



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Андреев, И. И. Рыжков, Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии,  
*Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 4, 508–517

<https://www.mathnet.ru/de11261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

24 мая 2025 г., 19:42:05



---



---

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

---



---

УДК 517.958

**ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И ТОЧНЫЕ  
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ**

© 2005 г. В. К. Андреев, И. И. Рыжков

**1. Основная система уравнений.** Рассмотрим конвективное движение бинарной смеси в предположении, что ее плотность линейно зависит от температуры и концентрации легкой компоненты:  $\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C)$ . Здесь  $\rho_0$  – плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, а  $T$  и  $C$  – отклонения от средних значений, которые предполагаются малыми;  $\beta_1$  – коэффициент теплового расширения смеси, а  $\beta_2$  – концентрационный коэффициент плотности ( $\beta_2 > 0$ ), поскольку  $C$  – концентрация легкой компоненты. Уравнения конвективного движения смеси в приближении Обербека–Буссинеска принимают вид

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\rho_0^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{g}(\beta_1 T + \beta_2 C), \quad (1)$$

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi\Delta T, \quad (2)$$

$$C_t + \mathbf{u} \cdot \nabla C = d\Delta C + \alpha d\Delta T, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $p$  – превышение давления над гидростатическим,  $\nu$ ,  $\chi$  – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности смеси,  $d$  – коэффициент диффузии,  $\alpha$  – параметр термодиффузии. Все характеристики среды предполагаются постоянными, соответствующими средним значениям температуры и концентрации. В случае нормальной термодиффузии  $\alpha < 0$ , а при аномальном эффекте  $\alpha > 0$ . В уравнении (1)  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ , где  $g$  – ускорение силы тяжести (ось  $z$  направлена вертикально вниз). В случае нормальной термодиффузии поток легкой компоненты направлен в сторону нагретой границы, что приводит к увеличению подъемной силы. В случае же аномальной термодиффузии легкая компонента диффундирует в сторону холодной границы, что уменьшает подъемную силу; при определенном значении параметра  $\alpha$  возможно механическое равновесие.

Основная алгебра Ли операторов, допускаемая системой (1)–(4) в случае  $\mathbf{g} = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ , найдена в работе [1]. Поставим задачу групповой классификации системы относительно постоянных  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\chi$ ,  $d$ . Будем считать, что  $\mathbf{g} \neq 0$ , а постоянные  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  могут обращаться в нуль, означая отсутствие соответствующих членов в уравнениях. Заметим, что с точки зрения группового анализа случай  $\mathbf{g} = 0$  эквивалентен случаю  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

**2. Решение определяющих уравнений.** В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$  – точка пространства  $R^3$ ,  $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$  – вектор скорости. Пусть  $h(t)$ ,  $f(t, \mathbf{x})$  – некоторые функции. Тогда их производные обозначаются в соответствии с равенствами

$$\frac{dh}{dt} = h', \quad \frac{d^2 h}{dt^2} = h'', \quad \frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i} = f_{ti}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = f_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \leq j).$$

Используя эти обозначения, запишем систему (1)–(4) в координатной форме

$$u_t^i + u^1 u_1^i + u^2 u_2^i + u^3 u_3^i + p_i/\rho_0 - \nu(u_{11}^i + u_{22}^i + u_{33}^i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$u_t^3 + u^1 u_1^3 + u^2 u_2^3 + u^3 u_3^3 + p_3/\rho_0 - \nu(u_{11}^3 + u_{22}^3 + u_{33}^3) + g(\beta_1 T + \beta_2 C) = 0, \quad (6)$$

$$T_t + u^1 T_1 + u^2 T_2 + u^3 T_3 - \chi(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = 0, \quad (7)$$

$$C_t + u^1 C_1 + u^2 C_2 + u^3 C_3 - d(C_{11} + C_{22} + C_{33}) - \alpha d(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = 0, \quad (8)$$

$$u_1^1 + u_2^2 + u_3^3 = 0. \tag{9}$$

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой, будем искать в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \eta^p \frac{\partial}{\partial p} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T} + \eta^C \frac{\partial}{\partial C},$$

считая, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных. Для формирования определяющих уравнений нужно подействовать продолженным оператором  $X_2$  на уравнения (5)–(9) и перейти на многообразии, задаваемое этой системой. Однако система (5)–(9) не находится в инволюции, что затрудняет выделение внешних и внутренних переменных. Добавим к системе ее дифференциальное следствие [2]

$$(u_1^1)^2 + (u_2^2)^2 + (u_3^3)^2 + 2(u_2^1 u_1^2 + u_3^1 u_1^3 + u_3^2 u_2^3) + (p_{11} + p_{22} + p_{33})/\rho_0 + g(\beta_1 T_3 + \beta_2 C_3) = 0, \tag{10}$$

