

СЕТИ ЛИНИЙ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА, И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИХ СХОДИМОСТИ

Э. Р. Розендорн

ВВЕДЕНИЕ

Первый параграф статьи является обзорным. В нем обсуждаются признаки правильности в целом сети линий, заданной на плоскости или в ее части обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка второй степени, см. ниже (1.1). Такой способ задания сетей весьма употребителен, но фактически является локальным, так что для использования сети (например, в качестве координатной) в наперед заданной области требуется специальное исследование.

Далее в статье речь идет о сетях, зависящих от параметра, и об их сходимости по параметру. В этих вопросах весьма полезным оказался аналитический аппарат, связанный с использованием гиперболической системы уравнений специального вида, см. ниже (3.1). Однако относящиеся сюда результаты были опубликованы только в виде кратких сообщений; в § 3—6 они изложены более подробно, с доказательствами. Последние параграфы статьи посвящены приложениям к теории нелинейных гиперболических уравнений с частными производными и к изучению поверхностей отрицательной гауссовой кривизны.

§ 1. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ПРАВИЛЬНОСТИ СЕТИ

1. Сети линий, заданные на плоскости. Пусть сеть линий задана на евклидовой плоскости E^2 уравнением

$$a(x, y) dx^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2 = 0 \quad (1.1)$$

при дополнительном условии

$$b^2 - ac = \kappa^2 > 0, \quad (1.2)$$

гарантирующем наличие двух семейств линий, пересекающихся трансверсально.

Если гладкость коэффициентов a , b , c уравнения (1.1) обеспечивает применимость известных теорем о единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [15]), то сеть, заданная на E^2 соотношениями (1.1) и (1.2), является правильной лишь локально: каждая точка на E^2 принадлежит некоторому (вообще говоря — достаточно малому) сетевому четырехугольнику и в нем сеть топологически эквивалентна декартовой сети в ее сетевом квадрате. Однако при расширении сетевого четырехугольника \mathcal{D} он может «разомкнуться» (см. рис. 1) и тогда появляются линии разных семейств сети (1.1), не пересекающиеся между собой.

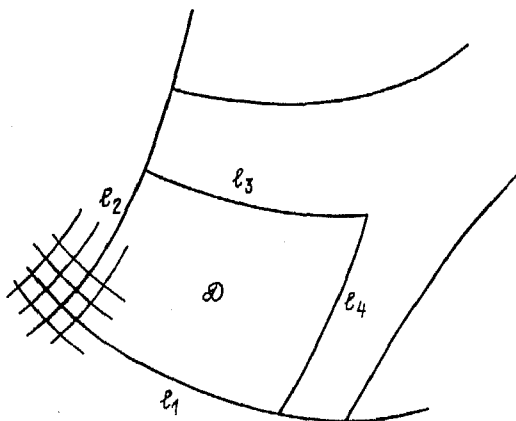


Рис. 1

Укажем пример, взятый из [7]. Рассмотрим поверхность $z = e^y \sin x$ отрицательной гауссовой кривизны. Проекция ее асимптотических линий на плоскость $z=0$ задаются уравнением

$$\sin x dx^2 - 2 \cos x dx dy - \sin x dy^2 = 0, \quad (1.3)$$

которое удовлетворяет, как очевидно, условию (1.2). Уравнение (1.3) интегрируется в элементарных функциях и его решение задается в явном виде

$$y = \text{const} - \ln |1 \pm \cos x|. \quad (1.4)$$

Из (1.4) непосредственно видно, что у сети (1.3) есть такие линии, принадлежащие двум разным ее семействам, которые на ось x целиком проектируются на непересекающиеся интервалы вида $(m\pi, (m+2)\pi)$ и не могут, следовательно, пересечься друг с другом на плоскости.

Другой простой и наглядный пример сети, локально правильной, но не являющейся правильной в целом, дают прямо-

линейные образующие однополостного гиперболоида: на нем нетрудно усмотреть разомкнутые сетевые четырехугольники.

Сеть линий на плоскости называют *правильной в целом*, если каждая линия одного семейства пересекает под ненулевым углом каждую из линий другого ее семейства, причем только один раз; такая сеть в целом гомеоморфна декартовой. Сформулируем условия, достаточные для этого.

Будем считать всюду в дальнейшем (часто не оговаривая этого дополнительно), что коэффициенты a, b, c уравнения (1.1) являются C^1 -гладкими функциями аргументов (x, y) . Символом C^* будем обозначать класс функций, непрерывных вместе с частными производными первого порядка и смешанной производной второго порядка.

Штрихом и нижним буквенным индексом здесь и ниже обозначаем частные производные. Следуя [11] и [17], но несколько изменив использованные там обозначения, введем вспомогательные функции, которые строятся по уравнению (1.1) и использованы ниже. Пусть $O \in E^2$ — произвольно зафиксированная точка, X — текущая точка на E^2 , и $|OX| = \rho$; через G_ρ обозначим круг на E^2 с центром O и радиусом ρ . Положим

$$\Phi_1(\rho) = \iint_{G_\rho} \{ |\text{grad } \kappa|^2 + (a'_y - b'_x)^2 + (b'_y - c'_x)^2 \}^{1/2} d\sigma, \quad (1.5)$$

где $d\sigma$ — элемент площади на E^2 .

$$\Phi_2(\rho) = \iint_{G_\rho} \left\{ \left(\left(\frac{a}{\kappa} \right)'_y - \left(\frac{b}{\kappa} \right)'_x \right)^2 + \left(\left(\frac{b}{\kappa} \right)'_y - \left(\frac{c}{\kappa} \right)'_x \right)^2 \right\}^{1/2} d\sigma. \quad (1.6)$$

Кроме того, при дополнительном предположении, что $\kappa(X)$ имеет положительную миноранту, зависящую только от ρ :

$$\kappa(X) \geq \kappa_0(\rho) > 0 \quad (1.7)$$

и удовлетворяющую условию

$$\int_0^{+\infty} \kappa_0(\rho) d\rho = +\infty, \quad (1.8)$$

используем функцию $\Phi_0(\rho) = \int_0^\rho \kappa_0(\tau) d\tau$.

Теорема 1 (Б. Е. Кантор). Пусть $a, b, c \in C^*(E^2)$, причем Ξ миноранта (1.7) и выполняются (1.8) и условие

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} (\Phi_0(\rho) - \Phi_1(\rho)) = +\infty. \quad (1.9)$$

Тогда сеть линий (1.1) правильна в целом на E^2 .

Теорема 2 (Э. Р. Розендорн). Пусть $a, b, c \in C^1(E^2)$ и

$$\Xi B_1 \in [0, 2), B_2 \geq 0 \quad (1.10)$$

такие, что

$$\Phi_2(\rho) \leq B_1\rho + B_2 \quad \forall \rho \in (0, +\infty). \quad (1.11)$$

Тогда сеть линий (1.1) правильна в целом на E^2 .

Доказательство теоремы 1 содержится в работах [9] и [11].

Доказательство теоремы 2 изложено в [17]. Оба они опираются на изучение соотношений в сетевых четырехугольниках, позволяющее находить условия на агрегаты, сформированные исходя из уравнения (1.1), при соблюдении которых четырехугольник \mathcal{D} не мог бы разомкнуться, то есть при своем расширении деформироваться так, чтобы одна из его вершин ушла в бесконечность, тогда как три других остались бы в конечной части плоскости, что схематически изображено на рис. 1.

Замечания: 1) Сеть, заданная уравнением (1.1), не изменится, если в (1.1) все члены умножить на одну и ту же функцию, нигде не обращающуюся в нуль. Поэтому условие (1.2) позволяет, не ограничивая общности рассуждений, вводить нормировку вида:

$$\kappa(X) = 1 \quad \forall X \in E^2. \quad (1.12)$$

Если (1.12) имеет место, то $\nabla\Phi_0(\rho) = \rho$, а $\Phi_2(\rho) = \Phi_1(\rho)$, и тогда из (1.9) следует (1.10) — (1.11) для $B_1 = 1$ и некоторого $B_2 > 0$. В общем случае, однако, теорема 1 не следует из теоремы 2, так как условие (1.9) (в отличие от (1.11)) не инвариантно относительно умножения уравнения (1.1) на функциональный множитель. Между прочим, для (1.3) условие (1.12) соблюдено.

2) Подынтегральное выражение в (1.6) представляет собой модуль второго чебышевского вектора сети (1.1). В этой связи см. [4], а также [8, стр. 354—355].

Следуя терминологии из [11], будем говорить, что сеть (1.1) *потенциальна*, если существует такая функция $Z(X)$, что

$$a = Z'_{xx}, \quad b = Z''_{xy}, \quad c = Z''_{yy}. \quad (1.13)$$

В этом случае выражение (1.5) упрощается: под интегралом остается только $|\text{grad } \kappa|$.

2. Сети асимптотических линий на поверхностях отрицательной кривизны. Их строение (для различных классов поверхностей) изучалось в связи с задачами о неизгибаемости поверхностей и об их жесткости, см. [9], [10], [12] и [24]. Кроме того, возможное строение сети асимптотических линий было предметом специальных исследований в связи с проблемой погружения двумерных римановых метрик отрицательной кривизны в трехмерное евклидово пространство E^3 . С этим кругом вопросов читатель может ознакомиться по подробной обзорной статье [7].

3. Сеть линий в области на плоскости. Понятно, что если сеть линий задана уравнением вида (1.1) в некоторой области $G \subset E^2$, то топологическое строение сети зависит не только от коэффициентов a, b, c , но и от области G и может быть весьма сложным. Часто, однако, важно знать, насколько велика та окрестность (не обязательно круговая) у выбранной точки $O \in G$, в пределах которой сеть остается правильной и может быть использована, например, в качестве координатной. Пусть в G содержится круг G_{ρ_1} с центром O . Рассмотрим расширяющийся сетевой четырехугольник \mathcal{D} , одной из вершин которого служит точка O . Аналогично рисунку 1 (см. выше, стр. 4), обозначим через l_1 и l_2 стороны четырехугольника \mathcal{D} , исходящие из точки O , и теми же буквами l_1 и l_2 обозначим их длины. Справедлива

Теорема 3. Пусть условие (1.11) соблюдено в интервале $0 < \rho < \rho_1$, причем $0 \leq B_2 \leq (1 - B_1)\rho_1$, $B_1 \geq 0$. Тогда если $l_1 + l_2 < (1 - B_1)\rho_2 - B_2$ и $B_2(1 - B_1)^{-1} < \rho_2 < \rho_1$, то $\mathcal{D} \subset G_{\rho_2}$.

Доказательство см. [17].

4. Характеристическая сеть гиперболического отображения. Рассмотрим две евклидовых плоскости E^2 и E_*^2 с декартовыми прямоугольными координатами (x, y) и (p, q) соответственно. Отображение вида $G \rightarrow E_*^2$, заданное в области $G \subset E^2$ формулами вида

$$p = p(x, y), \quad q = q(x, y), \quad (1.14)$$

следуя [6], будем называть *гиперболическим*, если отрицателен его якобиан:

$$\Delta = \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = -\delta^2 < 0. \quad (1.15)$$

Тогда характеристики отображения (1.14), то есть гладкие кривые, вдоль которых

$$p dx + q dy = 0 \quad (1.16)$$

образуют сеть. Пусть $J = q_x' - p_y'$ — ротация отображения (1.14). Положим

$$r = p_x', \quad s = \frac{1}{2}(p_y' + q_x'), \quad t = q_y' \quad (1.17)$$

и введем величины

$$\mu = (s^2 - rt)^{-1/2} = \left[\left(\frac{1}{2} J \right)^2 + \delta^2 \right]^{-1/2}, \quad \nu = \frac{1}{2} J \mu. \quad (1.18)$$

Величину ν естественно назвать *нормированной ротацией*: при условии (1.15) она обращается в нуль одновременно с J , но по модулю не превышает единицы.

