{\log_2 G}\left(1+\frac{3\log_2\log_2 G+O_c(1)}{\log_2 G}\right)+O_c(|M|).$$

Замечания. 1. Вместо класса $P_1(M)$ можно рассмотреть класс $P_k(M)$, состоящий из многочленов с коэффициентами из множества $\{0, 1,\ldots,k\}$ или даже произвольного $k+1$-элементного подмножества поля коэффициентов, которое тоже может быть произвольным; в последнем случае предположим дополнительно, что базис содержит все константы из поля коэффициентов. Тогда для класса $P_k(M)$ справедливы аналоги всех оценок для класса $P_1(M)$, только вместо $\log_2$ должно стоять $\log_{k+1}$, а вместо символа O — символ O_k.

2. В случае $k\to\infty$ предыдущие оценки для $L(P_k(M))$ не представляют интереса. Однако в этом случае из теоремы можно вывести, например, такое следствие: если M — интервал и

$$\frac{\log_2\log_2(k+1)}{\log_2|M|}\to 0,\quad\text{то}$$

$$L(P_k(M))\leqslant\frac{|M|}{\log_{k+1}|M|}.$$

3. Для любого множества M, такого, что

$$\frac{\log_2\log_2(k+1)}{\log_2|M|}\to 0,\qquad\frac{n\log_{k+1}|M|}{|M|}\to 0,$$

можно мощностным методом (см. [4—5]) показать, что

$$L(P_k(M))\ni\frac{|M|}{\log_{k+1}|M|}.$$

4. Оценки, аналогичные оценкам для $D_B(P(M))$, справедливы также и для $D_{B_1}(P_1(M))$. При доказательстве этих оценок используется метод работы [6].

5. Для любого правильного множества M справедлива оценка $L^*(P(M))\leqslant 3|M|-2$. Уточним, что под сложностью формулы понимается число элементов (в том числе и констант) в этой формуле (без учета числа входов в формуле). Эта оценка, вообще говоря, точная.

6. Без предположения о правильности множества M теорема, вообще говоря, не справедлива. Это следует, например, из результатов работы [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Strassen V. Berechungen in partielen Algebren endlichen Typs//Computing. 1973. 11, N 3. 181—196.
2. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации аналитических функций схемами и формулами//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1983. № 4. 36—43.
3. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации непрерывных функций и о континуальных аналогах «эффекта Шеннона»//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1986. № 6. 25—33.
4. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем//Пробл. кибернетики. 1963. Вып. 10. 63—97.
5. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования//Пробл. кибернетики. 1965. Вып. 14. 31—110.
6. Maruyama K. On the parallel evaluation of polynomials//IEEE Trans. Comput. 1973, C—22. N 1.
7. Гашков С. Б. О сложности монотонных вычислений многочленов//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1987. № 5. 7—13.

Поступила в редакцию
19.03.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 2

УДК 532.5:532.135

В. Р. Душин

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ «СТЕПЕННЫХ» ЖИДКОСТЕЙ

Рассматривается задача отыскания всех существенно различных инвариантных решений системы уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости со «степенной» зависимостью напряжений τ_{ij} от скоростей деформации e_{ij} как в полной записи

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},\quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0,$$
$$\tau_{ij}=-p\delta_{ij}+2k|2e_{ij}e_{ji}|^{\frac{n-1}{2}}e_{ij},\quad i,\ j=1\div N, \tag{1}$$

так и в приближении пограничного слоя [1], где k, n — реологические параметры, N — размерность физического пространства. Известно [2], что эта задача сводится к построению оптимальных систем Θ_i i-параметрических подгрупп допускаемой группы. В [1] показано, что группа Ли точечных преобразований, допускаемая системой уравнений движения в полной записи (1), имеет вид

$$G_1: X_0=\partial_t,\quad X_{ij}=x_j\partial_{x_i}-x_i\partial_{x_j}+v_i\partial_{v_i}-v_i\partial_{v_j}\quad (i<j),$$
$$Z=\frac{2}{n}t\partial_t+\frac{2-n}{n}x_i\partial_{x_i}-v_i\partial_{v_i}-2p\partial_p,$$
$$S(\sigma)=\sigma(t)\,\partial_p,\quad T_j(\psi)=\psi(t)\,\partial_{x_j}+\frac{d\psi}{dt}\partial_{v_j}-x_j\frac{d^2\psi}{dt^2}\partial_p, \tag{2}$$

где ψ, σ — произвольные функции своих аргументов.