É. V. Nikol'skii, Отражение плоских упругих волн от произвольного неоднородного слоя в случае нормального падения,
Prikl. Mekh. Tekh. Fiz., 1964, Volume 5, Issue 4, 66–74

ПМТФ, № 4, 1964

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН ОТ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ

Э. В. Никольский

(Новосибирск)

Задача об отражении плоских упругих волн от неоднородного полупространства имеет большое значение для геофизики, в частности для сейсморазведки. Нулевое приближение лучевой теории для неоднородных сред [1] уже не в состоянии объяснить ряд экспериментальных факторов (увеличение интенсивности отраженной волны более чем на порядок в окрестности начальной точки и т. д.). Необходимо учитывать следующие приближения.

В последнее время появляются работы [2], позволяющие решать обратные задачи в теории упругости.

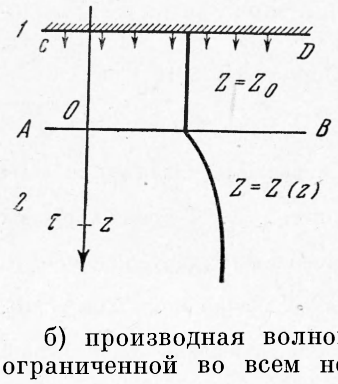
Отметим, что решению прямых задач для неоднородного полупространства (или слоя) посвящено много работ, неполный перечень которых дается в конце статьи [1–10]. При этом нестационарная задача в некоторых работах сводится к стационарной [1–5, 8], что, по нашему мнению, не всегда удобно в вычислительном отношении, так как, помимо решения дифференциальных уравнений, необходимо производить прямое и обратное преобразования Фурье. Лишь в последние годы появилась серия статей [6, 7, 9, 10], в которых решается непосредственно нестационарная задача.

К сожалению, в этих статьях полная система оценок метода последовательных приближений либо не дана совсем [5–8, 10], либо дана неполно [1, 4], ограничиваясь оценкой лишь нулевого приближения (приближения *WKB* или геометрической оптики). Только в [9] имеется такая система оценок, но для частного вида переходной функции $v = v_0(1 + \beta z)$ и $\rho = \text{const}$.

Заметим, что из перечисленных работ (за исключением [3]) не видно, как достаточно хорошо поставить и решить обратную задачу.

Поэтому имеет смысл еще раз вернуться к прямой задаче и построить ее решение так, чтобы оно: 1) позволяло найти достаточно надежные (и простые) оценки в методе последовательных приближений; 2) допускало простой алгоритм вычисления на ЭВМ; 3) позволяло в относительно простой форме постановку и решение обратной задачи в теории упругости.

Несколько слов о физической постановке задачи.



Пусть имеются два идеально упругих полупространства *1* и *2*, разделенные границей *AB*, причем верхнее полупространство *1* — однородное, нижнее *2* — неоднородное (фигура). Относительно параметров среды будем предполагать, что скорость распространения продольных возмущений v и плотность ρ есть произвольные функции глубины z такие, что:

а) волновое сопротивление

$$Z = v(z)\rho(z) \qquad (1)$$

остается непрерывным;

б) производная волнового сопротивления по координате z остается ограниченной во всем неоднородном полупространстве

$$\left|\frac{dZ(z)}{dz}\right| < N \qquad (2)$$

Ограничения (а) и (б), вообще говоря, не существенны. Полученное решение допускает обобщение на случай разрывных волновых сопротивлений $Z(z)$.

Начальные условия зададим следующим образом. Пусть в некоторой точке однородного полупространства *1* в момент $t = 0$ начинает действовать генератор плоских нестационарных волн, распространяющихся нормально к границе раздела AB. И пусть произвольная функция $f(t)$ на фронте этих волн описывает смещение точек однородной среды во времени. Требуется определить волновое поле в любой точке среды для данного падающего возмущения.