получаемое дифференцированием уравнений (5), (6) по  $x^1, x^2, x^3$  соответственно и использованием (9). При переходе на многообразии также будем учитывать дифференциальные следствия из уравнения (9)

$$u_{i1}^1 + u_{i2}^2 + u_{i3}^3 = 0, \quad u_{1i}^1 + u_{2i}^2 + u_{3i}^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Система (5)–(11) находится в инволюции [2]. Теперь нетрудно выделить внешние переменные  $u_{11}^1, u_{11}^2, u_{11}^3, p_{11}, T_{11}, C_{11}, u_{i3}^3, u_{13}^3, u_{23}^3, u_{33}^3, u_1^1$ . Действуя продолженным оператором  $X_2$  на уравнения (5)–(11) и переходя на соответствующее многообразие, получаем систему определяющих уравнений, решение которой после ряда преобразований представляется в виде

$$\begin{aligned} \xi^t &= 2c_4 t + c_0, \quad \xi^1 = c_4 x^1 + c_1 x^2 + c_2 x^3 + f_1(t), \quad \xi^2 = -c_1 x^1 + c_4 x^2 + c_3 x^3 + f_2(t), \\ \xi^3 &= -c_2 x^1 - c_3 x^2 + c_4 x^3 + f_3(t), \quad \eta^1 = -c_4 u^1 + c_1 u^2 + c_2 u^3 + f_1'(t), \\ \eta^2 &= -c_1 u^1 - c_4 u^2 + c_3 u^3 + f_2'(t), \quad \eta^3 = -c_2 u^1 - c_3 u^2 - c_4 u^3 + f_3'(t), \\ \eta^p &= -\rho_0 (f_1''(t)x^1 + f_2''(t)x^2 + f_3''(t)x^3 + c_7 g \beta_1 x^3 + c_{10} g \beta_2 x^3) - 2c_4 p + q(t), \\ \eta^T &= c_5 T + c_6 C + c_7, \quad \eta^C = c_8 C + c_9 T + c_{10}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь  $c_0, \dots, c_{10}$  – групповые константы,  $f_1(t), f_2(t), f_3(t), q(t)$  – произвольные гладкие функции. Групповые константы связаны с постоянными  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \chi, d$  системой классифицирующих уравнений

$$\begin{aligned} \beta_1(c_5 + 3c_4) + \beta_2 c_9 = 0, \quad \beta_1 c_2 = 0, \quad \beta_2(c_8 + 3c_4) + \beta_1 c_6 = 0, \quad \beta_1 c_3 = 0, \\ \alpha d(c_8 - c_5) + (\chi - d)c_9 = 0, \quad \beta_2 c_2 = 0, \quad (\chi - d)c_6 = 0, \quad \beta_2 c_3 = 0, \quad \alpha c_6 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

**Замечание 1.** Как показывают вычисления, решение (12) и система (13) получаются независимо от того, действуем ли мы продолженным оператором  $X_2$  на уравнения (5)–(11) или только на уравнения (5)–(9). Таким образом, любое преобразование, допускаемое системой (5)–(9), допускается и ее дифференциальными следствиями (10), (11).

**3. Групповая классификация.** Исходя из формул (12) и системы (13), выделим алгебры операторов, допускаемые системой в зависимости от значений входящих в нее постоянных. Результаты групповой классификации представлены в табл. 1. В первых трех столбцах указаны значения постоянных  $\alpha, \beta_1, \beta_2$ , в четвертом – базисные операторы, а в пятом – дополнительные операторы, допускаемые системой в случае  $\chi = d$ .

Таблица 1

$\alpha$	$\beta_1$	$\beta_2$	Операторы	$\chi = d$
0	0	0	$X_0, X_{ij}, F_i, Q, Z, T^1, T^3, C^1, C^3$	$T^2, C^2$
0	0	$\neq 0$	$X_0, X_{12}, F_i, Q, Z^C, U^C, T^1, T^3$	$T^2$
0	$\neq 0$	0	$X_0, X_{12}, F_i, Q, Z^T, U^T, C^1, C^3$	$C^2$
0	$\neq 0$	$\neq 0$	$X_0, X_{12}, F_i, Q, \bar{Z}, U^T, U^C$	$R^1, R^2$
$\neq 0$	0	0	$X_0, X_{ij}, F_i, Q, Z, T^3, C^3, R, L$	
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$X_0, X_{12}, F_i, Q, \bar{Z}, U^C, T^3$	
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$X_0, X_{12}, F_i, Q, \bar{Z}, U^T, C^3, L$	
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$X_0, X_{12}, F_i, Q, \bar{Z}, U^T, U^C$ $\alpha = \beta_1(d - \chi)/\beta_2d, \quad \chi \neq d: R^1$	

