В. П. Глушко, Об одном интегральном неравенстве и соответствующей теореме вложения, *Докл. АН СССР*, 1961, том 137, номер 6, 1280–1282

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 137, № 6

МАТЕМАТИКА

В. П. ГЛУШКО

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 XI 1960)

Пусть R_n — n-мерное эвклидово пространство. Расстояние между точками x, $y \in R_n$ обозначим $r(x, y)$ $(r(x, 0) = r(x))$.

1. В работе [1] доказано неравенство

$$\int\limits_{R_s}\int\limits_{R_n} \frac{f(x)\,g(y)}{r^{-k}(x)\,[r(x, y)]^{n/p'+s/q-h+k}\,r^h(y)}\,dx^{(n)}dy^{(s)} \leqslant C_1 \| f \|_{L_p(R_n)} \| g \|_{L_{q'}(R_s)}, \quad (1)$$

где $1 < p \leqslant q$; $s \leqslant n$; $-n/p' < k < h < s/q$, а постоянная c_1 зависит лишь от n, p, k, s, q, h. В случае $n = 1$ неравенство (1) установлено Харди и Литтльвудом ([2], стр. 359, п. 401).

Как показали Харди, Литтльвуд и Полиа ([2], стр. 346, п. 382) при $n=1$; С. Л. Соболев [3] при $s = n > 1$; В. П. Ильин [4] при $s < n \neq 1$, неравенство (1) справедливо при $h=k=0$ $(p<q)$. Будем обозначать неравенство (1) при $h=k=0$ через (1′), а константу неравенства (1′) через c_1'.

Пусть R_t — подпространство R_n размерности $t < n$. Через R_{n-t} обозначим ортогональное дополнение к R_t в R_n. Справедливо следующее неравенство, обобщающее неравенство (1):

Теорема 1. *Пусть $R_s \subseteq R_n$ $(s \leqslant n)$ и $R_\sigma = R_t \cap R_s$ $(\sigma > 0)$. Предположим, что $R_{s-\sigma} \subseteq R_{n-t}$ $(0 < s - \sigma \leqslant n - t)$.*

Если числа p, q, k, h удовлетворяют условиям

$$1 < p < q; \quad -\frac{n-t}{p'} < k < h < \frac{s-\sigma}{q},$$

то справедливо неравенство

$$I = \int\limits_{R_s}\int\limits_{R_n} \frac{f(x)\,g(y)}{r_{n-t}^{-k}(x)\,[r(x, y)]^{n/p'+s/q-h+k}\,r_{s-\sigma}^{h}(y)}\,dx^{(n)}dy^{(s)} \leqslant c_2 \| f \|_{L_p(R_n)} \| g \|_{L_{q'}(R_s)}, \quad (2)$$

где $r_{n-t}(x)$ — расстояние от $x \in R_n$ до R_t; $r_{s-\sigma}(y)$ — расстояние от $y \in R_s$ до R_σ; $c_2 = c_1 c_1'$ — постоянная, зависящая лишь от n, p, k, t, s, q, h, σ.

Доказательство неравенства (2) основано на неравенствах (1), (1′) и проводится с помощью одного приема Плессиса [5].

Действительно, не ограничивая общности можно считать, что

$$\begin{aligned}
&R_t: \ x_{t+1} = x_{t+2} = \ldots = x_n = 0;\\
&R_{n-t}: \ x_1 = x_2 = \ldots = x_t = 0;\\
&R_s: \ x_{\sigma+1} = x_{\sigma+2} = \ldots = x_t = \ldots = x_{n-s+\sigma} = 0;\\
&R_\sigma: \ x_{\sigma+1} = x_{\sigma+2} = \ldots = x_n = 0;\\
&R_{s-\sigma}: \ x_1 = x_2 = \ldots = x_t = \ldots = x_{n-s+\sigma} = 0.
\end{aligned}$$

Тогда для любых $x \in R_n$ и $y \in R_s$ справедлива оценка

$$r(x, y) \geqslant \tag{3}$$

$$\geqslant \begin{cases} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_\sigma-y_\sigma)^2+x_{\sigma+1}^2+x_{\sigma+2}^2+\ldots+x_t^2} \equiv r_t(x, y); \\ \sqrt{x_{t+1}^2+x_{t+2}^2+\ldots+x_{n-s+\sigma}^2+(x_{n-s+\sigma+1}-y_{n-s+\sigma+1})^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} \equiv r_{n-t}(x,y). \end{cases}$$

С помощью оценки (3) получим

$$I \leqslant \int\limits_{R_{s-\sigma}} \int\limits_{R_{n-t}} \frac{1}{r_{n-t}^{-k}(x)\,[r_{n-t}(x, y)]^{(n-t)/p'+(s-\sigma)/q-h+k}\, r_{s-\sigma}^{h}(y)} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{R_\sigma} \int\limits_{R_t} \frac{f(x)\, g(y)}{[r_t(x, y)]^{\sigma/q+t/p'}}\, dx^{(t)} dy^{(\sigma)} \right] dx^{(n-t)} dy^{(s-\sigma)}.$$

После этого доказательство неравенства (2) сводится к последовательному применению неравенств (1') и (1).