В качестве начального возмущения удобно взять плоскую волну с разрывом типа δ-функции на фронте, определенной как

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0), \\ 0 & (t \neq 0), \end{cases} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{3}$$

Тогда, чтобы перейти к решению для произвольной функции на фронте падающей волны, достаточно, как известно, произвести операцию свертки вида

$$U(t) = \int\limits_0^{\infty} f(\xi)\, U_\delta(t - \xi)\, d\xi \tag{4}$$

где $U_\delta(\xi)$ — волновое поле в некоторой точке, обусловленное плоской волной с разрывом типа δ-функции на фронте, а $U(t)$ — искомое волновое поле в этой точке.

В математическом отношении эта задача сводится к задаче Коши для уравнения в частных производных относительно смещения

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(z)\, v^2(z) \frac{\partial U(t, z)}{\partial z}\right] = \rho(z) \frac{\partial^2 U(t, z)}{\partial t^2} \qquad \left(U(t, z)\Big|_{t \leqslant 0} = \delta\left(t - \frac{z}{v_0}\right)\right) \tag{5}$$

Введем новую переменную τ, а также функции $p(\tau)$ соотношениями

$$\tau = \int\limits_0^z \frac{dz}{v(z)}, \qquad p(\tau) \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{Z(\tau)}{Z(0)} \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) примет вид (штрих означает производную по τ)

$$\frac{\partial^2 U(t, \tau)}{\partial \tau^2} + 2p'(\tau) \frac{\partial U(t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U(t, \tau)}{\partial t^2} \tag{7}$$

Чтобы избавиться от частной производной первого порядка, введем функцию $\psi(t, \tau)$, связанную со смещением $U(t, \tau)$ следующим образом:

$$U(t, \tau) = e^{-p(\tau)} \psi(t, \tau) = \left(\frac{Z(0)}{Z(\tau)}\right)^{1/2} \psi(t, \tau) \tag{8}$$

После этого уравнение (7) и начальные условия примут вид

$$\frac{\partial^2 \psi(t, \tau)}{\partial t^2} - [p''(\tau) + p'^2(\tau)]\, \psi(t, \tau) = \frac{\partial^2 \psi(t, \tau)}{\partial t^2}, \qquad \psi(t, \tau)\big|_{t \leqslant 0} = \delta(t - \tau) \tag{9}$$

Можно показать, что уравнение (9) с начальными условиями эквивалентно системе интегральных уравнений вида

$$\psi(t, \tau) = \psi_1(t_0, \tau) + \psi_2(t_0, \tau) \qquad \left(t_0 = \frac{t + \tau}{2}\right)$$

$$\psi_1(t_0, \tau) = -\int\limits_\tau^{t_0} \psi_2(t_0, x)\, dp(x),$$

$$\psi_2(t_0, \tau) = \delta(2t_0 - 2\tau) + \int\limits_0^{\tau} \psi_1(t_0 - \tau + x, x)\, dp(x) \tag{10}$$

Действительно, непосредственной подстановкой (10) в (9) убеждаемся, что решение системы (10) есть решение уравнения (9). В однородной среде $p(\tau) = p'(\tau) \equiv 0$, и система (10) принимает вид $\psi(t, \tau) = \delta(t - \tau)$, что совпадает с начальными условиями (9). Другими словами, начальные данные (9) и (10) тождественны.

Пусть $\Psi(t, \tau)$ — решение задачи (9), а $\psi(t, \tau)$ — решение системы (10). Найдем разность

$$\varepsilon(t, \tau) \equiv \Psi(t, \tau) - \psi(t, \tau) \tag{11}$$

которая, очевидно, удовлетворяет уравнению (9) и обладает нулевыми начальными данными

$$\varepsilon(t, \tau) \equiv 0 \quad \text{при } t \leqslant 0 \tag{12}$$

Следовательно, $\varepsilon(t, \tau) \equiv 0$ для любого момента времени, что и доказывает эквивалентность (9) и (10) при заданном начальном импульсе.

Решение системы (10) предпочтительнее решения дифференциального уравнения (9) по следующим соображениям.

1. В системе (10) видна физическая сущность явления — представление волнового поля в виде суммы «вторичных» волн [1], испытавших вполне определенное число отражений.

2. Система (10) позволяет легко провести оценки в методе последовательных приближений.