В последнем случае при указанном значении постоянной  $\alpha$  допускается оператор  $R^1$ . Операторы, представленные в табл. 1, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 X_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_{ij} &= x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j} + u^j \frac{\partial}{\partial u^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^j}, \\
 F_i &= f_i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} + f'_i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f''_i(t) \frac{\partial}{\partial p}, & i &= 1, 2, 3 \quad (i < j), \\
 Q &= q(t) \frac{\partial}{\partial p}, & Z &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - 2p \frac{\partial}{\partial p}, \\
 U^T &= -\rho_0 \beta_1 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T}, & U^C &= -\rho_0 \beta_2 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C}, \\
 T^1 &= T \frac{\partial}{\partial T}, & T^2 &= C \frac{\partial}{\partial T}, & T^3 &= \frac{\partial}{\partial T}, & C^1 &= C \frac{\partial}{\partial C}, & C^2 &= T \frac{\partial}{\partial C}, & C^3 &= \frac{\partial}{\partial C}, \\
 R &= T^1 + C^1, & R^1 &= \beta_2 T^1 - \beta_1 C^2, & R^2 &= \beta_2 T^2 - \beta_1 C^1, & Z^T &= Z - 3T^1, \\
 Z^C &= Z - 3C^1, & \bar{Z} &= Z - 3R, & L &= [\alpha d T + (d - \chi) C] \frac{\partial}{\partial C}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

**4. Групповые свойства уравнений диффузии и переноса тепла.** В случае  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  уравнения (1), (4) образуют систему уравнений Навье–Стокса, описывающую движение вязкой несжимаемой жидкости. Пусть  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u^1, u^2, u^3)$ ,  $p(t, \mathbf{x})$  – некоторое решение уравнений Навье–Стокса. Подставляя его в (2), (3), получаем

$$T_t + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \tag{15}$$

$$C_t + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla C = d \Delta C + \alpha d \Delta T. \tag{16}$$

Представляет интерес следующий вопрос: какие преобразования допускает система (15), (16) в случае, когда  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  – произвольное решение уравнений Навье–Стокса? Таким образом, возникает задача о нахождении алгебры Ли операторов, допускаемой системой (15), (16), в которую входят “произвольные элементы” – компоненты вектора скорости  $u^1, u^2, u^3$ .

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой, будем искать в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T} + \eta^C \frac{\partial}{\partial C},$$

считая, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных. Переход на многообразие здесь осуществляется исключением величин  $T_{11}$ ,  $C_{11}$  из уравнений (15), (16). Для представления решения определяющих уравнений введем следующие обозначения:  $\omega = \text{rot } \mathbf{u} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)^*$  – вихрь,  $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)^*$  – компоненты оператора  $X$ ,  $\mathbf{u}_x = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ ,  $\omega_x = \partial \omega / \partial \mathbf{x}$  – матрицы Якоби,

$$H(t) = \begin{pmatrix} h'(t) & h_1(t) & h_2(t) \\ -h_1(t) & h'(t) & h_3(t) \\ -h_2(t) & -h_3(t) & h'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h'_3(t) \\ -h'_2(t) \\ h'_1(t) \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях решение определяющих уравнений дается формулами

$$\xi^t = 2h(t), \quad \xi = H(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \eta^T = s(t, \mathbf{x})T + c_2C + T^0(t, \mathbf{x}), \tag{17}$$

$$\eta^C = [(\chi/d)s(t, \mathbf{x}) + s_1(t)]C + [-\alpha s(t, \mathbf{x}) + s_2(t)]T + C^0(t, \mathbf{x}).$$

Функции  $h$ ,  $H$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $s$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $T^0$ ,  $C^0$  и постоянная  $c_2$  удовлетворяют системе уравнений

$$T_t^0 + \mathbf{u} \cdot \nabla T^0 = \chi \Delta T^0, \tag{18}$$

$$C_t^0 + \mathbf{u} \cdot \nabla C^0 = d \Delta C^0 + \alpha d \Delta T^0, \tag{19}$$

$$2\chi \nabla s = 2h\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_x(H\mathbf{x} + \mathbf{f}) + 2h'\mathbf{u} - H\mathbf{u} - H'\mathbf{x} - \mathbf{f}', \tag{20}$$

$$s_t + \mathbf{u} \cdot \nabla s = \chi \Delta s, \tag{21}$$

$$\alpha d s_1 + (\chi - d)s_2 = 0, \quad (\chi - d)\Delta s + s_1' d / \chi = 0, \quad \alpha \chi \Delta s - s_2' = 0, \tag{22}$$

$$(\chi - d)c_2 = 0, \quad \alpha c_2 = 0. \tag{23}$$

Применяя операцию  $\text{rot}$  к уравнению (20), получаем условие равенства смешанных производных от функции  $s$  по переменным  $x^1, x^2, x^3$ :

$$2h\omega_t + \omega_x(H\mathbf{x} + \mathbf{f}) + 3h'\omega - H\omega + 2\mathbf{h} = 0. \tag{24}$$

Покажем, что если  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  – произвольное решение уравнений Навье–Стокса, то из (24) следует  $H = 0$ ,  $h = 0$ ,  $\mathbf{f} = 0$ . Для этого достаточно привести хотя бы одно решение, для которого имеют место указанные равенства.