Образ области G на E_*^2 будем рассматривать как двумерную поверхность в двумерном объемлющем пространстве и обозначим G_* (иногда в такой ситуации говорят: «многолистная область G_* на E_*^2). В силу (1.15) отображение (1.14) является локальным гомеоморфизмом. Поэтому (p, q) можно рас-

смаивать как локальные координаты в окрестности каждой точки на G_* ; соответственно этому функции, о которых идет речь в этом пункте, можно рассматривать как в координатах (x, y) , так и в координатах (p, q) . При этом градиент на плоскости E^2 обозначим ∇_{xy} , а градиент на E_*^2 — символом ∇_{pq} . Пусть $G_\rho \subset G_*$ — образ круга G_ρ при отображении (1.14). Введем вспомогательную функцию

$$\Phi_3(\rho) = \iint_{G_\rho} |\nabla_{xy} v| d\sigma + \iint_{G_\rho^*} |\nabla_{pq} \mu| d\sigma^*, \quad (1.19)$$

где $d\sigma^*$ — элемент площади на E_*^2 .

Предположим, что функция (1.19) удовлетворяет на некотором промежутке неравенствам

$$\Phi_3(\rho) < B_1\rho + B_2, \quad 0 \leq B_1 < 2, \quad 0 \leq B_2. \quad (1.20)$$

Из теорем 2 и 3 вытекают

Следствия. I. Пусть неравенство (1.20) соблюдено в интервале $(0, \rho_1)$, $\rho_1 > (1 - B_1)^{-1} B_2$. Тогда если для четырехугольника \mathcal{D} характеристической сети (1.16) $l_1 + l_2 < (1 - B_1)\rho_2 - B_1$ и при этом $(1 - B_1)^{-1} B_2 < \rho_2 < \rho_1$, то $\mathcal{D} \subset G_\rho^*$.

II. Пусть отображение (1.14) с якобианом (1.15) задано на всей плоскости E^2 , а функция $\Phi_3(\rho)$, построенная для некоторой точки $O \in E^2$, удовлетворяет неравенству (1.20) при любом $\rho > 0$. Тогда сеть характеристик отображения (1.14) правильна в целом на E^2 .

Доказательства этих следствий основаны на том, что уравнение (1.16) приводится к виду (1.1), причем $a=r$, $b=s$, и $c=t$ и имеет место мажорирование: $\Phi_2(\rho) \leq \Phi_3(\rho)$. Подробности см. [17].

§ 2. ЛЕММА О КВАДРАТНОМ НЕРАВЕНСТВЕ

Переходим к изложению вспомогательного материала, нужного для дальнейшего.

Лемма 1. Пусть в промежутке I числовой оси t заданы непрерывные функции $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ и $h(t)$ и соблюдаются неравенства

$$ah^2 - h + \beta \geq 0 \quad (2.1)$$

и

$$4\alpha\beta < 1. \quad (2.2)$$

Пусть $t_0 \in I$ такое, что

$$\alpha(t_0) h^2(t_0) < \beta(t_0). \quad (2.3)$$

Тогда

$$h(t) < 2\beta(t) \quad \forall t \in I. \quad (2.4)$$

Доказательство. Из (2.1) и (2.3) следует, что (2.4) соблюдено при $t = t_0$. В силу непрерывности существует окрест-

ность \mathcal{U} точки t_0 , в которой (2.4) тоже соблюдено, $\mathcal{U} \subseteq I$; но тогда

$$h(t) \leq \alpha(t)h^2(t) + \beta(t) < 2\beta(t) \quad \forall t \in \mathcal{U}, \quad (2.5)$$

Если $\mathcal{U} \neq I$, то $\exists t_1 \in I \cap \bar{\mathcal{U}}$ такое, что (2.4) нарушено для $t = t_1$. Чертой сверху обозначаем, как обычно, замыкание множества. В данной ситуации имеем:

$$h(t_1) = 2\beta(t_1). \quad (2.6)$$

Вместе с тем, переходя к пределу в (2.5), находим, что

$$\alpha(t_1)h^2(t_1) = \beta(t_1) \quad (2.7)$$

Из положительности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и равенства (2.7) следует, что $h(t_1) \neq 0$. Поэтому из (2.6), (2.7) и (2.2) получаем:

$$h(t_1) = \frac{\beta(t_1)}{\alpha(t_1)h(t_1)} > 2\beta(t_1). \quad (2.8)$$

Но (2.8) противоречит (2.6), следовательно $\mathcal{U} = I$; таким образом, лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Условие (2.2) гарантирует наличие двух различных действительных корней $h_1(t)$ и $h_2(t)$, $h_1 < h_2$, у квадратного трехчлена $\alpha h^2 - h + \beta$. Из (2.3) следует, что $h(t) \leq h_1(t)$ при $t = t_0$, а вследствие непрерывности и неравенства (2.1) взаимное расположение точек $h(t)$ и $h_1(t)$ на t -оси сохраняется при всех $t \in I$ (см. рис. 2). Вместе с тем, $h_1 < 2\beta$, откуда и виден наглядный смысл леммы 1. Из сказанного ясно, что в условиях леммы 1 имеет место более сильная оценка, чем (2.4), именно

$$h(t) \leq h_1(t) = \frac{2\beta}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha\beta}}, \quad (2.9)$$

однако ниже (2.9) не используется.

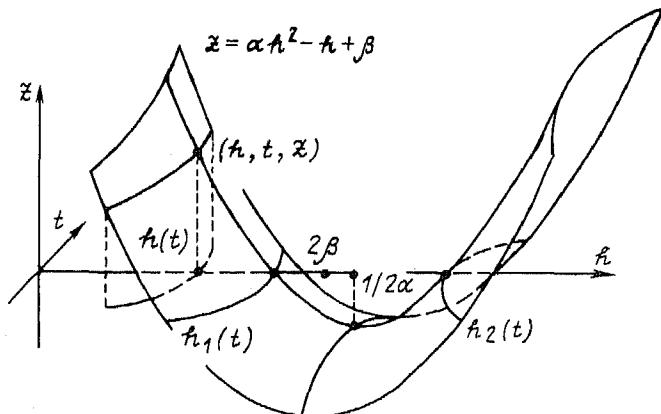


Рис. 2

§ 3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

1. Вспомогательная система уравнений. В этом и в двух следующих параграфах обсуждается нелинейная система уравнений в частных производных специального вида:

$$\left. \begin{aligned} x''_{uv} &= A(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \\ y''_{uv} &= B(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

и некоторые свойства ее решений. Здесь A и B — заданные функции аргументов x, y , а

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (3.2)$$

— искомое решение. Величины A и B удобно называть *коэффициентами системы* (3.1); в этом параграфе будем предполагать их непрерывными по (x, y) , а в § 5 это требование ослабим. Решение (3.2) будем сейчас предполагать принадлежащим классу C^* . Если при этом $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, то отображение (3.2) является локальным гомеоморфизмом, а линии уровня функций (3.2) образуют, по крайней мере локально, сеть на плоскости xu . Именно с этим фактом и связано изложенное ниже исследование систем вида (3.1).

2. Два вспомогательных неравенства.

Утверждение I. Для любых действительных чисел A, B, α, β , таких что $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{A\alpha + B\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right| \leq \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (3.3)$$

В самом деле, (3.3) представляет собой следствие частного случая неравенства Коши — Буняковского.

Пусть l — спрямляемая дуга на евклидовой плоскости E^2 , $\bar{\mathcal{U}}_\varepsilon(l)$ — ее замкнутая ε -окрестность, то есть множество точек на E^2 , удаленных от l не более, чем на ε . Той же буквой l обозначим длину этой дуги. Символом $\sigma(\dots)$ здесь и далее будем обозначать площадь (лебегову меру).

Утверждение II. Справедливо неравенство

$$\sigma(\bar{\mathcal{U}}_\varepsilon(l)) \leq 2l\varepsilon + \pi\varepsilon^2. \quad (3.4)$$

Хотя оценки вида (3.4) и их обобщения известны в геометрии (см., например, [3]), мы все же обсудим для большей ясности дальнейшего изложения наглядный смысл неравенства (3.4). Для отрезка оно превращается в равенство. При переходе к ломаной и увеличении числа ее звеньев оно не нарушается, что видно из рис. 3, на котором штриховкой помечены круговые сек-

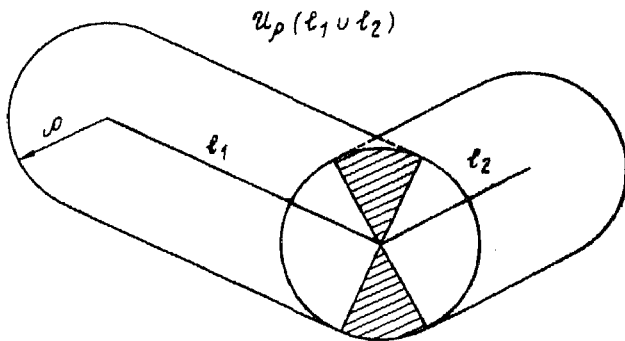


Рис. 3

торы равной площади. От ломаных к спрямляемым кривым — предельный переход.

3. Оценка разности длин противоположных сторон сетевого четырехугольника. Пусть, как и выше, якобиан преобразования (3.2) отличен от нуля, а сетевой четырехугольник \mathcal{D} сети линий

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const} \quad (3.5)$$

на E^2 расположен в такой области, куда отображение (3.2) действует гомеоморфно. Тогда (u, v) можно принять за локальные координаты. В них имеем:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = e^2 du^2 + 2eg \cos \omega \, du \, dv + g^2 dv^2 \quad (3.6)$$

где

$$e = \sqrt{(x'_u)^2 + (y'_u)^2}, \quad g = \sqrt{(x'_v)^2 + (y'_v)^2}, \quad (3.7)$$

ω — угол между линиями сети (3.5) на E^2 . При этом

$$W = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = eg \sin \omega. \quad (3.8)$$

Через φ_1 и φ_2 обозначим углы, которые линии (3.5) образуют на E^2 с осью x :

$$\varphi_1 = \text{Arctg}(y'_u/x'_u), \quad \varphi_2 = \text{Arctg}(y'_v/x'_v). \quad (3.9)$$

Аналогично рис. 1 (см. выше, стр. 4), обозначим l_1 и l_2 стороны четырехугольника \mathcal{D} , исходящие из одной его вершины, и их длины; через l_3 и l_4 — длины сторон, противоположных l_1 и l_2 соответственно, и сами эти стороны.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{D} \subset G$, а функции A, B абсолютно интегрируемы в области G . Тогда

$$|l_3 - l_1| \leq \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{A^2 + B^2} \, d\sigma \quad (3.10)$$

и аналогичная оценка справедлива для $|l_4 - l_2|$.

Следствие из леммы 2. Если A и B ограничены,

$$|A(x, y)| \leq c, \quad |B(x, y)| \leq c, \quad \text{то} \quad |l_{i+2} - l_i| \leq c\sqrt{2}\sigma(\mathcal{D}).$$

$i=1, 2$.