3. Система (10) позволяет (после некоторой модификации) поставить вопрос о решении обратных задач.

Остановимся более подробно на первых двух пунктах.

Решая (10) методом последовательных приближений, убеждаемся, что все множество «вторичных» волн можно разбить на два подмножества: волны $\psi_2^{(2j)}(t, \tau)$, испытавшие четное число отражений в неоднородном полупространстве и приходящие в момент времени t в точку τ «сверху»; волны $\psi_1^{(2j+1)}(t, \tau)$, испытавшие нечетное число отражений и приходящие в момент времени t в точку τ «снизу» ($j = 0, 1 \ldots$).

Так, например, нулевое приближение

$$\psi_2^{(0)}(t, \tau) = \delta(2t_0 - 2\tau) = \delta(t - \tau)$$

соответствует прямой волне, подходящей «сверху» к некоторой точке τ и прошедшей без отражения всю неоднородную среду, иначе [1] — волне в приближении *WKB*; первое приближение

$$\psi_1^{(1)}(t, \tau) = -\int_0^{t_0} p'(x)\, \delta(2t_0 - 2x)\, dx = -\frac{1}{2} p'(t_0)$$

отвечает волне, подходящей «снизу» к точке τ и испытавшей только одно отражение в неоднородном полупространстве и т. д.

Каждый элемент этих подмножеств легко оценить по модулю

$$|\psi_1^{(2j+1)}(t_0, \tau)| \leqslant \frac{1}{2} \frac{M^{2j+1} t_0^{2j}}{(2j-1)!!}, \qquad |\psi_2^{(2j)}(t_0, \tau)| \leqslant \frac{1}{2} \frac{M^{2j} t_0^{2j-1}}{(2j-1)!!} \tag{13}$$

Здесь $M \geqslant \max|p'(\tau)|$ во всем неоднородном полупространстве. В силу условия (б), величина M всегда конечна.

Из оценок (13) следует, что последовательности $\psi_1^{(2j+1)}$ и $\psi_2^{(2j)}$ ($j = 1, 2, \ldots$) сходятся к своим предельным функциям $\psi_1(t_0, \tau)$ и $\psi_2(t_0, \tau)$ равномерно относительно t, τ для любых конечных t_0 и M.

Однако оценки (13) являются грубыми. Чтобы получить более точные оценки, рассмотрим волновое поле не во внутренней точке τ неоднородного полупространства *2*, а в некоторой точке однородного полупространства *1* (иначе, случай $\tau = 0$). Тогда, очевидно,

$$\psi_2 (t_0, 0) = 0, \quad \psi (t, 0) = \psi_1 (t_0, 0) \qquad (t_0 = {}^1/_2\, t) \tag{14}$$

$$\psi_1 (t_0, 0) = -\int_0^{t_0} \psi_2 (t_0, x)\, dp\, (x) =$$

$$= -\frac{1}{2} p' (t_0) - \int_0^{t_0} dp\, (x_1) \int_0^{x_1} \psi_1 (t_0 - x_1 + x_2, x_2)\, dp\, (x_2)$$

Из последнего равенства (14) видно, что одномерная функция $\psi_1 (t_0, 0)$ определяется двумерной функцией $\psi_1 (t_0 - x_1 + x_2, x_2)$, что во многих отношениях нежелательно. Этой зависимости можно избежать, воспользовавшись тождеством

$$\psi_1 (t_0, \tau) = \psi_1 (t_0, 0) + \int_0^{\tau} dp\, (x_1) \int_0^{x_1} \psi_1 (t_0 - x_1 + x_2)\, dp\, (x_2) \tag{15}$$

Применяя многократно это тождество и переходя от функции $\psi (t_0, 0)$ к смещению $U (t_0)$, согласно (8) ($p' (0) = 0$), получим уравнение с бесконечным числом интегралов вида

$$U (t_0) + \int_0^{t_0} dp(x_1) \int_0^{x_1} U (t_0 - x_1 + x_2)\, dp\, (x_2) + \int_0^{t_0} dp(x_1) \int_0^{x_1} dp(x_2) \int_0^{x_2} dp\, (x_3) \times$$

$$\times \int_0^{x_3} U (t_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4)\, dp\, (x_4) + \ldots = -\frac{1}{2} p' (t_0) \tag{16}$$

которое удобнее записать в операторной форме

$$A\, (t_0)\, [U\, (t_0)] = -{}^1/_2 p' (t_0) \tag{17}$$

Выясним некоторые свойства оператора $A\, (t_0)\, [U\, (t_0)]$.