**Пример точного решения уравнений Навье–Стокса.** Введем безразмерные переменные  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/L$ ,  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}/U$ ,  $t' = tU/L$ ,  $p' = p/(\rho_0 U^2)$ , в которых уравнения Навье–Стокса примут вид

$$\mathbf{u}'_t + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}', \tag{25}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \tag{26}$$

где  $\text{Re} = UL/\nu$  – число Рейнольдса. Дальнейшие рассуждения относятся только к безразмерным переменным, поэтому для простоты знак штрих можно опустить. Положим  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  и будем искать решение в виде

$$u^1 = xA_z(t, z) + yB(t, z), \quad u^2 = xC(t, z) + yD_z(t, z), \quad u^3 = -A(t, z) - D(t, z), \tag{27}$$

где  $A, B, C, D$  – неизвестные функции. Уравнение (26) здесь выполнено тождественно. Пусть  $D = A$ ,  $B = \gamma A$ ,  $C = -\gamma^{-1}A$ , где  $\gamma \neq 0$  – произвольная постоянная. Подстановка решения (27) в (25) приводит к системе

$$2AA_{zz} - A_z^2 + A^2 - 2E(t) = 0, \tag{28}$$

$$A_t - A_{zz} / \text{Re} = 0, \tag{29}$$

при этом давление определяется формулой

$$p = E(t)(x^2 + y^2) - 2A^2 + q(t) \quad (30)$$

с произвольной функцией  $q(t)$ . Исследуя систему (28), (29) на совместность, найдем единственное решение

$$A(t, z) = e^{-t/\text{Re}}(\lambda \sin z + \mu \cos z) + \tau, \quad E(t) = -\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}e^{-2t/\text{Re}} + \frac{\tau^2}{2},$$

где  $\lambda, \mu, \tau$  – произвольные постоянные. Определяя давление из формулы (30), получаем представление решения в виде

$$\begin{aligned} u^1 &= e^{-t/\text{Re}}[x(\lambda \cos z - \mu \sin z) + \gamma y(\lambda \sin z + \mu \cos z)] + \tau \gamma y, \\ u^2 &= e^{-t/\text{Re}} \left[ -\frac{1}{\gamma} x(\lambda \sin z + \mu \cos z) + y(\lambda \cos z - \mu \sin z) \right] - \frac{\tau}{\gamma} x, \\ u^3 &= -2e^{-t/\text{Re}}(\lambda \sin z + \mu \cos z) - 2\tau, \\ p &= e^{-2t/\text{Re}} \left[ (\lambda^2 - \mu^2) \cos 2z - 2\lambda\mu \sin 2z - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}(x^2 + y^2) \right] - \\ &\quad - 4\tau e^{-t/\text{Re}}(\lambda \sin z + \mu \cos z) + \frac{\tau^2}{2}(x^2 + y^2) + \bar{q}(t), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\bar{q}(t) = q(t) - e^{-2t/\text{Re}}(\lambda^2 + \mu^2) - 2\tau^2$ . Решение (31) удобно записать в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} u^r &= r e^{-t/\text{Re}} \left[ \lambda \cos z - \mu \sin z + \frac{1}{2} \left[ \gamma - \frac{1}{\gamma} \right] \sin 2\varphi (\lambda \sin z + \mu \cos z + \tau e^{t/\text{Re}}) \right], \\ u^\varphi &= -r e^{-t/\text{Re}} \left[ \gamma \sin^2 \varphi + \frac{1}{\gamma} \cos^2 \varphi \right] (\lambda \sin z + \mu \cos z + \tau e^{t/\text{Re}}), \\ u^z &= -2e^{-t/\text{Re}}(\lambda \sin z + \mu \cos z) - 2\tau, \\ p &= e^{-2t/\text{Re}} \left[ (\lambda^2 - \mu^2) \cos 2z - 2\lambda\mu \sin 2z - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} r^2 \right] - \\ &\quad - 4\tau e^{-t/\text{Re}}(\lambda \sin z + \mu \cos z) + \frac{\tau^2}{2} r^2 + \bar{q}(t). \end{aligned} \quad (32)$$

В случае  $\gamma = \pm 1$  компоненты вектора скорости не зависят от угла  $\varphi$  и решение (32) описывает осесимметрическое движение.