Доказательство леммы 2. Из формул (3.6) и системы (3.1) следует существование производных e'_v и g'_u , причем

$$e'_v = \frac{x'_u x''_{uv} + y'_u y''_{uv}}{\sqrt{(x''_{uu})^2 + (y''_{uu})^2}} = \frac{(Ax'_u + By_u)W}{\sqrt{(x''_{uu})^2 + (y''_{uu})^2}}. \quad (3.11)$$

Из (3.3) и (3.11) имеем оценку

$$|e'_v| \leq W\sqrt{A^2 + B^2}. \quad (3.12)$$

Пусть \mathcal{D} задан неравенствами

$$u_1 \leq u \leq u_2, \quad v_1 \leq v \leq v_2 \quad (3.13)$$

и пусть $l(v)$ — длина дуги $u_1 \leq u \leq u_2$ линии $v = \text{const}$, $v \in [v_1, v_2]$ (здесь и ниже считаем, что l_1 и l_2 — дуги линий $v = \text{const}$). Тогда

$$l(v) = \int_{u_1}^{u_2} e(u, v) du, \quad (3.14)$$

причем подынтегральная функция в (3.14) непрерывна вследствие (3.7) и имеет непрерывную производную по v вследствие сделанных выше допущений о непрерывности коэффициентов системы (3.1) и гладкости ее решения. По формуле Лейбница находим $l'(v)$ и, воспользовавшись оценкой (3.12), получаем:

$$|l'(v)| \leq \int_{u_1}^{u_2} W\sqrt{A^2 + B^2} du, \quad (3.15)$$

а из (3.15) получается (3.10) в результате интегрирования по v и перехода к координатам (x, y) в двойном интеграле. Для $|l_4 - l_2|$ неравенство (3.10) устанавливается аналогично.

З а м е ч а н и е. Сходные рассуждения и аналогичные оценки проведены в [6] и [17].

4. Оценка скорости изменения углов φ_i . Исследуем, насколько быстро могут изменяться углы φ_1 и φ_2 вдоль линии «чужого» семейства сети. Предварительно введем ряд вспомогательных обозначений, которые будут также использованы и в дальнейшем.

Пусть $X = \{x, y\}$ и $U = \{u, v\}$ — текущие точки на двух евклидовых плоскостях, которые будем обозначать E_X и E_U . Пусть Q — прямоугольник $u_1 \leq u < u_2$, $v_1 \leq v < v_2$ на E_U , а \bar{Q} — его замыкание (3.13). Рассмотрим функции $X = X(U)$ (иначе говоря,

пары функций (3.2)), C^1 -гладкие на Q и удовлетворяющие дополнительному условию

$$x(u_1, v_1) = x_0, \quad y(u_1, v_1) = y_0, \quad (3.16)$$

где $\{x_0, y_0\} = X_0$ — произвольно зафиксированная точка на E_X . Множество таких функций с нормой

$$\|X\| = \max_{U \in \bar{Q}} \{|x'_u|, |x'_v|, |y'_u|, |y'_v|\} \quad (3.17)$$

образует банахово пространство \mathfrak{X} . Шар в \mathfrak{X} с центром $X = X_0$ и радиусом R обозначим \mathfrak{B}_R . Справедлива

Лемма 3. Пусть $X = X(U) \in \mathfrak{B}_R$ и удовлетворяет системе (3.1). Тогда внутри Q $(\varphi_1)'_v$ и $(\varphi_2)'_u$ и для них имеет место оценка

$$|(\varphi_1)'_v|, |(\varphi_2)'_u| \leq R \sqrt{2\{A(X(U))^2 + B(X(U))^2\}}. \quad (3.18)$$

Доказательство. Тот факт, что выполнены равенства (3.1), позволяет продифференцировать первое из выражений (3.9) по v , а второе — по u . Используя (3.1), (3.7) и (3.8), находим

$$\begin{aligned} (\varphi_1)'_v &= (x'_u y''_{uv} - y'_u x''_{uv}) e^{-2} = \\ &= ((x'_u)^2 + (y'_u)^2)^{-1/2} (B x'_u - A y'_u) g \sin \omega. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.19), (3.17), (3.7) и (3.3) получается оценка (3.18) для $|(\varphi_1)'_v|$; аналогично оценивается $|(\varphi_2)'_u|$.

5. Вспомогательная система интегральных уравнений и априорная оценка для ее решений. Наряду с (3.1), будем рассматривать системы уравнений вида

$$x(u, v) = f_1 + \iint_{Q_U} A W dudv, \quad y(u, v) = f_2 + \iint_{Q_U} B W dudv, \quad (3.20)$$

где $Q_U = [u_1, u] \times [v_1, v] \subset \bar{Q}$, через W (как и выше) обозначен якобиан (3.8); $f_1(U)$ и $f_2(U)$ — заданные C^1 -гладкие на \bar{Q} функции, удовлетворяющие условиям

$$f_1(u_1, v_1) = x_0, \quad f_2(u_1, v_1) = y_0, \quad (3.21)$$

так что $f = \{f_1, f_2\} \in \mathfrak{X}$.

Условимся $X = \{x, y\} = X(U)$ называть *регулярным решением* интегральной системы уравнений (3.20) (лучше было бы сказать: интегродифференциальной, так как в W входят x'_u, y'_u, x'_v, y'_v), если $X(U) \in C^1(\bar{Q})$ и (3.20) соблюдается $\forall U \in Q$.

В этом случае, как очевидно, $X \in \mathfrak{X}$, если о функциях $A(X)$ и $B(X)$ в (3.20) предполагать, что они заданы и непрерывны на всей E_X .

Пусть a — наибольшая из длин сторон Q . Имеет место

Лемма 4. Если для $f \in \mathfrak{B}_R$, регулярное решение системы

(3.20) существует, причем

$$|A(X)| \leq c, \quad |B(X)| \leq c \quad \forall X \in E_x \quad (3.22)$$

и

$$8acR_0 < 1, \quad R_0 > 0, \quad (3.23)$$

то $X(U) \in \mathcal{B}_R$ при $R < 2R_0$.

Доказательство. Пусть Q_t — замкнутый прямоугольник, который получается из \bar{Q} гомотетией с центром (u_1, v_1) и коэффициентом гомотетии $t \in (0, 1]$ (так, что $Q_1 = \bar{Q}$). Сужения функций $f(U)$ и $X(U)$ на Q_t обозначим f_t и X_t ; нормы для них введем формулой вида (3.17), заменяя в ней \bar{Q} на Q_t , и положим $R(t) = \|X_t\|$. Из C^1 -гладкости $X(U)$ следует непрерывность функции $R(t)$. Ясно так же, что

$$\|f_t\| \leq R_0. \quad (3.24)$$

Из (3.20), (3.22) и (3.24) имеем:

$$R(t) \leq R_0 + 2actR^2(t) \quad \forall t \in (0, 1]. \quad (3.25)$$

Далее, из соображений непрерывности находим, что

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} R(t) \leq R_0. \quad (3.26)$$

Но из (3.25) и (3.26) следует, что найдется $t_0 \in (0, 1]$ столь малое, что

$$2act_0R^2(t_0) < R_0. \quad (3.27)$$

Теперь, сопоставляя (3.23), (3.25) и (3.27), видим, что к неравенству (3.25) на отрезке $[t_0, 1]$ применима лемма 1, которая здесь нам дает: $R(t) < 2R_0$ на $[t_0, 1]$; полагая $t=1$, получаем утверждение леммы 4.

6. Вспомогательный оператор. Наряду с системой (3.20), будем рассматривать оператор вида $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, который действует по формулам:

$$\xi(u, v) = f_1 + \iint_{Q_U} AW dudv, \quad \eta(u, v) = f_2 + \iint_{Q_U} BW dudv. \quad (3.28)$$

Здесь W — якобиан, вычисляемый согласно (3.8) для функции $X(U)$, которая преобразуется оператором (3.28) в функцию $Y(U) = \{\xi, \eta\} = Y \in \mathfrak{R}$. Обратим внимание на то, что если $X \in \mathcal{B}_R$, то $A(X)$ и $B(X)$ в (3.28) фактически используются не на всей E_x , а лишь в круге G_{2ax} с центром $X_0 \in E_x$. В этом круге и будем сейчас считать их непрерывными и удовлетворяющими условиям (3.22). Тогда справедлива

Лемма 5. Если $\|f\| \leq R_0$ и соблюдается (3.23), то оператор (3.28) переводит \mathcal{B}_{2R_0} в себя.

Доказательство. Лемма 5 следует из (3.17) и (3.28).

Далее мы будем использовать понятие модуля непрерывно-

сти (определение см., например, в [5]), причем для функций многих переменных нам понадобится модуль непрерывности как по отдельным аргументам, так и по совокупности аргументов:

$$\chi(\tau) = \max_{|h| \leq \tau} \left(\max_{x, x+h \in \bar{G}} |F(x+h) - F(x)| \right), \quad (3.29)$$

где $x, h \in \bar{G} \subset E^n$; считается, что замкнутая область \bar{G} в E^n входит в область задания функции F ; не исключено, что $\bar{G} = E^n$.

Имеют место следующие факты.

I) Пусть функции f_1, \dots, f_m имеют модули непрерывности χ_1, \dots, χ_m . Тогда их линейная комбинация $\sum_{i=1}^m c_i f_i$ имеет модуль непрерывности $\chi \leq \sum_{i=1}^m |c_i| \chi_i$.

II) Если последовательность функций $\{f_m\}$, рассматриваемых в одной и той же области (или замкнутой области), имеет там модули непрерывности $\chi_m(\tau) \leq \chi(\tau)$ и равномерно сходится ($f_m \rightarrow f$), то предельная функция f имеет модуль непрерывности $\leq \chi(\tau)$.

III) Если функции f_1 и f_2 имеют модули непрерывности χ_1 и χ_2 и ограничены: $|f_1| \leq C_1, |f_2| \leq C_2$, то их произведение $f_1 f_2$ имеет модуль непрерывности $\chi_2 \leq C_2 \chi_1 + C_1 \chi_2$.

IV) Пусть функция $F(X)$, где $X = \{x_1, \dots, x_n\} \in E^n$, определена и непрерывна в замыкании \bar{G} выпуклой области $G \subset E^n$ и имеет в \bar{G} модуль непрерывности $\chi(\tau)$ по совокупности аргументов. Пусть при этом $x_j = x(u_1, \dots, u_m) \in C^1(V)$, где $V \subset E^m, X(V) \subset G$ и все $\left| \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right| \leq R$. Тогда сложная функция $F(X(u_1, \dots, u_m))$ по своим аргументам u_k имеет в V модули непрерывности $\chi_k \leq \chi(R\tau\sqrt{m})$.

Свойства I—IV устанавливаются несложными выкладками с учетом определения модуля непрерывности для функции одного аргумента (см., например, [5]) и формулы (3.29).

Возвращаясь к рассмотрению оператора (3.28), примем следующие допущения.

A) $f_i(U) \in C^1(\bar{Q})$; модули непрерывности частных производных первого порядка у этих функций по каждому из аргументов на \bar{Q} не превосходят $\chi_0(\tau)$.

Б) $X(U) \in C^1(\bar{Q})$ и на \bar{Q} частные производные x_u', \dots, y_v' ограничены по модулю числом $R > 0$, а их модули непрерывности по каждому из аргументов не превосходят $\chi(\tau)$.

В) $X(\bar{Q}) \subset G$, где G — выпуклая область на E_x , и в \bar{G} функции $A(X)$ и $B(X)$ ограничены по модулю числом $c > 0$ и по со-

вокупности аргументов имеют модули непрерывности, не превосходящие $\chi_1(\tau)$.