1. Если на некотором интервале $0 \leqslant t_0 \leqslant T$ правая часть (17) непрерывна, то на этом же интервале непрерывна и $U\, (t_0)$.

2. Равенство (17) представляет собой тождество относительно t_0, поэтому его можно дифференцировать сколько угодно раз

$$A\, (t_0)\, [U'(t_0)] + p' (t_0) \int_0^{t_0} A\, (x_2)\, [U(x_2)]\, dp\, (x_2) = -\frac{1}{2} p'' (t_0) \tag{18}$$

или

$$A\, (t_0)\, [U'(t_0)] = -\frac{1}{2} p''(t_0) + \frac{1}{2} p'(t_0) \int_0^{t_0} p' (x_2)\, dp\, (x_2) = f_1 (t_0)$$

И вообще, если

$$A\, (t_0)\, [U^{(n)} (t_0)] = f_n (t_0)$$

$$A\, (t_0) [U^{(n+1)} (t_0)] = f_n' (t_0) - p' (t_0) \int_0^{t_0} f_n (x_1)\, dp\, (x_1) \tag{19}$$

3. Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что

$$A\, (t_0) \left[\int_0^{t_0} U\, (\xi)\, d\xi\right] = -\operatorname{sh} p\, (t_0) \tag{20}$$

4. Оператор $A(t_0)$ от постоянной C равен

$$A(t_0)\,C = C\operatorname{ch} p(t_0) \tag{21}$$

5. Если оператор $A(t_0)$ от некоторой функции $\varphi(t_0)$ равен тождественно нулю, то это возможно только тогда, когда $\varphi(t_0) \equiv 0$.

Из этих свойств следует, что а) если правая часть (16) сама или ее k-я производная терпит разрыв в какой-либо точке (иначе — разрывна $(k+1)$-я производная волнового сопротивления), то в этой же точке терпит разрыв либо само решение $U(t)$, либо его k-я производная;

б) если правая часть (16) аналитична в интервале $0 \leqslant t_0 \leqslant T$, то в этом же интервале аналитично и решение $U(T)$, которое проще всего записать в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности нуля

$$U(t) = -\frac{p'(0)}{2} - \frac{p''(0)}{2}t + \frac{p'^3(0) - p'''(0)}{2\cdot 2!}t^2 - \frac{p^{\mathrm{IV}}(0) - 5p'^2(0)\,p''(0)}{2\cdot 3!}t^3 +$$

$$+ \frac{11p'(0)\cdot p''^2(0) + 7p'''(0)\,p'^2(0) - 2p'^5(0) - p^{\mathrm{V}}(0)}{2\cdot 4!}t^4 + \ldots \tag{22}$$

Особенно простое решение получается в случае линейной зависимости скорости от глубины $v = v_0(1 + \beta z)$ и $\rho = \mathrm{const}$

$$U(t) = \frac{v_0\beta}{2}\left\{1 - \frac{p^2}{2!} + \frac{2}{4!}p^4 - \frac{5}{6!}p^6 + \frac{14}{8!}p^8 - \frac{42}{10!}p^{10} + \ldots\right\}$$

$$p = \frac{1}{2}v_0\beta t = \frac{1}{2}\ln\frac{v(t)}{v(0)}$$

в) если $p'(t)$ не аналитична на интервале $0 \leqslant t_0 \leqslant T$, то решение $U(t)$, вероятно, проще всего искать методом последовательных приближений вида

$$U_1(t_0) = -\frac{1}{2}p'(t_0), \qquad U_3(t_0) = -\int_0^{t_0} dp(x_1)\int_0^{x_1} U_1(t_0 - x_1 + x_2)\,dp(x_2)$$

$$U_5(t_0) = -\int_0^{t_0} dp(x_1)\int_0^{x_1} U_3(t_0 - x_1 + x_2)\,dp(x_2) - \tag{23}$$

$$-\int_0^{t_0} dp(x_1)\int_0^{x_1} dp(x_2)\int_0^{x_2} dp(x_3)\int_0^{x_3} U_1(t_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4)\,dp(x_4)$$