Переход к исходным переменным и подстановка решения (31) при  $\lambda = \mu = 1, \tau = 0, \gamma \neq \pm 1$  в уравнение (24) приводят к  $H = 0, h = 0, \mathbf{f} = 0$ . Тогда из (20)–(22) следует, что  $s = c_1, s_1 = c_3^*, s_2 = c_4^*$ , где  $c_1, c_3^*, c_4^*$  – произвольные постоянные. Положим  $c_3 = c_1 \chi/d + c_3^*, c_4 = -\alpha c_1 + c_4^*$ , в результате чего формулы (17) и уравнения (20)–(23) примут вид

$$\begin{aligned} \xi^t = \xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0, \quad \alpha d(c_3 - c_1) + (\chi - d)c_4 = 0, \quad \eta^T = c_1 T + c_2 C + T^0(t, \mathbf{x}), \quad (\chi - d)c_2 = 0, \\ \eta^C = c_3 C + c_4 T + C^0(t, \mathbf{x}), \quad \alpha c_2 = 0, \end{aligned}$$

где функции  $T^0, C^0$ , согласно (18), (19), являются произвольными решениями системы (15), (16) (в частности,  $T^0 = \text{const}, C^0 = \text{const}$ ). Базис алгебры Ли операторов, допускаемой системой (15), (16) в случае, когда  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  – произвольное решение уравнений Навье–Стокса, приведен в табл. 2.

Таблица 2

$\alpha$	Операторы	$\chi = d$
0	$T^1, C^1, T^0, C^0$	$T^2, C^2$
$\neq 0$	$R, L, T^0, C^0$	

Здесь

$$T^0 = T^0(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial T}, \quad C^0 = C^0(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial C}. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\alpha = 0$ , а постоянные  $\beta_1, \beta_2$  могут быть отличны от нуля. В частности, если  $\beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0$  ( $\beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0$ ), уравнения (1), (3), (4) ((1), (2), (4)) представляют собой замкнутую систему, решение которой дается функциями  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}), p(t, \mathbf{x}), C(t, \mathbf{x})$  ( $T(t, \mathbf{x})$ ) и может быть найдено независимо от уравнения (2) ((3)). Здесь достаточно рассмотреть случай  $\beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0$ , так как при  $\alpha = 0$  уравнения (2) и (3) имеют одинаковую структуру с точки зрения группового анализа.

Найдем алгебру операторов, допускаемую уравнением

$$T_t + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \tag{34}$$

где  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  вместе с функциями  $p(t, \mathbf{x}), C(t, \mathbf{x})$  есть произвольное решение уравнений (1), (3), (4). Инфинитезимальный оператор для уравнения (34) запишем в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T},$$

считая, что его компоненты зависят от  $t, x^1, x^2, x^3, T$ . Решение определяющих уравнений есть

$$\xi^t = 2h(t), \quad \xi = H(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \eta^T = s(t, \mathbf{x})T + T^0(t, \mathbf{x}), \tag{35}$$

где функции  $h, H, \mathbf{f}, T^0, s$  удовлетворяют уравнениям (18), (20), (21). В качестве решения уравнений (1), (3), (4), для которого из (24) следует, что  $H = 0, \mathbf{f} = 0, h = 0$ , можно взять решение (31) (при  $\lambda = \mu = 1, \tau = 0, \gamma \neq \pm 1$ ) с давлением  $\bar{p} = p - \rho_0 g \beta_2 x^3$  и концентрацией  $C = 1$ . Тогда из (20), (21) имеем  $s = c_1 = \text{const}$ , и формулы (35) принимают вид  $\xi^t = \xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0, \eta^T = c_1 T + T^0(t, \mathbf{x})$ . Таким образом, уравнение (34) допускает операторы  $T^1, T^0$  (см. (14), (33)), а уравнение

$$C_t + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla C = d \Delta C$$

(в случае  $\beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0$ ) – операторы  $C^1, C^0$ .

**5. Условия на поверхности раздела.** В дальнейшем будем считать, что смесь находится в условиях полной невесомости ( $\mathbf{g} = 0$ ). Тогда уравнения (1)–(4) образуют систему вязкой теплопроводной жидкости, дополненную уравнением (3) для концентрации. Базис алгебры Ли операторов для данной системы представлен в табл. 1 (случай  $\alpha \neq 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$ ).