2. Пусть Ω_n — ограниченная область R_n, звездная относительно некоторого шара. В совокупности C^l всех l раз непрерывно дифференцируемых в Ω_n функций введем норму по формуле

$$\| r_{n-t}^{-k}(x)\, u(x) \|_{L_p(\Omega_n)} + \| r_{n-t}^{-k}(x)\, D^l u(x) \|_{L_p(\Omega_n)}, \tag{4}$$

где $p > 1$; $-\frac{n-t}{p'} < k < \frac{n-t}{p}$.

$$D^l u(x) = \left\{ \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=l} \left(\frac{\partial^l u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Замыкание множества C^l по норме (4) назовем пространством $W_{p,k}^l(\Omega_n, R_t)$. Легко показать, что получающиеся при таком пополнении функции имеют в Ω_n обобщенные производные порядка l. Норму в пространстве $W_{p,k}^l(\Omega_n, R_t)$ определим формулой (4).

Обозначим $\Omega_s = \Omega_n \cap R_s$. Аналогично можно ввести пространства $W_{q,h}^m(\Omega_s, R_\sigma)$ $(R_\sigma \subset R_s)$ функций на Ω_s.

С помощью неравенства (2) и интегрального представления С. Л. Соболева ([6], стр. 62) функций из C^l может быть доказана следующая теорема вложения.

Теорема 2. *Пусть R_n, R_s, R_t, R_σ удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и $k < \frac{s-\sigma}{p}$. Тогда пространство $W_{p,k}^l(\Omega_n, R_t)$ вложено в пространство $W_{q,h}^m(\Omega_s, R_\sigma)$ и справедливо неравенство*

$$\| u \|_{W_{q,h}^m(\Omega_s, R_\sigma)} \leqslant c \| u \|_{W_{p,k}^l(\Omega_n, R_t)}. \tag{5}$$

I. *Если* $l - \frac{n}{p} + \frac{sk}{s-\sigma} < m < l + k - \frac{n-\sigma}{p}$, *то*

$$k < h < \frac{s-\sigma}{\sigma}\left(\frac{n}{p} - l - k + m\right);$$

если же $l + k - \frac{n-\sigma}{p} \leqslant m < l - \frac{n-s}{p}$, *то*

$$k < h < l + k - m - \frac{n-s}{p},$$

а число q в обоих случаях определяется равенством

$$q = \frac{sp}{n-(l+k-m-h)p}.$$

II. *Если* $m \leqslant l - \frac{n}{p} + \frac{sk}{s-\sigma}$, *то неравенство* (5) *справедливо при любых* q *и* h, *удовлетворяющих условиям*

$$1 < q < \frac{s-\sigma}{k}, \quad h < \frac{s-\sigma}{q}.$$

Замечание. Первая часть теоремы 2 без изменения переносится на классы функций в неограниченных областях, рассмотренные в ([1]).

При $s = n$ неравенство (5) получено при несколько более общих предположениях относительно области Ω_n в работе В. П. Ильина ([7]). Аналоги неравенства (5) имеются также в работе М. И. Вишика ([8]).

3. Приведенный выше метод доказательства неравенства (1) позволяет получить неравенство (5) для ограниченной области $\Omega_{n-t} = \Omega_n \cap R_{n-t}$ в случае $\sigma = 0$ ($t > 0$) и в случае $s = t$ ($h = 0$), но при $q < \frac{sp}{n-(l+k-m-h)p}$.

Воронежский
лесотехнический институт

Поступило
17 XI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Глушко, ДАН, **126**, № 3, 467 (1959). [2] Г. Х. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948. [3] С. Л. Соболев, Матем. сборн., **4** (46), 471 (1938). [4] В. П. Ильин, УМН, **11**, 4, 131 (1956). [5] N. du Plessis, Trans. Am. Math. Soc., **80**, № 1, 124 (1955). [6] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [7] В. П. Ильин, ДАН, **129**, № 6, 1214 (1959). [8] М. И. Вишик, Матем. сборн., **35** (77), № 3, 513 (1954).