. . . .

$$U_{2n+1}(t_0) = -\sum_{j=1}^{n}\int_0^{t_0} dp(x_1)\int_0^{x_1} dp(x_2)\ldots\int_0^{x_{2j-1}} U_{2n-2j+1}(t_0 - x_1 + x_2 - \ldots$$

$$\ldots - x_{2j+1} + x_{2j})\,dp(x_{2j})$$

Ряд (22) можно также рассматривать как оценочный. Однако для получения оценок необходимо знать вид переходной функции $p(t_0)$, что весьма нежелательно, так как во многих случаях не знаем точного распределения параметров среды, а знаем их с некоторыми (относительно широкими) допусками. Чтобы получить оценки, не зависящие от вида переходной функции, перейдем к «интегральной амплитуде» $S(t_0)$

$$S(t_0) = \int_0^{t} U\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi = 2\int_0^{t_0} U(t)\,dt \tag{24}$$

которая должна удовлетворять, согласно (20), уравнению

$$A(t_0)[S(t_0)] = -\operatorname{sh} p(t_0) \tag{25}$$

Решая методом последовательных приближений (25), получим

$$S_1(t_0) = -p(t_0)$$

$$S_3(t_0) = -\int_0^{t_0} dp(x_1)\int_0^{x_2} S_1(t_0 - x_1 + x_2)\,dp(x_2) - \frac{p^3(t_0)}{3!}$$

$$S_5(t_0) = -\int_0^{t_0} dp(x_1)\int_0^{x_1} S_3(t_0 - x_1 + x_2)\,dp(x_2) - \tag{26}$$

$$-\int_0^{t_0} dp(x_1)\int_0^{x_1} dp(x_2)\int_0^{x_2} dp(x_3)\int_0^{x_3} S_1(t_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4)\,dp(x_4) - \frac{p^5(t_0)}{5!}$$

. . . .

$$S_{2n+1}(t_0) = -\sum_{j=1}^{n}\int_0^{t_0} dp(x_1)\int_0^{x_1} dp(x_2)\ldots\int_0^{x_{2j-1}} S_{2n-2j+1}(t_0 - x_1 + x_2 - \ldots$$

$$\ldots - x_{2j-1} + x_{2j})\,dp_j(x_{2j}) - \frac{p^{2n+1}(t_0)}{(2n+1)!}$$

В справедливости формул (26) можно убедиться непосредственным их дифференцированием по t_0.

Допустим, имеем не полупространство *2*, а некоторый переходный слой мощностью H с временем прохождения сигнала в вертикальном направлении τ_0 ($p'(\tau) \equiv 0$, если $\tau > \tau_0$). Тогда амплитуда каждой «вторичной» волны, испытавшей $(2n+1)$ отражение в слое, будет отлична от нуля лишь в интервале $0 \leqslant t \leqslant 2(n+1)\tau_0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Очевидно, «интегральные амплитуды» волн, испытавших соответственно одно, три, пять и т. д. отражений в слое на соответствующих интервалах, равны

$$S_1 = -p(\tau_0) = -\frac{1}{2}\ln\frac{v(\tau_0)\rho(\tau_0)}{v(0)\rho(0)}$$

$$S_3 = p(\tau_0)\frac{p^2(\tau_0)}{2} - \frac{p^3(\tau_0)}{3!} = \frac{p^3(\tau_0)}{3}$$

$$S_5 = -\frac{p^3(\tau_0)}{3}\frac{p^2(\tau_0)}{2} + p(\tau_0)\frac{p^4(\tau_0)}{4!} - \frac{p^5(\tau_0)}{5!} = -\frac{2}{15}p^5(\tau_0) \tag{27}$$

. . . .

$$S_{2n+1} = -S_{2n-1}\frac{p^2(\tau_0)}{2!} - S_{2n-3}\frac{p^4(\tau_0)}{4!} - \ldots - S_1\frac{p^{2n}(\tau_0)}{2n!} - \frac{p^{2n+1}(\tau_0)}{(2n+1)!}$$

Причем «интегральные амплитуды» «вторичных» волн уже не зависят от вида переходной функции и целиком определяются перепадом волновых сопротивлений вне слоя.