Тогда справедлива

Лемма 6. Пусть $X(U)$ переводится в $Y = \{\xi, \eta\}$ оператором (3.28) и соблюдаются допущения А, Б, В. Тогда $\xi_u', \xi_v', \eta_u', \eta_v'$ имеют на \bar{Q} по каждому из аргументов u, v модули непрерывности, не превосходящие функции $\chi_*(\tau)$ такой, что

$$\chi_*(\tau) \leq 2cR^2\tau + \chi_0(\tau) + 2acR\chi(\tau) + 2aR^2\chi_1(R\tau\sqrt{2}), \quad (3.30)$$

где a — длина большей из сторон прямоугольника Q .

Доказательство. В условиях леммы 6 оценка (3.30) устанавливается после дифференцирования равенств (3.28) с учетом свойств I, III и свойства IV для $m=n=2$.

§ 4. ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЯ

1. Постановка задачи Дарбу. Для системы уравнений (3.1) будем искать решение, удовлетворяющее условиям вида

$$x(u, v_1) = x_I(u), \quad y(u, v_1) = y_I(u) \quad (4.1)$$

и

$$x(u_1, v) = x_{II}(v), \quad y(u_1, v) = y_{II}(v), \quad (4.2)$$

для которых соблюдается требование их согласования

$$x_I(u_1) = x_{II}(v_1) = x_0, \quad y_I(u_1) = y_{II}(v_1) = y_0. \quad (4.3)$$

При этом нужно считать, что точка $(x_0, y_0) = X_0$ принадлежит той области $G \subseteq E_X$, где заданы коэффициенты $A = A(X)$ и $B = B(X)$ (системы 3.1).

С точки зрения теории уравнений с частными производными было бы естественно задавать функции (4.1) и (4.2) на промежутках вида $[u_1, u_2]$ и $[v_1, v_2]$, а решение (3.2) искать на $Q = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ (не исключая возможности обращения в бесконечность u_2 и v_2), однако ниже мы будем рассматривать несколько иную ситуацию. Пусть Q — открытый прямоугольник $u_1 < u < u_2, v_1 < v < v_2; \bar{Q}$, как и выше, его замыкание. Пусть функции (4.1) и (4.2) заданы и являются C^1 -гладкими на отрезках $[u_1, u_2]$ и $[v_1, v_2]$ соответственно. Регулярным решением задачи Дарбу (4.1—3) для системы (3.1) условимся называть функцию $\{x, y\} = X(U)$, которая непрерывна на \bar{Q} и удовлетворяет условиям (4.1) и (4.2), внутри Q является C^1 -гладкой, имеет смешанную производную $\{x''_{uv}, y''_{uv}\}$ и удовлетворяет системе (3.1).

Решение $X(U)$ будем называть *гомеоморфным*, на Q (или \bar{Q}), если образ $X(Q)$ (или $X(\bar{Q})$) содержится в области $G \subset E_x$, где заданы коэффициенты A и B , и заданное этим решением отображение (3.2) является гомеоморфизмом.

З а м е ч а н и е. Следует иметь в виду, что система уравнений (3.1) инвариантна относительно C^1 -гладких монотонных замен аргументов u, v .

2. Теорема существования. Для удобства дальнейшей записи примем точку (u_1, v_1) за начало координат $(u_1 = v_1 = 0)$ на плоскости E_U и положим

$$f_1(u, v) = x_I(u) + x_{II}(v), \quad f_2(u, v) = y_I(u) + y_{II}(v). \quad (4.4)$$

Учитывая замечание в конце предыдущего пункта, мы можем, не ограничивая общности, считать, что Q — квадрат со стороной a .

Достаточное условие разрешимости сформулированной выше задачи Дарбу дает

Теорема 4. Пусть начальные данные (4.1—3) таковы, что $\|f\| \leq R_0$ в норме пространства \mathfrak{N} , а коэффициенты A, B системы (3.1) определены, непрерывны и ограничены по модулю числом c в круге $G_r \subset E_x$ с центром X_0 и радиусом

$$r > 4aR_0. \quad (4.5)$$

Тогда, при соблюдении условия (3.23), на \bar{Q} существует решение задачи Дарбу (4.1—3) для системы (3.1), регулярное внутри Q .

З а м е ч а н и е. Наводящим соображением для (4.5) служит лемма 4.

Доказательство теоремы 4. Обозначим через \mathcal{H}_x множество в \mathfrak{N} , состоящее из функций $X(U)$, таких, что на \bar{Q} модули непрерывности частных производных x'_u, \dots, y'_v по каждому из аргументов u, v не превосходят $\chi = \chi(\tau)$ и положим $\mathcal{E}_{R, \chi} = \mathcal{H}_x \cap \mathcal{E}_R$. Из свойств I, II (см. § 3, п. 6) и теоремы Арцела, примененной сначала к x_u, \dots, y_v , а затем к $\{x(u, v), y(u, v)\} = X \in \mathcal{E}_{R, \chi}$ следует, что $\mathcal{E}_{R, \chi}$ представляет собой выпуклый компакт в пространстве \mathfrak{N} . Интегрируя (3.1) по u и по v , переходим от поставленной задачи Дарбу к эквивалентной ей системе 3.20, в которой f определяется согласно (4.4), а ее решение будем искать как неподвижную точку оператора (3.28). Через $\chi_0(\tau)$ обозначим функцию, мажорирующую модули непрерывности на \bar{Q} по аргументам u, v функций $f'_{1u}, f'_{1v}, f'_{2u}, f'_{2v}$. Выберем число $r_1 \in (0, r)$ так, чтобы после замены r на r_1 неравенство (4.5) все еще соблюдалось, и построим функцию $\chi_1(\tau)$, которая мажорирует модули непрерывности функций $A(x, y)$ и $B(x, y)$ по совокупности аргументов на замкнутом круге G_{r_1} .

Положим

$$(1-4caR_0)^{-1}(\chi_0(\tau) + 8R_0^2(a\chi_1(2\sqrt{2}R\tau) + c\tau)). \quad (4.6)$$

Сопоставляя (3.30) и (4.6) и используя леммы 5 и 6 видим, что в рассматриваемой ситуации оператор (3.28) отображает в себя выпуклый компакт $\mathcal{E}_{2R_0, \tau}$ и потому имеет неподвижную точку в силу теоремы Шаудера.

3. Гладкость решения. Пусть начальные данные (4.1) и (4.2), удовлетворяя условию согласования (4.3), заданы и являются C^n -гладкими при $n \geq 2$ на полуинтервалах $[u_1, u_2)$ и $[v_1, v_2)$. Предположим, что удовлетворяющее им решение $X(U)$ существует на Q , причем образ $X(Q)$ на E_X содержится в такой области, где $A(X)$ и $B(X)$ являются C^{n-1} -гладкими. Тогда $X(U) \in C^n(Q)$.

Дело в том, что (3.1) при известных x, y, x'_v, y'_v образует систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно x'_u и y'_u с дифференцированием по аргументу v и параметром u . Аналогично, при известных x, y, x'_u, y'_u (3.1) можно рассматривать как систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно x'_v и y'_v с дифференцированием по u и параметром v . Поэтому здесь можно воспользоваться известными теоремами о гладкости решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [15], а также лемму 2.1 в § 2 статьи [16], где приведена формулировка, удобная для использования в данной ситуации).

4. Гомеоморфные решения. Предположим теперь, что начальные данные (4.1—2) задают C^1 -гладкие дуги длины l_1 и l_2 , исходящие из точки $X_0 \in E_X$, и образуют в этой точке угол

$$\omega_0 \in (0, \pi). \quad (4.7)$$

Учитывая замечание в конце пункта 1 этого параграфа, не ограничивая общности, можно считать, что u и v — натуральные параметры на l_1 и l_2 , а тогда $R_0 \leq 1$.

Пусть

$$l = \max\{l_1, l_2\}, \quad (4.8)$$

а коэффициенты системы (3.1) непрерывны и ограничены в круге G_r с центром X_0 :

$$|A(X)| < c, \quad |B(X)| < c \quad \text{при } X \in G_r, \quad r > 4l, \quad (4.9)$$

причем

$$8cl < 1. \quad (4.10)$$

Тогда условия теоремы 4 выполнены, так что решение $X(U)$ с такими начальными данными заведомо существует на пря-

моугольнике \bar{Q} , который в данном случае задается неравенствами

$$0 \leq u \leq l_1, \quad 0 \leq v \leq l_2. \quad (4.11)$$

В силу леммы 4 образ $X(\bar{Q})$ (для каждого решения, удовлетворяющего рассматриваемым здесь начальным данным) содержится G_r , и $\|X\| < 2$.

Дополнительно предположим, что на любом связном участке каждой из дуг l_j её поворот на E_X не превосходит величины δ_j ($j=1, 2$), причём

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \min \{ \omega_0, \pi - \omega_0 \} - \max \{ \delta_1 + 4cl_2, \delta_2 + 4cl_1 \} > 0. \quad (4.12)$$

Тогда решение $X(U)$ на \bar{Q} гомеоморфно.

Докажем это. Несложный подсчет, использующий (4.12) и лемму 3, показывает, что в $D = X(\bar{Q})$ каждая из линий $u = \text{const}$ пересекает все линии $v = \text{const}$: линии одного из этих семейств по отношению к биссектрисе угла ω_0 между касательными к дугам l_1 и l_2 , проведенными в точке X_0 , имеет положительный угловой коэффициент, а другого — отрицательный. Далее, аналогично § 3, находим, что

$$|(\ln e)'_v| = \left| \frac{Ax'_u + By'_u}{\sqrt{(x'_u)^2 + (y'_u)^2}} g \sin \omega \right| \leq 2c \|X\| \quad (4.13)$$

и такая же оценка получается для $|(\ln g)'_u|$. Из оценок вида (4.13) с учетом леммы 4 и выбора параметризации на l_1 и l_2 находим, что

$$e(u, v), g(u, v) \in [b^{-1}, b], \quad \text{где } b = \exp \{4cl\} \quad (4.14)$$

$\forall U = \{u, v\} \in \bar{Q}$. Но из (4.14) видно, что в D разные u -линии не могут встретиться друг с другом, так же как и разные v -линии. Из изложенного следует, что отображение $X: \bar{Q} \rightarrow D$ является гомеоморфизмом, а в замкнутой области $D \subset E_X$ можно ввести криволинейные координаты (u, v) .

Более того, установлена равномерная гомеоморфность отображений $X(U)$, удовлетворяющих условиям этого пункта. В самом деле, пусть точки $M, N \in D$; (u_M, v_M) и (u_N, v_N) — числовые значения их криволинейных координат; из (3.6), (4.12) и (4.14) получается двусторонняя оценка для расстояния $|MN|$ на E_X :

$$b_*^{-1} \vartheta \cos \omega_1 \leq |MN| \leq 2b_* \vartheta, \quad (4.15)$$

где $\vartheta = \max \{ |u_N - u_M|, |v_N - v_M| \}$, $b_* = \max \{ b^{-1}, b \}$, а ω_1 выражается согласно (4.12). Таким образом, установлена

Лемма 7. Пусть система уравнений (3.1) имеет непрерывные и ограниченные в G_r коэффициенты, а начальные данные (4.1—3) задают C^1 -гладкие дуги l_1 и l_2 на E_X с натуральными

параметрами u, v на них. Пусть при этом соблюдаются условия (4.7—10) и (4.12). Тогда для решения $X(U)$ задачи Дарбу соблюдаются оценки (4.15).

