Ю. Л. Ершов, О соотношении сноп-пространств и нумерованных множеств со свойством C_2^*, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1972, том 32, 18–20

Ю.Л.Ершов

О СООТНОШЕНИИ СНОП-ПРОСТРАНСТВ И НУМЕРОВАННЫХ МНОЖЕСТВ СО СВОЙСТВОМ C_2^*

(Результаты доложены 25 мая 1972г.)

В работе автора [I] было начато изучение проблемы Р – проблемы существования главной вычислимой нумерации для $\mathrm{Mor}(\mathcal{T}_0,\mathcal{T}_1)$, там же были определены классы функционалов конечных типов $\mathbb{F}_\sigma$ и $\mathbb{P}_\sigma$. Продолжение этой работы – статья [2], выполнялось одновременно и независимо с исследованиями В.П.Чернова [3] по теории сноп-пространств. Оказалось, что существует тесная связь некоторых понятий, определенных В.П.Черновым, с понятиями из работы [2]. Точное установление этих связей в настоящей заметке (см.предложения 2 и 3) показывает, что некоторые теоремы и понятия, определенные в работах [I] – [3], являются по существу идентичными, а различаются только языком. Это совпадение можно рассматривать как еще одно подтверждение естественности введенных в этих работах понятий.

Определения из работы [I] здесь предполагаются известными. Некоторые из определений и результатов работы [2] указаны ниже.

Будем говорить, что $\mathcal{T}$ п о л н о н а д своей аппроксимацией $(\mathcal{T}_0,\mu)$, если для любого нумерованного множества $\mathcal{T}'$ и морфизма $\mu'\colon \mathcal{T}_0\to\mathcal{T}'$ такого, что $(\mathcal{T}_0,\mu')$ – аппроксимация $\mathcal{T}'$ и порядок $\leqslant'$ на S_0, индуцированный порядком $\leqslant_{\mathcal{T}'}$, совпадает с порядком $\leqslant$, существует мономорфизм $\bar{\mu}\colon \mathcal{T}'\to\mathcal{T}$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}' \arrow[rr, "\bar{\mu}"] & & \mathcal{T} \\
& \mathcal{T}_0 \arrow[ul, "\mu'"] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\bar{\mu}\mu'=\mu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если $\mathcal{T}_0$ – разрешимое нумерованное множество, а $\leqslant$ – рекурсивный порядок на S_0, такой, что для него разрешима общая проблема совместности (см. условие А.из [I]), то существует (единственное с точностью до эквивалентности над $\mathcal{T}_0$) отделимое нумерованное множество $\mathcal{T}$ и морфизм $\mu\colon\mathcal{T}_0\to\mathcal{T}$ такие, что $(\mathcal{T}_0,\mu)$ – аппроксимация $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ – полно над этой аппроксимацией, а порядок, индуцированный на S_0 порядком $\leqslant_{\mathcal{T}}$ совпадает с $\leqslant$.

Будем говорить, что нумерованное множество γ обладает свойством C_1^*, если γ обладает такой аппроксимацией (γ_0,μ), что γ полно над (γ_0,μ) и предикат совместности для порядка $\leqslant$ на S_0 рекурсивен;

свойством C_2^*, если γ обладает такой аппроксимацией (γ_0,μ), что γ полно над (γ_0,μ) и $(\gamma_0,\leqslant)$ – конструктивный парус.

Аналогично определяются **свойства** $\mathcal{D}_1^*$, $\mathcal{D}_2^*$.

Следующая теорема аналогична основной теореме 9 из работы [I] :

ТЕОРЕМА. Если γ – нумерованное множество, обладающее свойством C_0, то

I) если γ обладает свойством C_1 ($\mathcal{D}_1$), а γ' обладает свойством C_2^*($\mathcal{D}_2^*$), то $P(\gamma, F_k(\gamma'))$, а

$$\mathcal{M}or(\gamma, F_k(\gamma')) = \mathcal{M}or_p(\gamma,\gamma')$$

обладает свойством C_2^* ($\mathcal{D}_2^*$);

2) если γ обладает свойством C_2 ($\mathcal{D}_2$), а γ' **обладает свойством** C_1^* ($\mathcal{D}_1^*$), то $P(\gamma, F_k(\gamma'))$, а $\mathcal{M}or(\gamma,F_k(\gamma'))$ обладает свойством C_1^* ($\mathcal{D}_1^*$).

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 7 из [I] .

Следующее предложение указывает точную связь между строгими сноп-пространствами и нумерованными множествами, обладающими свойством C_2^*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. I) Если $\langle X,S\rangle$ – строгое сноп-пространство и X – это все множество натуральных чисел N с эквивалентностью $\sim$ (короче, X – р-м н о ж е с т в о н а N), то нумерованное множество $\gamma = (N|\sim,\nu)$, где $\nu(n) \rightleftharpoons \{x \mid x\sim n\}$, обладает свойством C_2^*.

2) Если γ_2 – нумерованное множество, обладающее свойством C_2^*, то на р-множестве $(N,\sim_\nu)$ можно задать единственную структуру строгого сноп-пространства так, что соответствующее этому сноп-пространству нумерованное множество естественно изоморфно γ .

Если $\langle X,S\rangle$ – строгое сноп-пространство, такое, что X – р-множество на N, то обозначим через f ($\langle X,S\rangle$) соответствующее ему (по первому пункту теоремы) нумерованное множество, а через $\mathcal{G}$ (γ) обозначим строгое сноп-пространство, соответствующее (по второму пункту теоремы) нумерованному множеству $\mathfrak{T}$, обладающему свойством C_2^*. Тогда $\mathfrak{J} f(\langle X,S\rangle)$ гомеоморфно $\langle X,S\rangle$, а $f\mathfrak{J}(\mathfrak{T})$ изоморфно $\mathfrak{T}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\langle X,S\rangle$ и $\langle X',S'\rangle$ – два строгих сноп-пространства, носители которых являются p-множествами на N, то строгое сноп-пространство

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{Mor}_p(f(\langle X,S\rangle), f(\langle X',S'\rangle)))$$

гомеоморфно строгому сноп-пространству, определенному в [3] на p-множестве отображений из $\langle X,S\rangle$ в $\langle X',S'\rangle$.

Предложения 2,3 и теорема 5 из [3] показывают, что основная теорема работы [3] может быть получена из сформулированной выше теоремы.

Еще одним следствием предложений 2 и 3 является утверждение:

Если σ – конечный тип (в смысле [I]), то сноп-пространство $\mathfrak{J}(\mathbb{P}_\sigma)$ гомеоморфно пространству типа σ, определенному в [3].

ЛИТЕРАТУРА

I. Ершов Ю.Л. Вычислимые нумерации морфизмов. "Алгебра и логика", 1971, 10, № 3, 247–308.

2. Ершов Ю.Л. Вычислимые функционалы конечных типов. "Алгебра и логика" (в печати).

3. Чернов В.П. О конструктивных операторах конечных типов. Настоящий сборник, 140 –147.