Из физических соображений ясно, что полная «интегральная амплитуда» отраженной волны S°, определенная как

$$S^\circ = \lim_{t\to\infty}\int_0^t U\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi \tag{28}$$

должна оставаться конечной [1].

---

[1] Это утверждение основано на следующем физическом представлении: для очень низких частот (в пределе — для нулевой частоты) любой переходной слой конечной мощности воспринимается как резкая граница раздела. Следовательно,

$$\int_0^\infty U(t)\,dt = -\frac{\rho_1 v_1 - \rho_0 v_0}{\rho_1 v_1 + \rho_0 v_0} < \infty$$

Используя (25) и 4-е свойство оператора A (t_0), найдем

$$S^\circ = -\operatorname{th} p(\tau_0) = -\frac{v(\tau_0)\rho(\tau_0) - v(0)\rho(0)}{v(\tau_0)\rho(\tau_0) + v(0)\rho(0)} \qquad (29)$$

Но, рассматривая совместно соотношения (27) и (29), убеждаемся, что они противоречивы.

Действительно, с одной стороны, полная «интегральная амплитуда» S есть сумма «интегральных амплитуд» «вторичных» волн

$$S^\circ = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots \qquad (30)$$

Правая часть (30), согласно (27), есть разложение в ряд гиперболического тангенса в окрестности нуля, который, как известно, расходится, если

$$|p(\tau_0)| \geqslant {}^1/_2\pi \qquad (31)$$

С другой стороны, сумма этого ряда, согласно (29), должна всегда оставаться конечной.

Но это противоречие кажущееся. В самом деле, как было показано выше (13), построенное решение U (t), а следовательно и S (t), существуют при любых конечных M и t_0. И поскольку в принципе можем измерять поле только на конечных интервалах времени, мы, вообще говоря, не в праве требовать существования конечного решения при $t = \infty$, а рассмотрение S° фактически означает переход к $t = \infty$. Другими словами, наше решение не определено при $t = \infty$, равно как и при неограниченных $|p'(t_0)|$. Однако построенное решение U (t) можно формально доопределить следующим образом:

$$\begin{aligned} &U(t) = S^\circ \delta(t) && \text{при } |p'(t_0)| = \infty \\ &\int_0^\infty U(t)\,dt = S^\circ && \text{при } |p'(t_0)| < \infty \end{aligned} \qquad (32)$$

где S° имеет тот же смысл, что и в (29).

Такое доопределение позволяет сохранить решение в случае предельного перехода $\tau_0 \to 0$ (или $H \to 0$) при одновременном стремлении $|p'(t)|$ к ∞ и тем самым позволяет обобщить полученное решение на случай сред с разрывными волновыми сопротивлениями.

Возвращаясь к ряду (27), легко заметить, что его можно рассматривать и как оценочный. Преимуществом его является то, что он не зависит от вида переходной функции p (t) и определяется лишь перепадом волновых сопротивлений вне слоя. Недостатком же служит то обстоятельство, что он оперирует не с самими амплитудами U (t), а с «интегральными» амплитудами, свойства которых, вообще говоря, не тождественны свойствам U (t).

Анализируя (23), убеждаемся в следующем:

а) если $U_1(t_0)$ имеет скачок первого рода, то все последующие приближения $U_3(t_0)$, $U_5(t_0)$ и т. д. непрерывны;

б) каждое последующее приближение более «растянуто» во времени. чем предыдущее (если $U_1(t_0)$ определено на интервале $0 \leqslant t \leqslant 2\tau_0$, то $U_3(t_0)$ определено уже на $0 \leqslant t \leqslant 4\tau_0$, $U_5(t_0)$ — на $0 \leqslant t \leqslant 6\tau_0$ и т. д.);

в) на концах соответствующих интервалов каждое приближение, начиная с $U_3(t_0)$, обращается в нуль.