§ 5. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ И СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ

1. Обобщенные решения. Продолжим обсуждение задачи Дарбу, сформулированной в § 4. Введем дополнительные обозначения, нужные для дальнейшего. Пусть, как и выше,

$$Q_U = [0, u] \times [0, v] \subset \bar{Q} \subset E_x;$$

положим $D_U = X(Q_U)$. Символом $\sigma(\dots)$ будем далее обозначать площадь, $d\sigma$ — элемент площади. Как уже отмечалось выше, для регулярного решения мы можем от (3.1) и (4.1—3) перейти к (3.20). Если, сверх того, решение $X(U)$ гомеоморфно и якобиан $W = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$, то перейдя в двойном интеграле в (3.20) к координатам (x, y) , можем записать:

$$x(u, v) = f_1(u, v) + \iint_{D_U} A(x, y) d\sigma, \tag{5.1}$$

$$y(u, v) = f_2(u, v) + \iint_{D_U} B(x, y) d\sigma,$$

где f_1, f_2 выражаются согласно (4.4). Положительность (или, по крайней мере, неотрицательность) якобиана W для гомеоморфного регулярного решения $X(U)$ можно обеспечить, поменяв, если нужно, ориентацию на E_x .

Определение. Обобщенным решением задачи (4.1—3) для системы уравнений (3.1) будем называть функцию $X(U)$, непрерывную на \bar{Q} и такую, что отображение $\bar{Q} \rightarrow D = X(\bar{Q})$ является гомеоморфизмом, $D_U = X(Q_U)$ квадрируема на E_x и соблюдены равенства (5.1) $\forall U \in \bar{Q}$.

Теорема 5. Пусть коэффициенты $A(X), B(X)$ системы (3.1) измеримы и ограничены в круге G_r , а начальные данные (4.1—3) задают C^1 -гладкие дуги l_1 и l_2 , исходящие из центра X^0 круга G_r и образующие в точке X_0 угол ω_0 . Тогда, если соблюдаются условия (4.7—10) и (4.12), то существует обобщенное решение задачи Дарбу, причем оно гомеоморфно и единственно в классе гомеоморфных обобщенных решений.

Доказательство существования. Используя замечание в п. 1 § 4, мы можем, как и выше, считать, что u и v — натуральные параметры на l_1 и l_2 , так что \bar{Q} задается неравенствами (4.11). Коэффициенты $A(X)$ и $B(X)$ системы (3.1) аппроксимируем на G_r последовательностями непрерывных

функций $A_n(X)$ и $B_n(X)$ так, чтобы для A_n и B_n соблюдались равенства 4.10 с той же постоянной $c > 0$ и чтобы

$$\iint_{\sigma_r} (|A_n - A| + |B_n - B|) d\sigma \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Для каждого n найдем решение $X_n(U)$ задачи Дарбу для системы уравнений

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = A_n \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = B_n \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \quad (5.3)$$

с прежними начальными данными (4.1—3). Из теоремы 4 и леммы 4 следует, что функции $X_n(U)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны; поэтому, в силу теоремы Арцела, $X(U)$, непрерывная на \bar{Q} , и подпоследовательность X_{n_m} , равномерно сходящаяся на \bar{Q} к $X(U)$. Произведя перенумерацию в этой подпоследовательности, можем записать:

$$X_m(U) \rightrightarrows X(U) \text{ на } \bar{Q}. \quad (5.4)$$

Положим $D_{mU} = X_m(Q_U)$, а задачу Дарбу для системы (5.3) перепишем, аналогично (5.1), в интегральной форме

$$X_m(U) = f(U) + \iint_{D_{mU}} \mathcal{A}_m d\sigma, \quad \text{где } \mathcal{A}_m = \{A_m, B_m\}. \quad (5.5)$$

Равномерная сходимость (5.4) и условия (5.2) позволяют перейти к пределу в (5.5) и получить равенство (5.1) для предельной функции $X(U)$. Применяя при этом к решениям $X_m(U)$ лемму 7, устанавливаем гомеоморфность предельного решения $X(U)$. Спряжляемость границ фигур D_U на E_X следует из (4.4) и леммы 2, откуда, в свою очередь, вытекает квадрируемость $D_U \forall U \in Q$. Таким образом, существование решения доказано. Его единственности будет доказана ниже, в пункте 3 этого параграфа.

2 Сходимость последовательности решений. Наряду с системой (3.1), рассмотрим последовательность систем (5.5). Предположим, что соблюдаются перечисленные ниже условия.

а) G — выпуклая область на E_X , точка $X_0 \in G$, коэффициенты A, B измеримы и ограничены в G ($|A| \leq c, |B| \leq c$); начальные данные (4.1—3) являются C^1 -гладкими и таковы, что существует гомеоморфное (возможно — обобщенное) решение $X(U)$, причем $X(\bar{Q}) \subset G$.

б) Функции $\sqrt{A_m^2 + B_m^2}$ измеримы и суммируемы на G . В этой связи введем обозначение

$$\iint_G \sqrt{A_m^2 + B_m^2} d\sigma = b_m. \quad (5.6)$$

в) Последовательность начальных данных для систем (5.5), тоже C^1 -гладких, сходится равномерно к начальным данным

(4.1—3), задает на E_x дуги с равномерно ограниченными длинами и такова, что $\forall m$ обобщенные решения $X_m(U)$ существуют, причем все $X_m(Q) \subset G$.

д) Разности $\mathcal{A}_m - \mathcal{A} = \Psi_m = \{\psi_{1m}, \psi_{2m}\}$, где $\mathcal{A} = \{A, B\}$, допускают разложение

$$\psi_{jm} = \alpha_{jm} + \zeta_{jm} + \frac{\partial \beta_{jm}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial y} \quad (j=1, 2), \quad (5.7)$$

в котором ζ_{jm} равномерно ограничены, $|\zeta_{jm}| \leq M$; β_{jm} при фиксированных y абсолютно непрерывны по x ; γ_{jm} при фиксированных x абсолютно непрерывны по y ;

$$|\beta_{jm}| \leq \lambda_m, \quad |\gamma_{jm}| \leq \lambda_m, \quad \text{где } \lambda_m \rightarrow 0, \quad b_m \lambda_m \rightarrow 0 \quad (5.8)$$

и

$$R_m = \iint_G (|\alpha_{1m}| + |\alpha_{2m}|) d\sigma \rightarrow 0 \quad (5.9)$$

при $m \rightarrow \infty$.

е) От слагаемых ζ_{jm} дополнительно требуем:

$$\sup_{U \in Q} \left| \iint_{D_U} \zeta_{jm} d\sigma \right| = \delta_{jm} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (5.10)$$

для $j=1, 2$.

Тогда справедлива

Теорема 6. При соблюдении условий $a—e$ имеет место равномерная сходимость (5.4).

Доказательство. Прежде всего отметим, что лемма 2 распространяется на обобщенные решения системы вида (3.1) с измеримыми коэффициентами из $L^2(G)$, если решение существует, а стороны сетевого четырехугольника \mathcal{D} спрямляемы; при этом достаточно предполагать спрямляемость двух сторон четырехугольника \mathcal{D} , исходящих из одной его вершины. Доказать это можно по-разному: либо использовать, аналогично § 4, аппроксимацию коэффициентов системы непрерывными функциями; либо иначе, используя интегральную форму записи (3.20) и разбив сетевой четырехугольник линиями сети на малые сетевые четырехугольники, и это же неограниченно измельчающееся разбиение использовать для аппроксимации граничных дуг вписанными в них ломаными линиями. Этим обобщением леммы 2 мы воспользуемся ниже.

Пусть (как и в §§ 3—4) $D_U = X(Q_U)$; аналогично положим $D_{mv} = X_m(Q_U)$, через ∂Q_U обозначим границу прямоугольника Q_U , а через L_{mv} — границу D_{mv} . Далее нам понадобятся величины

$$r = r(m, U) = \sup_{U \in Q_U} \sqrt{(x_m(\dot{U}) - x(\dot{U}))^2 + (y_m(\dot{U}) - y(\dot{U}))^2} \quad (5.11)$$

и

$$\rho = \rho(m) = \sup_{U \in Q_U} r(m, U). \quad (5.12)$$

Начальные данные последовательности задач Дарбу, о которых идёт речь в условии «с», будем обозначать аналогично (4.1—4), но с заменой буквы f на h ; составим выражение

$$r_0(\dot{U}) = \sup_{\dot{U} \in \partial Q_U} \sqrt{(h_1(\dot{U}) - f_1(\dot{U}))^2 + (h_2(\dot{U}) - f_2(\dot{U}))^2} \quad (5.13)$$

используем ниже величину

$$\rho_0 = \sup_{\dot{U} \in Q_U} r_0(\dot{U}) = \rho_0(m, U). \quad (5.14)$$

Нужно иметь в виду, что $h = \{h_1, h_2\}$ и r_0 в (5.13) фактически зависят от номера m , но он там не выписан, чтобы не затруднять обозначения, а в (5.14) зависимость от m указана.

Аналогично доказательству леммы 4, используем гомотетию с коэффициентом $t \in (0, 1]$ и аналогично (5.12) введём величину $\rho(m, U, t)$, которую мы будем использовать при фиксированных m и U и потому обозначим короче: $\rho(t)$. Для дальнейшего важно, что

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \rho(t) \leq \rho_0. \quad (5.15)$$

Через $\mathcal{P}(U)$ и $\mathcal{P}(m, U)$ обозначим длины периметров криволинейных четырёхугольников D_U и D_{mU} на E_X . Пусть l — сумма длин двух сторон сетевого четырёхугольника $D = X(Q)$, исходящих из точки X_0 , а число $L > 0$ мажорирует аналогичную сумму длин для всех $D_m = X_m(Q)$; $L < +\infty$ в силу условия «с». Из условия «а» и обобщения леммы 2 имеем оценку:

$$\mathcal{P}(U) \leq 2P, \text{ где } P = c\sigma(D) + l, \quad (5.16)$$

а учитывая ещё и (5.6), находим:

$$\mathcal{P}(m, U) \leq 2L + b_m. \quad (5.17)$$

После проведённой предварительной подготовки переходим к оценке уклонения решения $X_m(U)$ от $X(U)$. Из (5.1) и (5.5) с учётом условия «с» и обозначения (5.13) можем записать, что

$$|x_m(U) - x(U)| \leq r_0(m, U) + \left| \iint_{D_{mU}} A_m d\sigma - \iint_{D_U} A d\sigma \right|. \quad (5.18)$$

Преобразуем входящую в (5.18) разность интегралов;

$$\iint_{D_{mU}} A_m d\sigma - \iint_{D_U} A d\sigma = \oint_{L_{mU}} (\gamma_{1m} dx + \beta_{1m} dy) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \iint_{D_{mU} \setminus D_U} (A + \xi_{1m}) d\sigma - \iint_{D_U \setminus D_{mU}} (A + \xi_{1m}) d\sigma \right\} + \quad (5.19) \\
& + \iint_{D_U} \xi_{1m} d\sigma + \iint_{D_{mU}} \alpha_{1m} d\sigma.
\end{aligned}$$

Здесь через L_{mU} обозначена граница D_{mU} , а для перехода к контурному интегралу использована формула Грина при минимальных требованиях регулярности на границу области [14]. Равномерная ограниченность слагаемых ξ_{jm} (см. условие «d») и гомеоморфность отображений $X(U)$ и $X_m(U)$ позволяют следующим образом оценить разность двойных интегралов, взятых в (5.19) в фигурные скобки:

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{D_{mU} \setminus D_U} (A + \xi_{1m}) d\sigma - \iint_{D_U \setminus D_{mU}} (A + \xi_{1m}) d\sigma \right| \leq \quad (5.20) \\
& \leq (c + M) \sigma(D_{mU} \nabla D_U).
\end{aligned}$$

Симметрическая разность множеств D_{mU} и D_U на E_X содержится в δ -окрестности границы ∂D_U при $\delta = r(m, U)$, см. (5.11); поэтому, учитывая (3.4), имеем

$$\sigma(D_{mU} \nabla D_U) \leq \mathcal{P}(U) r(m, U) + \pi r^2(m, U). \quad (5.21)$$