Пусть имеется движение двух смесей с общей поверхностью раздела  $\Gamma$ , так что  $\mathbf{u}_j, p_j, \theta_j, C_j$  – соответственно вектор скорости, давление, температура и концентрация в области  $\Omega_j, j = 1, 2$  (здесь температура обозначена через  $\theta$ ). Если  $s$  – поверхностная концентрация на  $\Gamma$ , то коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = \sigma(\theta, s)$  и очень часто эта зависимость линейная:

$$\sigma(\theta, s) = \sigma_0 - \sigma_s s - \sigma_\theta \theta \tag{36}$$

с некоторыми постоянными  $\sigma_0 > 0, \sigma_s, \sigma_\theta > 0$ . Условия на поверхности раздела  $\Gamma$  имеют вид [3]

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = v_n, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad (37)$$

$$(P_2 - P_1)\mathbf{n} = 2\sigma(\theta, s)H\mathbf{n} + \nabla_\Gamma \sigma, \quad (38)$$

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = \kappa \theta \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{u} + \omega(\theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_\Gamma \theta), \quad (39)$$

$$s_t + \nabla_\Gamma \cdot (\mathbf{u}s) - d_\Gamma \Delta_\Gamma s = j_{n_2} - j_{n_1}. \quad (40)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к  $\Gamma$ , направленный из  $\Omega_1$  в  $\Omega_2$ ;  $P_j = -p_j E + 2\rho_{0j}\nu_j D_j$  – тензор напряжений;  $H$  – средняя кривизна  $\Gamma$  ( $H > 0$ , если  $\Gamma$  выпукла наружу  $\Omega_1$ );  $\nabla_\Gamma = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$  – поверхностный градиент;  $\mathbf{u}$ ,  $\theta$  – значения векторов скоростей и температур смесей, попарно совпадающих на  $\Gamma$  в силу условий (37), так что  $\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{u}$  есть поверхностная дивергенция вектора  $\mathbf{u}$ ;  $d_\Gamma$  – коэффициент поверхностной диффузии; функции  $\kappa(\theta, s)$  и  $\omega(\theta, s)$  определены равенствами

$$\kappa = -\partial\sigma/\partial\theta, \quad \omega = \partial(\sigma + \kappa\theta)/\partial\theta.$$

Для зависимости (36)  $\kappa = \sigma_\theta$  и  $\omega = 0$ . В условии (40)

$$j_{n_{1,2}} = -d_{1,2} \left( \frac{\partial C_{1,2}}{\partial n} + \alpha_{1,2} \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial n} \right) \quad (41)$$

представляют собой потоки вещества с  $\Gamma$  в области  $\Omega_{1,2}$ . За счет процессов адсорбции-десорбции

$$j_{n_{1,2}} = K_A^{1,2} C_{1,2} - K_D^{1,2} s, \quad (42)$$

где  $K_A^{1,2}$ ,  $K_D^{1,2}$  – коэффициенты адсорбции и десорбции соответственно (при наличии химических реакций зависимость (42) может быть и нелинейной).

В некоторых процессах можно пренебречь процессами поверхностно-активных веществ (ПАВ) вдоль  $\Gamma$ . Тогда  $s = 0$  и вместо условия (40) будет

$$d_2 \left( \frac{\partial C_2}{\partial n} + \alpha_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \right) = d_1 \left( \frac{\partial C_1}{\partial n} + \alpha_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \right). \quad (43)$$

Кроме того,  $C_1 = \gamma C_2$  на  $\Gamma$ , где  $\gamma$  – постоянная равновесная Генри.

Если  $\Omega_1$  представляет собой пассивный газ, а  $\Omega_2$  – смесь, то  $\Gamma$  называется свободной границей. Тогда  $P_1 = p_{\text{gas}} E$ ,  $\nu_1 = 0$ . В (37) остается только второе кинематическое условие, а (39) заменяется условием теплового контакта

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} + \gamma_2(\theta_2 - \theta_{\text{gas}}) = Q.$$

Для переноса ПАВ вдоль  $\Gamma$  будет уравнение (40), где  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ , а  $j_{n_1} = 0$ ,  $j_{n_2} = K_A^2 C_2 - K_D^2 s$ . Кроме указанных условий, задаются начальные данные при  $t = 0$  и граничные условия на твердых стенках (см. [3]).

**Замечание 2.** Вместо условия (39) часто берется равенство потоков тепла

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} = k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n},$$

так как слагаемые в правой части (39) обычно дают малый вклад [4].

**Замечание 3.** Если  $\Gamma$  задана неявно уравнением  $f(\mathbf{x}, t) = 0$ , то кинематическое условие  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = v_n$  принимает вид  $f_t + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0$ .

Выделим из (14) следующую совокупность операторов:

$$X_0^j, \quad X_1^j = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_2^j = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_3^j = \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_{12}^j, \quad X_{13}^j, \quad X_{23}^j,$$



$$X_4^j = t \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial u_1^j}, \quad X_5^j = t \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial u_2^j}, \quad X_6^j = t \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial u_3^j}.$$

Указанная совокупность операторов образует алгебру Ли; ей соответствует 10-ти параметрическая группа  $G_{10}^j$  – группа Галилея (на самом деле индекс  $j$  можно опустить, так как эти группы действуют одинаково).