Эти соображения и позволяют рассматривать (27) как оценочный ряд, который в «интегральном» смысле дает представление о «вкладе» каждой «вторичной» волны в общее волновое поле. Допустим, что перепад волновых сопротивлений не превосходит трех, т. е. p (τ_0) $\leqslant 0.55$, тогда, согласно (27), основную «нагрузку» несет волна, испытавшая одно отражение в слое, в то время как все остальные «вторичные» волны играют роль поправочного члена, составляющего не более 10% от общей «интегральной» амплитуды отраженной волны. Следовательно, с известной осторожностью можно утверждать, что поле отраженной волны в этом случае можно заменить полем волны, испытавшей одно отражение в слое.

Для подавляющего большинства реальных сред перепад волновых сопротивлений по продольным волнам не превосходит трех, поэтому для них поле отраженной волны можно записать в виде

$$U(t_0) = U_1(t_0) = -{}^1/_2 p'(t_0) \tag{33}$$

Учет последующих приближений и проведение оценок для них в принципиальном отношении не вызывают сомнений. Если ряд (27) теряет смысл (при $|p(\tau_0)| \geqslant {}^1/_2\pi$ или $|v(\tau_0)\rho(\tau_0)/v(0)\rho(0)| \geqslant 24$), то оценку можно получить, используя (13), (22) или (23).

Необходимо отметить, что за рубежом после работы Петтерсона (1955 г.) строят так называемые синтетические сейсмограммы, основой которых является замена поля отраженной волны полем волны, испытавшей одно отражение в полупространстве. Однако нам неизвестны работы, где бы доказывалась правомочность такой замены.

Вернемся теперь к следующим двум пунктам, о которых говорилось в начале статьи: о простоте счета на ЭВМ и о постановке решения обратных задач.

Если перепад волновых сопротивлений в среде невелик ($|\rho_1 v_1/\rho_0 v_0| \leqslant 3$), то вычисление поля сводится к одной операции свертки вида

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t p'\left(\frac{\xi}{2}\right) f(t-\xi)\,d\xi \quad \left(p'(\xi) = \frac{1}{2}\left[v_z'(\xi) + \frac{\rho_z'(\xi)\,v(\xi)}{\rho(\xi)}\right]\right) \tag{34}$$

что значительно проще любого другого метода, включая метод численного интегрирования дифференциального уравнения (9).

Если же $\rho_1 v_1/\rho_0 v_0 > 3$, то, вероятно, проще составить разностную схему для численного решения дифференциального уравнения (10), чем учитывать отдельные «вторичные» волны, согласно (23). При этом желательно, чтобы разностная схема, помимо правильной аппроксимации, сходимости и устойчивости, удовлетворяла двум условиям: 1) была бы верной как для непрерывных, так и для разрывных волновых сопротивлений; 2) давала бы физически правильный результат в том случае, когда неоднородная среда вырождается в одну границу раздела с некоторым скачком волнового сопротивления. Для этого продифференцируем (10) по t и τ, в результате чего придем к решению системы

$$\frac{\partial\psi_1(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial\psi_1(t,\tau)}{\partial\tau} - p'(\tau)\,\psi_2(t,\tau), \qquad \frac{\partial\psi_2(t,\tau)}{\partial t} = -\frac{\partial\psi_2(t,\tau)}{\partial\tau} + p'(\tau)\,\psi_1(t,\tau) \tag{35}$$

с начальными данными (9). Легко показать, что система (35) эквивалентна (9) с одними и теми же начальными условиями (9). В силу этого разностную схему будем составлять для системы (35). Положим

$$t = k\Delta t, \qquad \tau = n\Delta\tau \quad (k, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