Используя (5.12), (5.16) и несколько закругляя (5.21), получаем важную для дальнейшего оценку

$$\sigma(D_{mU} \nabla D_U) \leq 2P\rho(m, U) + \pi r^2(m, U). \quad (5.22)$$

Учитывая (5.8) и (5.17), оцениваем входящий в (5.19) контурный интеграл:

$$\left| \oint_{L_{mU}} (\gamma_{1m} dx + \beta_{1m} dy) \right| \leq 2(b_m + 2L)\lambda_m. \quad (5.23)$$

Введём ещё одно вспомогательное обозначение:

$$\Lambda(m) = \mathcal{R}_m + \delta_{1m} + \delta_{2m} + 4(b_m + 2L)\lambda_m; \quad \Lambda_m \rightarrow 0 \quad (5.24)$$

при $m \rightarrow \infty$ вследствие (5.8—10). Собирав вместе оценки (5.20) и (5.22—24), учитывая представление (5.19) и проведя аналогичные выкладки для разности $y_m - y$, находим, что

$$\begin{aligned}
& |x_m(U) - x(U)| + |y_m(U) - y(U)| \leq \\
& \leq \Lambda(m) + 2\rho_0(m, U) + 2P\rho(m, U) + \pi r^2(m, U). \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Пусть на E_U точка $V \in \partial Q_U$; тогда, как нетрудно проверить, (5.25) сохранится в силе, если в левой части заменить U на V , а правую часть оставить без изменений. Взяв после этого \sup по $V \in \partial Q_U$, получаем:

$$\rho \leq \Lambda + 2\rho_0 + 2P\rho + \pi r^2. \quad (5.26)$$

В записи (5.26) аргументы m , U считаются зафиксированными и потому не выписаны.

Выделим частный случай, когда

$$P = c\sigma(D) + l < \frac{1}{2}. \quad (5.27)$$

Из (5.26) и (5.27) следует, что

$$\frac{\pi}{1-2P} \rho^2 - \rho + \frac{\Lambda + 2\rho_0 + \varepsilon}{1-2P} > 0, \quad (5.28)$$

если $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись равномерной сходимостью начальных данных (см. условие «с») и учитывая (5.24), будем далее считать, что для фиксированной точки U номер m выбран столь большим, а $\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$\Lambda(m) + 2\rho_0(m, U) + \varepsilon < \frac{1}{4\pi} (1-2P)^2. \quad (5.29)$$

А теперь используем упомянутую выше гомотетию с коэффициентом $t \in (0, 1]$. Проследив ещё раз ход проведённых выше оценок, можно заметить, что (5.26), а вместе с тем и (5.28) остаются в силе для $\rho = \rho(t)$. Функция $\rho(t)$ непрерывна вследствие непрерывности $X(U)$ и $X_m(U)$. Согласно (5.15), можно при фиксированных U , m , ε выбрать $t_1 > 0$ столь малым, что

$$\rho^2(t_1) < \frac{1}{\pi} (\Lambda(m) + 2\rho_0(m, U) + \varepsilon). \quad (5.30)$$

Оценки (5.29) и (5.30) позволяют применить на отрезке $[t_1, 1]$ к неравенству (5.28) лемму 1, которая здесь нам даёт

$$\rho(m, U) < 2(\Lambda(m) + 2\rho_0(m, U) + \varepsilon). \quad (5.31)$$

Положим

$$R(m) = \sup_{U \in \bar{Q}} \rho_0(m, U); \quad R(m) \rightarrow 0 \quad (5.32)$$

при $m \rightarrow \infty$, вследствие условия «с». Из (5.31—32) посредством предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем равномерную оценку:

$$\rho(m, U) \leq 2\Lambda(m) + 4R(m) \quad \forall U \in \bar{Q}. \quad (5.33)$$

Из (5.33) (с учётом (5.32) и 5.24)) следует сходимость (5.4) при соблюдении неравенства (5.27).

В общем случае четырёхугольник D нужно разбить на конечное число достаточно малых сетевых четырёхугольников и для каждого из них последовательно провести рассуждения и оценки, аналогичные изложенным, чем и завершится доказательство теоремы 6.

Примечание. В работе [19] в формулировке теоремы о сходимости последовательности решений допущена неточность. Именно, в той её части, которая в данном изложении соответствует условию «е» и входящему в него требованию (5.10), в работе [19] вместо множества $\{D_\sigma\}$ фигурировало более обшир-

ное множество «пробных областей», по которым берутся интегралы, однако отсутствовал $\sup | \dots |$. Настоящей публикацией этот дефект работы [19] исправляется. Что касается приключения результатов из [19] в [21], то они остаются в силе, так как там $\zeta_{jm} = 0$.

3. Единственность решения. Предположим, что в условиях теоремы 5 существуют два решения $X(U)$ и $X_1(U)$ одной и той же задачи Дарбу. Зафиксируем первое из них, а второе будем рассматривать как последовательность $\{X_m\}$ совпадающих между собой решений ($X_m(U) = X_1(U) \forall m \geq 1$); применим к ней теорему 6; поскольку здесь $\Psi = 0$ и $\rho_0 = 0$ тождественно, имеем $X_1(U) = X(U)$.

§ 6. О СХОДИМОСТИ СЕТЕЙ ПО ПАРАМЕТРУ

Вернёмся к обсуждению свойств сети, заданной уравнением вида (1.1), коэффициенты которого по-прежнему считаем C^n -гладкими, $n \geq 1$. Пусть такая сеть параметризована — служит сетью криволинейных координат (u, v) в некоторой области G на плоскости E_x ; параметризацию можно выбрать так, чтобы x, y были C^1 -гладкими функциями аргументов u, v . Тогда, как показано в [17], существуют смешанные производственные x''_{uv}, y''_{uv} и x, y удовлетворяют системе вида (1.1), коэффициенты которой при нормировке (1.2) выражаются формулами

$$A = \frac{1}{2}(b'_y - c'_x), \quad B = \frac{1}{2}(b'_x - a'_y). \quad (6.1)$$

Тем самым, открывается возможность применить результаты, изложенные в §§ 1, 4 и 5, для изучения свойств сетей. При этом следует учитывать, что в отличие от уравнения (1.1), которым сеть определяется однозначно, система (3.1) определяет множество сетей, из которого каждая конкретная сеть выделяется, например, заданием двух её пересекающихся линий, рассматриваемых в качестве начальных данных задачи Дарбу.

Напомним, что сеть называется *чебышевской*, если в каждом сетевом четырёхугольнике длины противоположных сторон попарно равны (как в параллелограмме на евклидовой плоскости). Из леммы 2 видно, что если $A = B = 0$ тождественно, то сеть — чебышевская; более того, верно и обратное, так что множество чебышевских (C^1 -гладких) сетей на евклидовой плоскости можно рассматривать с этой точки зрения как общее решение системы уравнений

$$x''_{uv} = 0, \quad y''_{uv} = 0; \quad (6.2)$$

в этой связи см. [8].

Из леммы 2 следует также, что если A и B ограничены, то сеть обладает *обобщенным чебышевским свойством*, см. [7]; напомним: это означает, что разность длин противоположных сторон каждого сетевого четырехугольника оценивается сверху величиной, пропорциональной его площади.

В теории поверхностей уравнения вида (3.1) были использованы в работе [23] при изучении свойств сети асимптотических линий.

В случае характеристической сети гиперболического отображения вида (1.14) коэффициенты (6.1) выражаются следующим образом (см. [17]):

$$A = -\frac{1}{2}(\mu'_p \delta^2 + \nu'_y) = -\frac{1}{2}((1-\nu^2)(\mu^{-1})'_p + \nu'_y) \quad (6.3)$$

и

$$B = -\frac{1}{2}(\mu'_q \delta^2 - \nu'_x) = -\frac{1}{2}((1-\nu^2)(\mu^{-1})'_q - \nu'_x), \quad (6.4)$$

где $\delta^2 = -\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)}$, а μ и ν выражаются, согласно (1.18).

Для сетей, зависящих от параметра, теоремы из § 5 позволяют получать результаты о сходимости, которые связаны с нелокальными свойствами коэффициентов уравнений, определяющих сеть.

Пример. Пусть дано семейство отображений евклидовой плоскости в себя, в декартовых прямоугольных координатах задаваемое формулами

$$p = y + Y_1(x, y, \tau), \quad q = x + Y_2(x, y, \tau), \quad (6.5)$$

где $Y = \{Y_1, Y_2\} \in C^2$ в полупространстве $\tau > \tau_0$ пространства переменных (x, y, τ) . Пусть $Y = 0$ для $x < 0$ и для $y < 0$, а при $x \geq 0, y \geq 0$

$$\left| (Y_1)'_y + (Y_2)'_x - \frac{\partial(Y_1, Y_2)}{\partial(x, y)} \right| < 1. \quad (6.6)$$

Неравенство (6.6) обеспечивает гиперболичность отображения (6.5). Пусть G — замкнутый квадрант $x \geq 0, y \geq 0$ на плоскости E_x , а D_x — прямоугольник со сторонами $[0, x]$ и $[0, y]$, где $X = (x, y) \in G$. Ниже будем использовать величины (1.18), вычисленные для (6.5); они зависят от параметра: $\mu = \mu(X; \tau)$, $\nu = \nu(X; \tau)$. Пусть известно, что характеристическая сеть отображения (6.5) правильна в целом для каждого τ , а при $\tau \rightarrow +\infty$ соблюдаются перечисленные ниже дополнительные условия.

1) $\exists M > 0$ такое, что $|\mu'_p| \leq M, |\mu'_q| \leq M$.

2) $\sup_{x \in G} \left| \int_{D_x} \mu'_p d\sigma \right| = \delta_1(\tau), \quad \sup_{x \in G} \left| \int_{D_x} \mu'_q d\sigma \right| = \delta_2(\tau), \quad \delta_1(\tau) \rightarrow 0.$

3) $v = v_1 + v_2$, где $|v_1(X; \tau)| < v_0(\tau) \rightarrow 0$.

$$4) \iint_G (|\mu'_p| + |\mu'_q| + |v'_x| + |v'_y|) d\sigma = \mathfrak{b}(\tau) < +\infty; \quad \mathfrak{b}(\tau) v_0(\tau) \rightarrow 0.$$

$$5) \iint_G (|\mu'_p| + |\mu'_q|)^2 + |(v_2)'_x| + |(v_2)'_y|) d\sigma = \mathfrak{R}(\tau) \rightarrow 0.$$

Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$ характеристическая сеть отображения (6.5) сходится к декартовой сети ($x = \text{const}$, $y = \text{const}$) равномерно относительно $X \in G$ вследствие теоремы 6.

§ 7. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В трехмерном евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность S с внутренней метрикой отрицательной кривизны. Предположим, что на S отмечено замкнутое множество \mathcal{M} , расположенное на дуге $\mathcal{L} \subset S$ и что соблюдаются условия «а—д», перечисленные ниже.

а) Поверхность S гомеоморфна открытому кругу, является C^1 -гладкой, имеет край ∂S (множество граничных точек поверхности S в смысле ее внутренней метрики); $\bar{S} = S \cup \partial S$ гомеоморфна замкнутому кругу.

б) Линия \mathcal{L} гомеоморфна открытому интервалу, спрямляема, является C^2 -гладкой и имеет в E^3 ограниченную кривизну; $\partial \mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L}$ состоит из двух точек — концов \mathcal{L} на \bar{S} .

в) Гауссово сферическое отображение поверхности S является локальным гомеоморфизмом.