**Утверждение 1.** Пусть  $H$  – интранзитивная подгруппа прямого произведения группы Галилея и бесконечномерной группы  $G_Q^j$ , порожденной  $Q^j$ . Если  $\Gamma$  – неособое инвариантное многообразие группы  $H$  в пространстве  $(t, x^1, x^2, x^3)$ , то условия (37)–(40) также инвариантны относительно  $H$ .

Расширение группы  $H$  происходит, когда  $\rho_{01} = \rho_{02}$ , т.е. при равенстве плотностей. При этом  $H \subset G_{10}^j \otimes G_Q^j \otimes G_F^j$ , где  $G_F^j$  – подгруппа, порожденная операторами  $F_i$  из (14).

Другое расширение происходит, когда  $\sigma(\theta, C) = a_1\theta^{1/2} + a_2C^{1/2}$ , где  $a_1, a_2$  – постоянные. При этом допускается расширенный оператор растяжения  $Z - 2R$ . Сопоставляя (41) и (42), а также уравнение (40), видим, что (40) допускает оператор  $Z - 2R$ , если коэффициенты адсорбции и десорбции совпадают.

Утверждение, аналогичное утверждению 1, имеет место и для задачи со свободной границей.

**Замечание 4.** Представляет определенный интерес вопрос: для каких потоков  $j_{n_{1,2}}(C_{1,2}, s)$  происходит максимальное расширение группы  $G_{10}^j$ ? В частности, оператор  $Z - 2R - \partial/\partial s$  будет допускаться уравнением (40), например, при  $j_n = a^1 C^{3/2} + b^1 s^3$ , где  $a^1, b^1$  – постоянные.

**6. Точные решения.**

**Деформация плоского слоя.** Рассмотрим движение смеси в двумерной постановке (индекс  $j$  опущен). Пусть  $\langle \partial/\partial x, t\partial/\partial x + \partial/\partial u, \partial/\partial \theta, \partial/\partial C \rangle$  – четырехпараметрическая подгруппа. Здесь инвариантных решений нет, однако существуют частично инвариантные решения вида

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(y, t), \quad p = p(y, t), \quad \theta = \theta(x, y, t), \quad C = C(x, y, t). \tag{44}$$

Из граничного условия (38), где  $P_1 = -p_{\text{gas}}E$ , и (36) вытекает, что

$$\theta(x, y, t) = a(y, t)x^2 + b(y, t), \quad C(x, y, t) = h(y, t)x^2 + g(y, t) \tag{45}$$

с новыми неизвестными функциями  $a, b, h, g$ .

Свободная граница  $y = l(t)$  такая, что  $dl/dt = v(l(t), t)$ . После подстановки решений (44), (45) в (1)–(4) и в граничные условия, соответствующие задаче со свободной границей, получим начально-краевую задачу для функций  $u, v, p, a, b, h, g$ , которая редуцируется к более простой в лагранжевых координатах (см. [4]). Эта задача описывает деформацию плоского слоя под действием эффекта Соре с одной или двумя ( $y = \pm l(t)$ ) свободными границами.

**Деформация цилиндра.** Имеется осесимметрический аналог предыдущего решения. Пусть  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты,  $u, v, w$  – проекции скорости на эти координаты, а  $\langle \partial/\partial \varphi, \partial/\partial z, t\partial/\partial z + \partial/\partial w, \partial/\partial \theta, \partial/\partial C \rangle$  – пятипараметрическая подгруппа. Тогда частично инвариантное решение имеет вид (с учетом граничного условия (37))

$$u = u(r, t), \quad w = zm(r, t), \quad p = p(r, t), \quad \theta = a(r, t)z^2 + b(r, t), \quad C = h(r, t)z^2 + g(r, t),$$

а свободная граница – круглый цилиндр  $r = l(t)$ . В результате возникает начально-краевая задача относительно функций  $u, m, p, a, b, h, g$  и  $l$ ; ее решение описывает эволюцию жидкого цилиндрического столба (или слоя) под действием эффекта Соре.

**Двухслойное движение с плоской границей раздела.** Рассмотрим плоское движение двух смесей с поверхностью раздела. Пусть  $H$  – одномерная подгруппа

$$\langle \partial/\partial x + A\partial/\partial \theta_j + B\partial/\partial C_j \rangle,$$

где  $A, B$  – не равные нулю постоянные. Среди  $H$ -инвариантных решений возьмем следующие:

$$u_j = u_j(y, t), \quad v_j = 0, \quad p_j = p_j(y, t), \quad \theta_j = Ax + T_j(y, t), \quad C_j = Bx + K_j(y, t). \quad (46)$$

Если зависимость  $\sigma(\theta, s)$  линейная (см. (36)), то решение (46) можно интерпретировать как движение с  $H$ -инвариантной границей раздела  $y = 0$ . Ясно, что  $p_j = p_j(t)$ ; положим для простоты  $p_j = 0$ . Функции  $u_j, T_j, K_j$  и  $s$  удовлетворяют системе уравнений