Переходя от частных производных по t и τ к разностным аналогам, получим

$$\frac{\psi_1(k+1,n) - \psi_1(k,n)}{\Delta t} = \frac{\psi_1(k,n+1) - \psi_1(k,n)}{\Delta\tau} - p'(n)\,\psi_2(k,n)$$

$$\frac{\psi_2(k+1,n) - \psi_2(k,n)}{\Delta t} = -\frac{\psi_2(k,n) - \psi_2(k,n-1)}{\Delta\tau} + p'(n)\,\psi_1(k,n) \tag{37}$$

Счет будем вести по характеристикам, т. е. положим $\Delta t = \Delta\tau$. Тогда с учетом пунктов (1) и (2), о которых говорилось выше, можно записать следующую разностную схему:

$$\begin{aligned}\psi_1(k+1, n) &= (1+q_n)\psi_1(k, n+1) - q_n\psi_2(k, n)\\ \psi_2(k+1, n) &= (1-q_{n-1})\psi_2(k, n+1) + q_{n-1}\psi_1(k, n)\end{aligned} \qquad \left(q_n = \frac{\rho_{n+1}v_{n+1} - \rho_n v_n}{\rho_{n+1}v_{n+1} + \rho_n v_n}\right) \tag{38}$$

Легко показать, что разностная схема (38) для непрерывных сред аппроксимирует систему (35) с точностью $O(\Delta\tau)$, устойчива и, кроме того, удовлетворяет пунктам (1) и (2).

Отметим только, что множители $(1+q_n)$ и $(1-q_{n-1})$ фактически являются коэффициентами преломления для смещений при переходе через границу раздела двух сред.

Нетрудно видеть, что разностную схему (38) довольно легко запрограммировать для ЭВМ, что и было сделано. В результате появилась возможность сравнить счет по формулам (34) и (38), иначе говоря, сравнить полное волновое поле (с учетом всевозможных «вторичных» волн) с полем однократно отраженной волны. Результаты такого сравнения полностью подтвердили вывод, что для небольших перепадов волновых сопротивлений (меньше трех) практически всегда можно ограничиваться волной, испытавшей одно отражение в слое.

Относительно решения обратной задачи можно утверждать следующее.

Если перепад волновых сопротивлений невелик ($\rho_1 v_1 / \rho_0 v_0 \leqslant 3$), то постановка и решение обратной задачи в принципиальном отношении ясны. По заданным падающему сигналу $f(t)$ и отраженному $\varphi(t)$ находим $U(\xi) = p'(\xi)$, обращая интеграл свертки (34). Затем определяем произведение ρv как функцию вертикального времени по формуле

$$\rho v = \rho_0 v_0 \exp\left(\int_0^t U(\xi)\, d\xi\right) \tag{39}$$

В случае больших перепадов волновых сопротивлений ($\rho|_1 v_1 / \rho_0 v_0| > 3$) необходимо видоизменить интегральное уравнение (16) с тем, чтобы избежать нелинейности, как это сделано в [3].

Но все эти рассуждения о решении обратных задач не будут иметь действительно большого практического значения, пока не решен основной вопрос — помехоустойчивости, который до сих пор остается открытым.

Поступила 25 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд. АН СССР, 1957.
2. Алексеев А. С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн I, II. Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1962, № 11.
3. Алексеев А. С. Некоторые законы распространения волн в неоднородной среде. Докл. АН СССР, 1955, т. 103, № 6.
4. Цепелев Н. В. Распространение волн в акустической среде с переходным слоем. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Изд. ЛГУ, 1961, сб. 5.
5. Wolf A. The reflections of elastic waves from transition layers of variable velocity. Geophys., v. 2, p. 1937, 357—363.
6. Berryman L. H., Goupill P. L. and Waters K. N. Reflections from multiple transition layers, Geophys., 1958, v. 23, p. 223—243.
7. Scholte J. G. J. Propagation of waves in inhomogeneous media. Geophys., Prospect, 1961, v. 9, No. 1.
8. Bremmer H. Approximation as the First Term of a Geometric-Optical Series. Communs Pure and Appl. Math., 1951, v. 4, No. 1.
9. Bortfeld R. Seismic waves in transition layers Geophys. Prospect, 1960, v. 8, p. 178—217.
10. Scholte J. G. J. Obligue Propagation of Waves in Inhomogeneous Media. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1962, v. 7, No. 2.