г) Множество \mathcal{M} замкнуто на S . Поверхность $\tilde{S} = S \setminus \mathcal{M}$ является C^{n+1} -гладкой, $n \geq 2$, а во всех точках множества \mathcal{M} (если $\mathcal{M} \neq \emptyset$) C^{n+1} -гладкость поверхности S нарушена.

д) На \tilde{S} гауссова кривизна $K < 0$ и ограничены геодезические кривизны асимптотических линий и средняя кривизна H .

Тогда справедлива

Теорема 7. Пусть в условиях а—д внутренняя метрика поверхности S имеет C^n -гладкую отрицательную гауссову кривизну, $n \geq 2$. Тогда либо $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ и $\partial \mathcal{L} \subset \partial S$, либо $\mathcal{M} = \emptyset$.

Следствие. Если в условиях теоремы 7 дополнительно потребовать, что $\partial \mathcal{L} \cap \partial S = \emptyset$, то $S \in C^{n+1}$.

З а м е ч а н и е. Фактически это — теорема об устранимой особенности на поверхности. Примеры показывают, что если $\partial \mathcal{L} \cap \partial S \neq \emptyset$, то особая дуга $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ может существовать; в этой связи см. ниже, пункт 1° § 8. С другой стороны, если не потребовать высокой гладкости кривизны, то особая дуга $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, не выходящая своими концами на край ∂S поверхности S , тоже

может существовать, причем с соблюдением всех условий а—д, см. [20].

Важным этапом доказательства теоремы 7 является применение теорем 5 и 6. При этом нормальное отображение поверхности аппроксимируется семейством отображений, которые являются гиперболическими и непотенциальными: $v \neq 0$ в переменной окрестности множества \mathcal{M} , стягивающейся к этому множеству (в предположении, что $\mathcal{M} \neq \emptyset$ и $\partial \mathcal{L} \cap \partial S = 0$). Вне этой окрестности характеристики аппроксимирующихся отображений совпадают с проекциями асимптотических линий поверхности \bar{S} на касательную плоскость Π к поверхности S . Теорема 5 позволяет установить существование предельной сети и ее правильность, а при помощи теоремы 6 устанавливается сходимость к ней характеристических сетей семейства аппроксимирующих отображений. Таким путем доказывается, что асимптотическая сеть поверхности \bar{S} допускает продолжение на множество \mathcal{M} с сохранением ее правильности.

Дальнейшее исследование показывает, что гладкость кривизны K внутренней метрики влечет за собой гладкость линий продолженной на \mathcal{M} асимптотической сети, а использование результатов из [16] позволяет после этого доказать требуемую гладкость поверхности S .

Теорема 7 была объявлена в [21], а ее подробное доказательство публикуется в «Трудах» Московского Математического общества. Частный случай, когда $K = \text{const} < 0$, был рассмотрен ранее, см. [18]; здесь доказательство тоже фактически опирается на теоремы 5 и 6 и результаты из [21], но при $K = \text{const}$ более простыми, чем в общем случае, рассуждениями устанавливается гладкость продолженной асимптотической сети.

§ 8. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. Обобщенные решения одного гиперболического уравнения Монжа—Ампера и достаточное условие их C^n -гладкости. В этом параграфе будем пользоваться обозначениями Монжа для частных производных искомой функции:

$$z = z(x, y); \quad z'_x = p, \quad z'_y = q, \quad z''_{xx} = r, \quad z''_{xy} = s, \quad z''_{yy} = t. \quad (8.1)$$

Рассмотрим уравнение

$$rt - s^2 + \alpha^2(1 + p^2 + q^2)^2 = 0, \quad (8.2)$$

где $\alpha = \text{const} > 0$. Графики его C^2 -гладких решений — поверхности постоянной гауссовой кривизны $K = -\alpha^2$. В работе [22] построены и исследованы аналитические поверхности постоянной отрицательной кривизны, содержащие прямолинейные образующие. Пусть S — такая поверхность, \mathcal{L} — ее прямолинейная образующая, точка $P \in \mathcal{L}$. Построим касательную плоскость Π в

точке P и открытый геодезический круг \mathcal{G}_ρ радиуса ρ на S с центром P . Если $\rho > 0$ достаточно мало, то \mathcal{G}_ρ однолистно проектируется на Π и может рассматриваться как график (при конкретном α) решения уравнения (8.2). Прямолинейный отрезок $l \subset \mathcal{L}$ служит диаметром круга \mathcal{G}_ρ и разбивает его на два открытых геодезических полукруга \mathcal{g}_1 и \mathcal{g}_2 . Пусть \mathcal{g}_3 — поверхность, в E^3 , симметричная \mathcal{g}_1 относительно \mathcal{L} . Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{g}_1 \cup l \cup \mathcal{g}_3$ представляет собой C^1 -гладкую поверхность в E^3 , причем из результатов работы [22] следует, что изложенное построение поверхности \mathcal{P} можно выполнить так, что ее C^2 -гладкость заведомо будет нарушена на линии l . Так получается пример, упомянутый в замечании к теореме 7: надлежащий подсчет показывает, что все условия а—д здесь можно обеспечить.

Можно показать (в этой связи см., например, [2]), что \mathcal{P} изометрична кругу радиуса ρ на плоскости Лобачевского; внутренняя метрика поверхности \mathcal{P} имеет постоянную кривизну $K = -\alpha^2$ (включая точки отрезка l).

О п р е д е л е н и е. Обобщенным решением уравнения (8.2) будем называть функцию $z(x, y) \in C^1(\mathcal{U}) \cap C^2(\tilde{\mathcal{U}})$, где \mathcal{U} — открытая область, $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \setminus l$, а множество l представимо в виде объединения конечного числа гладких дуг, удовлетворяющую в $\tilde{\mathcal{U}}$ уравнению (8.2).

Частный случай теоремы 7, обсуждавшийся в конце § 7 ($K = \text{const} < 0$), приводит к достаточному условию, при котором обобщенное решение уравнения (8.2) оказывается C^n — гладким, $n \geq 3$; не останавливаясь на его подробной формулировке (которую нетрудно получить, исходя из требований а—д), отметим, что в нем важно, чтобы простая дуга $l = \mathcal{L}$ не выходила своими концами на границу области (см. рис. 4а).

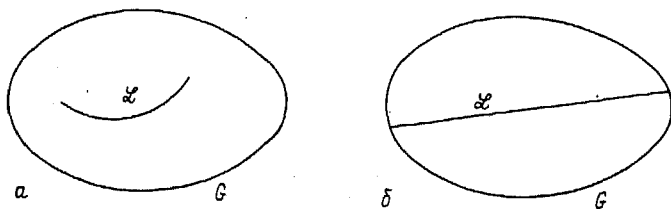


Рис. 4

Поверхность \mathcal{P} служит графиком такого обобщенного решения уравнения (8.2), которое заведомо не является C^2 -гладким; линия $l = \mathcal{L}$ здесь выходит своими концами на границу области \mathcal{U} (см. рис. 4б). По-видимому не случайно, что l в этом примере — прямолинейный отрезок, однако теорема, которая подтверждала бы это явление, пока неизвестна, хотя некоторые наводящие соображения можно найти в работе [13].

2. Приведение к каноническому виду квазилинейного гипер-

болического уравнения. Пусть в уравнении

$$c(x, y)r - 2b(x, y)s + a(x, y)t + \mathcal{F}(x, y, z, p, q) = 0 \quad (8.3)$$

функция \mathcal{F} непрерывна, а коэффициенты при старших производных являются C^2 -гладкими на всей плоскости и таковы, что сеть (1.1) правильна в целом. Тогда уравнение (8.3) допускает в целом на всей плоскости (x, y) приведение к каноническому виду

$$\omega_{uv}'' = \Phi(u, v, \omega, \omega_u', \omega_v'), \quad (8.4)$$

где ω — новая искомая функция (см. [9]). Дело в том, что уравнение (1.1) с теми же функциями a, b, c в качестве коэффициентов, какие участвуют в (8.3), задаёт сеть характеристик уравнения (8.3), которая и принимается за координатную. Требуемая для перехода от (8.3) к (8.4) C^2 -гладкость преобразования (3.2) может быть обоснована, например, при помощи пункта 2 из § 4.

Отметим попутно, что результаты из § 1 могут быть использованы также при изучении строения сети характеристик для гиперболических уравнений Монжа—Ампера вида

$$rt - s^2 + F^2(x, y, z, p, q) = 0, \quad F > 0 \quad (8.5)$$

и для получения теорем о единственности решения задачи Дарбу для таких уравнений. Дело в том, что проекции характеристик уравнения (8.5), построенных на его решении $z(x, y)$ (или, как их иногда называют, характеристические проекции), задаются на плоскости (x, y) уравнением

$$rdx^2 + 2sdx dy + tdy^2 = 0, \quad (8.6)$$

где r, s, t определяются согласно (8.1). Подробности см. [9], [10] и [13].

3. О сходимости по параметру решений задачи Дарбу для одного класса гиперболических уравнений Монжа—Ампера. В отличие от изложенного выше, результат этого пункта является новым и публикуется впервые. Прежде чем перейти к его формулировке, рассмотрим уравнение

$$rt - s^2 + \alpha^2 = 0, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (8.7)$$

Оно $\forall n \geq 2$ имеет C^n -гладкие решения, определённые на всей плоскости E_x ; например, $z = xy + h(x)$, где $h(x) \in C^n(-\infty, +\infty)$.

При $n \geq 3$ из (8.7), (8.6) и (6.1) видно, что уравнения (3.1) для сети характеристических проекций решений уравнения (8.6) приводятся к виду (6.2), так что каждая такая сеть является чебышевской, а потому она правильна в целом.

Пусть $z_*(x, y) \in C^3(E_x)$ — фиксированное решение уравнения (8.6); L_1 и L_2 — проекции его характеристик, проходящие через точку $O \in E_x$.

Ниже понадобятся обозначения:

$$z_*(O) = z_0, \quad p_*(O) = p_0, \quad q_*(O) = q_0, \quad (8.8)$$

где p_* , q_* определяются для z_* , согласно (8.1).

Возвращаясь к более общему уравнению (8.5), отметим, что вопрос о существовании таких его решений, которые определены на всей плоскости, изучен ещё не полностью. Известны достаточные условия на функцию F , при которых (8.5) не имеет решений класса $C^2(E_X)$, см. [1]. Однако примеры показывают, что множество объектов (уравнений и их решений), удовлетворяющих требованиям теоремы 8 (см. ниже), не пусто.

Фактически мы будем рассматривать не одно уравнение вида (8.5), а семейство, зависящее от параметра. Именно, пусть

$$F = \alpha + f(x, y; z; p, q)g(\tau), \quad (8.9)$$

где «;» разделяет аргументы, которые ниже играют существенно разную роль, а

$$g(\tau) \in C^1(\tau_0, +\infty); \quad 0 < g(\tau) \leq m_0; \quad g(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (8.10)$$

Аналогично пункту 4 из § 1, используем обозначения ∇_{xy} и ∇_{pq} для градиентов функций по аргументам (x, y) и (p, q) соответственно; употребляя эти символы, будем считать, что при вычислении производных остальные аргументы фиксируются, а затем могут выступать как параметры. Символами $\frac{\delta}{\delta x}$ и $\frac{\delta}{\delta y}$

обозначим частные производные сложных функций, вычисляемые с учетом зависимости всех величин (8.1) от x, y .