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}, \quad T_{jt} + Au_j = \chi_j T_{jyy}, \quad K_{jt} + Bu_j = d_j K_{jyy} + \alpha_j d_j T_{jyy}, \quad (47)$$

$$s_t + us_x - d_\Gamma s_{xx} = (K_A^2 - K_A^1)Bx + K_A^2 K_2 - K_A^1 K_1 + (K_D^1 - K_D^2)s.$$

Последнее уравнение в (47) выполнено при  $y = 0$ , в нем  $u = u_1(0, t) = u_2(0, t)$ . Кроме того, при  $y = 0$

$$\rho_{02}\nu_2 u_{2y} - \rho_{01}\nu_1 u_{1y} = -A\sigma_\theta - B\sigma_s = \text{const}, \quad (48)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t).$$

Начальные условия при  $t = 0$  возьмем в виде

$$u_j = 0, \quad T_j = 0, \quad K_j = 0, \quad s = s_0(x). \quad (49)$$

Граничные условия на твердых стенках  $y = l_1 > 0, y = -l_2 < 0$  таковы:

$$u_1(l_1, t) = 0, \quad T_1(l_1, t) = 0, \quad K_{1y}(l_1, t) + \alpha_1 T_{1y}(l_1, t) = 0, \quad (50)$$

$$u_2(-l_2, t) = 0, \quad T_2(-l_2, t) = 0, \quad -K_{2y}(-l_2, t) + \alpha_2 T_{2y}(-l_2, t) = 0.$$

Если стенок нет (одной или обеих), то ставятся условия ограниченности  $u_j, T_j, K_j$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ .

Заметим, что задача (47)–(50) может быть решена методом разделения переменных. В стационарном случае ее решение выписывается в явном виде (учтены условия для  $u_j$  и  $T_j$  при  $y = 0$ )

$$u_j = a_{1j}y + a_2, \quad T_j = \frac{A}{6\chi_j} a_{1j}y^3 + \frac{a_2 A y^2}{2\chi_j} + b_{1j}y + b_2,$$

$$K_j = \left( \frac{B}{d_j} - \frac{A}{\chi_j} \alpha_j \right) \left( \frac{a_{1j}y^3}{6} + \frac{a_2 y^2}{2} \right) + n_{1j}y + n_{2j}$$

с постоянными  $a_{1j}, a_2, b_{1j}, b_2, n_{1j}, n_{2j}$ , которые находятся из граничных условий (48) и (50). Конечно, к этим условиям необходимо добавить еще два соотношения из определения потоков вещества (41) и (42) при  $y = 0$ :

$$-d_1(K_{1y} + \alpha_1 T_{1y}) = K_A^1(K_1 + Bx) - K_D^1 s, \quad -d_2(K_{2y} + \alpha_2 T_{2y}) = K_A^2(K_2 + Bx) - K_D^2 s. \quad (51)$$

Из (51) и выражений для  $K_j, T_j$  следует, что  $s = \text{const}$  при  $B = 0$  (исключим нефизичный случай  $K_A^1 = K_A^2, K_D^1 = K_D^2$ ). Тогда из последнего уравнения (47) получим при  $y = 0$

$$s = (K_A^2 K_2 - K_A^1 K_1) / (K_D^2 - K_D^1). \quad (52)$$

Таким образом находим

$$a_{11} = \frac{A\sigma_\theta}{\rho_{02}\nu_2 l + \rho_{01}\nu_1}, \quad a_{12} = -la_{11}, \quad a_2 = -l_1 a_{11}, \quad l = \frac{l_1}{l_2},$$

$$b_{11} = \frac{Al_1 l_2 a_{11}}{3(k+l)} \left( \frac{l}{\chi_1} - \frac{1}{\chi_2} \right), \quad b_{12} = kb_{11}, \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad b_2 = \frac{A}{3\chi_1} a_{11} l_1^3 - l_1 b_{11}.$$

Постоянные  $n_{11}$ ,  $n_{12}$  находятся из третьего и шестого условий (50). Наконец, постоянные  $n_{21}$  и  $n_{22}$  определяются из (51) с учетом (52).

Заметим, что в этом решении при  $\alpha_j = 0$  распределение концентрации по оси  $y$  становится линейным. Если эффект Соре присутствует, то это распределение всегда кубическое.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00934).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев В.К., Пухначев В.В. // Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14. № 5. С. 3–23.
2. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск, 1984.
3. Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск, 2000.
4. Pukhnachev V.V. // Fluid Dynamics Transactions. Warsaw, 1989. V. 14. P. 145–204.

Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
г. Красноярск

Поступила в редакцию  
26.05.2003 г.