Относительно функции f предположим, что она является C^2 -гладкой и финитной. Ее носитель в пространстве E^5 аргументов x, y, z, p, q обозначим через Ω , а его проекцию на E_X — символом \mathcal{W} . Положим

$$m_1 = \sup_{\Omega} |\nabla_{xy} f|, \quad m_2 = \sup_{\Omega} |f'_z|, \quad m_3 = \sup_{\Omega} |\nabla_{pq} f|. \quad (8.11)$$

Величины (8.11) конечны вследствие финитности f .

Пусть \mathfrak{M} — подмножество функций $z(x, y)$ из $C^2(E_X)$, для которых

$$\sup_{\mathcal{W}} (\max\{|r|, |s|, |t|\}) \leq M, \quad (8.12)$$

где $M > 0$ — фиксированное число.

Докажем, что справедлива

Теорема 8. Пусть $z = z(X; \tau) \in \mathfrak{M} \cap C^4(E_X)$ при $\tau = \text{const}$ и является решением уравнения вида (8.5), причем $z(O; \tau) = z_0$, $p(O; \tau) = p_0$, $q(O; \tau) = q_0$, а характеристические проекции, проходящие через точку O , совпадают с L_1 и $L_2 \forall \tau \in (\tau_0, \infty)$. Тогда если F выражается формулой (8.9) при условиях (8.10), то $z(X; \tau) \rightarrow z_*(X)$ при $\tau \rightarrow +\infty$ на E_X , равномерно на каждом ее компактном множестве.

Для доказательства понадобится

Лемма 8. Пусть C^1 -гладкая простая дуга L на евклидовой плоскости E^2 соединяет точки P_1 и P_2 и в некоторой окрестности дуги L задана C^1 -гладкая функция $f_*(x, y)$ и семейство функций $f(x, y; \tau) \rightarrow f_*(x, y)$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Пусть последовательность простых дуг L_n с теми же концами P_1 и P_2 на E^2 равномерно сходится к L . Тогда $\int_{L_n} f(x, y; \tau_n) dx \rightarrow \int_L f_*(x, y) dx$ при $n \rightarrow \infty$, если $\tau_n \rightarrow +\infty$.

Доказательство леммы 8 для краткости опускаем, так как оно проводится рассуждениями, стандартными для математического анализа.

Доказательство теоремы 8. Подставим решение z и его производные в выражение (8.9). Полученные в результате из f и F функции аргументов x, y , рассматриваемые при фиксированном τ , пометим тильдой. Для них имеем тождества

$$\text{grad } \tilde{F}(x, y) = g(\tau) \text{grad } \tilde{f}(x, y) \quad (8.13)$$

и

$$\begin{aligned} \text{grad } \tilde{f}(x, y) &= \nabla_{xy} f(x, y; z(x, y); p(x, y), q(x, y)) = \\ &= \nabla_{xy} f(x, y; z; p, q) + \\ &+ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} f'_z + \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \nabla_{pq} f(x, y; z; p, q). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Пусть $\rho_1 > 0$ столь велико, что $\mathcal{M} \subset G_{\rho_1}$ (где G_{ρ} — круг радиуса ρ на E_X с центром O). Из (8.11) и (8.12) следует, что

$$\begin{aligned} \max\{|p(X; \tau)|, |q(X; \tau)|\} &\leq M_1 = \\ &= |p_0| + |q_0| + 2\rho_1 M \text{ при } X \in G_{\rho_1}, \tau \in (\tau_0, +\infty). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Из (8.14) и (8.15) имеем

$$|\text{grad } \tilde{f}| \leq M_2 = m_1 + 2M_1 m_2 + 4M m_3. \quad (8.16)$$

Из (8.16) следует, что \tilde{f} ограничена на G_{ρ_1} равномерно относительно выбора $z \in \mathcal{M}$, а на $E_X \setminus G_{\rho_1}$ функция $\tilde{f} = 0$ тождественно в силу finитности f и выбора ρ_1 . Таким образом, $\exists M_0 > 0$ такое, что $|\tilde{f}| < M_0 \forall X \in E_X$ и $\forall \tau \in (\tau_0, +\infty)$.

Выберем $\tau_1 = \tau_1(\lambda)$ столь большим, что $g(\tau) < \lambda \alpha M_0^{-1}$ для $\lambda \in (0, 1)$, если $\tau > \tau_1$. Будем считать далее, что λ выбрано и $\tau > \tau_1(\lambda)$. Тогда

$$(1 - \lambda)\alpha < |\tilde{F}| = |\alpha + g\tilde{f}| < (1 + \lambda)\alpha. \quad (8.17)$$

Сеть характеристических проекций для $z(X; \tau)$ потенциальна в силу (8.6), так как (1.13) для нее соблюдено при $Z = z(X; \tau)$. Используя (8.9), (8.10), (8.16) и (8.17) и учитывая, что

$$\kappa = \tilde{F}, \quad (8.18)$$

в силу уравнения (8.5), находим, что

$$\Phi_0(\rho) = (1+\lambda)\alpha\rho \quad (8.19)$$

и

$$\Phi_1(\rho) \leq m_0 \iint_W |\text{grad } \tilde{f}| d\sigma \leq \pi\rho^2 m_0 M_2. \quad (8.20)$$

Таким образом, здесь применима теорема 1; с учетом (8.17—20) и замечания 1 из пункта 1 § 1 видно, что сеть характеристических проекций для $z(X; \tau)$ правильна в целом на $E_X \forall \tau > \tau_1$.

Используя (6.1), вычислим для этой сети коэффициенты уравнений (3.1); учитывая (8.18), имеем:

$$A = A(X; \tau) = \left(s \frac{\delta f}{\delta x} - r \frac{\delta f}{\delta y} \right) (\alpha + fg)^{-2} g \quad (8.21)$$

и

$$B = B(X; \tau) = \left(t \frac{\delta f}{\delta x} - s \frac{\delta f}{\delta y} \right) (\alpha + fg)^{-2} g. \quad (8.22)$$

Из (8.21) и (8.22), с учетом (8.13), (8.14) и оценок (8.16) и (8.17), находим, что

$$\sup_{X \in G} \{ |A(X; \tau)|, |B(X; \tau)| \} \leq 4M_2 M (1-\lambda)^{-2} \alpha^{-2} g(\tau) \rightarrow 0 \quad (8.23)$$

при $\tau \rightarrow +\infty$. Оценка (8.23) позволяет применить теорему 6 и установить, что характеристическая сеть, построенная для $z(X; \tau)$, сходится при $\tau \rightarrow +\infty$ к характеристической сети решения $z_*(X)$ уравнения (8.7) равномерно в каждой компактной части на E_X ; роль предельной системы уравнений здесь играет (6.2).

Попутно отметим, что правильность сети для $z(X; \tau)$ можно было бы доказать иначе, используя (8.21) и (8.22) и сославшись на теорему 2 вместо теоремы 1.

Следуя [10], запишем для $z(X; \tau)$ уравнения характеристических проекций в форме

$$dq + Fdz = 0, \quad dp - Fdy = 0 \quad (8.24)$$

для одного их семейства и

$$dq - Fdx = 0, \quad dp + Fdy = 0 \quad (8.25)$$

для другого. После того, как сходимость характеристических сетей доказана, остается, используя (8.12), (8.24), (8.25) и лемму 8, установить, что

$$p(X; \tau) \rightarrow p_*(X), \quad q(X; \tau) \rightarrow q_*(X), \quad z(X; \tau) \rightarrow z_*(X) \quad (8.26)$$

при $\tau \rightarrow +\infty$ и что сходимость (8.26) является равномерной в каждой компактной части плоскости E_X .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азов Д. Г.* Об одном классе гиперболических уравнений Монжа—Ампера // *Успехи мат. наук.*— 1983.— 38, № 1.— С. 153—154 (РЖМат, 1983; 7Б459)
2. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.— 387 с.
3. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства.— М.: Наука, 1980.— 288 с. (РЖМат, 1980, 12А674К)
4. *Дубнов Я. С.* Тензорные характеристики некоторых классов поверхностей и принадлежащих им сетей // *Пр. семинара по векторному и тензорному анализу.*— М.; Л.: ОНТИ, 1937.— Вып. 4.— С. 197—204.
5. *Ефимов А. В.* Непрерывности модуль // *Матем. энциклопедия.*— М.: «Сов. энци.», 1982.— 3.— С. 990.
6. *Ефимов Н. В.* Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // *Мат. сб.*— 1964.— 64, № 2.— С. 286—320 (РЖМат, 1966, 5А478)
7. — Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной // *Успехи мат. наук.*— 1966.— 21, № 5.— С. 3.— 58 (РЖМат, 1967, 6А400)
8. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2.— М.; Л.: Гостехиздат.— 1948.— 407 с.
9. *Кантор Б. Е.* Правильность в целом сетей на плоскости // *Сб.: Геометрия.*— Л.: ЛГПИ.— 1975.— Вып. 3.— С. 41—51 (РЖМат, 1976, 3А849)
10. — О неизгибаемости поверхностей отрицательной кривизны // *Сиб. мат. ж.*— 1976.— 17, № 5.— С. 1052—1057 (РЖМат, 1977, 3А695)
11. — К вопросу о глобальной правильности сети кривых на плоскости // *Сб.: Вопросы глобальной геометрии.*— Л.: ЛГПИ.— 1979.— С. 36—40.
12. — Отсутствие замкнутых асимптотических на трубках отрицательной кривизны некоторого класса // *Сиб. мат. ж.*— 1980.— 21, № 6.— С. 21—27 (РЖМат, 1981, 6А711)
13. — О единственности решения уравнения Монжа—Ампера гиперболического типа с двумя закрепленными характеристиками // *Сб.: Современная геометрия. Исследования по дифференциальной геометрии.*— Л.: ЛГПИ.— 1981.— С. 78—81 (РЖМат, 1982, 1А949)
14. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Формула Грина для областей со спрямляемой границей // *Докл. АН СССР.*— 1980.— 253, № 1.— С. 42—44. (РЖМат, 1980, 10Б43)
15. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука.— 1970.— 384 с. (РЖМат, 1970, 1Б529К)
16. *Розендорн Э. Р.* Влияние внутренней метрики на регулярность поверхности отрицательной кривизны // *Мат. сб.*— 1967.— 73, № 2.— С. 236—254 (РЖМат, 1968, 7А631)
17. — Достаточные условия глобальной правильности сети кривых на евклидовой плоскости // *Мат. сб.*— 1975.— 96, № 1.— С. 118—134 (РЖМат, 1975, 5А721)
18. — Гладкая особая дуга на поверхности постоянной отрицательной кривизны // *Докл. АН СССР.*— 1976.— 229, № 6.— С. 1321—1323 (РЖМат, 1977, 1А719)
19. — Задачу Дарбу для одной гиперболической системы / *Тр. Всес. конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рожд. акад. И. Г. Петровского.*— М.: МГУ.— 1978.— С. 424—425 (РЖМат, 1979, 7А760)
20. — Один класс поверхностей отрицательной кривизны с особенностями на линиях // *Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.*— 1985.— № 1.— С. 50—52 (РЖМат, 1985, 5А662)
21. — Исследование регулярности поверхности с регулярной метрикой отри-

- цательной кривизны // Всес. школа «Оптимальное управление, геометрия и анализ». — Кемерово, 1988. — С. 43.
22. *Amsler M. H.* Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et des leurs singularities // *Math. Ann.* — 1955. — 130. — С. 234—256. (РЖМат, 1957, 6614).
23. *Hartman Ph., Wintner A.* On the acymptotic curves of a surfaces // *Amer. J. Math.* — 1951. — 73, № 1. — С. 149—172.
24. *Nirenberg L.* Rigidity of a class of closed surfaces // *Non linear problems.* Univ. of Wisconsin Press, 1963. — С. 177—193.
-