

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Сатин, Об аппроксимации с помощью усечений для одной нестационарной модели массового обслуживания,
Системы и средства информ., 2021, том 31, выпуск 1, 28–36

<https://www.mathnet.ru/ssi747>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

18 мая 2025 г., 23:37:50



ОБ АППРОКСИМАЦИИ С ПОМОЩЬЮ УСЕЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ*

Я. А. Сатун¹

Аннотация: Исследуется нестационарная модель массового обслуживания типа $M_t/M_t/1$ с одним сервером. Предполагается, что требования поступают с интенсивностью $\lambda(t)$, а обслуживаются парами, т. е. в данном случае $\mu(t)$ — это интенсивность обслуживания группы из двух требований. Для рассматриваемой модели построены предельные характеристики с помощью метода усечений пространства состояний системы. Приведены численный пример, а также графические иллюстрации, построенные на основе общего алгоритма, разработанного в предыдущих работах автора и связанного с решением задачи Коши для прямой системы Колмогорова на соответствующем временном интервале.

Ключевые слова: системы массового обслуживания; модель типа $M_t/M_t/1$; нестационарная модель массового обслуживания; аппроксимация; предельные характеристики; усечение пространства состояний

DOI: 10.14357/08696527210103

1 Введение

В работе изучается модель типа $M_t/M_t/1$ с особенностями в обслуживании, а именно предполагается, что требования поступают на обслуживание по одному с интенсивностью $\lambda(t)$, а обслуживаются *только парами*, т. е. с интенсивностью $\mu(t)$ обслуживается группа из двух требований.

В статье [1] получены оценки скорости сходимости к предельному режиму. В настоящей работе исследуется вопрос о построении аппроксимаций предельных характеристик с помощью усечений пространства состояний системы.

Для усечения будет применяться подход, разработанный в [2]. Отметим, что имеется много работ, в которых строятся те же (по существу, предельные) характеристики, в которых применяются другие методы аппроксимации, не использующие оценки скорости сходимости и из-за этого приводящие к существенно большему объему вычислений (см., например, [3, 4]).

На рис. 1 приведен граф процесса, связанный с числом требований в системе обслуживания. Соответствующая прямая система Колмогорова имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = A(t)\mathbf{p}(t), \quad (1)$$

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00020.)

¹ Вологодский государственный университет, yacovi@mail.ru

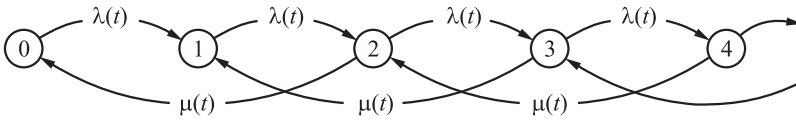


Рис. 1 Граф процесса $X(t)$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & 0 & \mu(t) & 0 & 0 & \dots \\ \lambda(t) & -\lambda(t) & 0 & \mu(t) & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \mu(t) & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Заменяя $p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t)$, получаем из (1) систему

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z}(t) = B(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t),$$

где

$$\mathbf{f}(t) = (\lambda(t), 0, 0, \dots)^T; \quad \mathbf{z}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)^T;$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} -2\lambda(t) & -\lambda(t) & \mu(t) - \lambda(t) & -\lambda(t) & \dots \\ \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \mu(t) & \dots \\ 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Скорость сходимости процесса $X(t)$ может быть найдена из системы

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = B(t)\mathbf{y}(t).$$

Пусть T — треугольная матрица:

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \geq i; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $\mathbf{u}(t) = T\mathbf{y}(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) = B^*(t)\mathbf{u}(t),$$

где

$$B^*(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & -\mu(t) & \mu(t) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \mu(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \mu(t) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \mu(t) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Возьмем $\{d_i, i \geq 0\}$ так, что $\inf_{i \geq 0} |d_i| = d > 0$. Пусть $D = \text{diag}(d_0, d_1, d_2, \dots)$. Делаем подстановку $\mathbf{w}(t) = D\mathbf{u}(t)$. Получаем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{w}(t) = B^{**}(t)\mathbf{w}(t),$$

где $B^{**}(t) = (b^{**}(t))_{i,j=1}^{\infty} = DB^*(t)D^{-1}$ имеет вид:

$$B^{**}(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & -\mu(t)\frac{d_1}{d_2} & \mu(t)\frac{d_1}{d_3} & 0 & 0 & \dots \\ \lambda(t)\frac{d_2}{d_1} & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \mu(t)\frac{d_2}{d_4} & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(t)\frac{d_3}{d_2} & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \mu(t)\frac{d_3}{d_5} & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(t)\frac{d_4}{d_3} & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

В работе [1] показано, что сходимость оценивается следующим образом. Пусть

$$\alpha^*(t) \geq \min(\lambda(t)(1 - \delta^{-1}), \mu(t)(1 + \delta) - \lambda(t)(\delta^2 - 1), \mu(t)(1 - \delta^{-1}) - \lambda(t)(\delta - 1)). \quad (2)$$

Тогда верно неравенство:

$$\|\mathbf{w}(t)\| \leq e^{-\int_0^t \alpha^*(\tau) d\tau} \|\mathbf{w}(0)\|, \quad (3)$$

Пусть числа δ_i , где $i = 1, 2$, больше единицы. Обозначим

$$D_{M_i} = \text{diag} (1, \delta_i, \delta_i^2, \delta_i^3, \dots); \quad D_{m_i} = \text{diag} \left(1, \frac{1}{\delta_i}, \delta_i, \delta_i^2, \delta_i^3, \dots \right).$$

Тогда (3) можно переписать в виде:

$$\|\mathbf{w}(t)\|_{D_m} \leq e^{-\int_0^t \alpha^*(\tau) d\tau} \|\mathbf{w}(0)\|_{D_M}, \quad (4)$$

или в виде:

$$\|D_m T \mathbf{y}(t)\| \leq e^{-\int_0^t \alpha^*(\tau) d\tau} \|D_M T \mathbf{y}(0)\|.$$

Замечание 1. Можно показать, что для 1-периодической $\alpha^*(t)$ можно подобрать такие M и a , что будет верно неравенство $e^{-\int_0^t \alpha^*(\tau) d\tau} \leq M e^{-at}$. Например, можно взять $M = \exp \left(\sup_{|t-s| \leq 1} \int_s^t \alpha(s) ds \right)$, $a = \int_0^1 \alpha(s) ds$. Если найти целое число A , такое что $\alpha(t) > A$, то можно положить $a = A$, $M = 1$.

Замечание 2. Если интенсивности постоянны, то $\alpha^*(t)$ постоянна, и, взяв $M = 1$ $a = \alpha(s)$, получаем неравенство $e^{-\int_0^t \alpha^*(\tau) d\tau} \leq M e^{-at}$.

2 Аппроксимация усечениями

Зададим усеченный процесс, заменив на нули столбцы с $N + 1$ и строки с $N + 1$ в матрице $A(t)$. Заменим еще $a_{N,N}$ на $-\mu(t)$.

Далее будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ исходный процесс и его усеченный аналог находятся в нулевом состоянии, т. е. в системе нет требований.

Будем считать далее, что при всяком t верно $\lambda(t) \leq L$.

Замечание 3. Столбцы в матрице $A(t)$ нумеруются с нуля.

Тогда усеченный процесс описывается системой

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{p}}(t) = A_N(t) \tilde{\mathbf{p}}(t)$$

и соответствующей преобразованной системой

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{z}}(t) = B_N(t) \tilde{\mathbf{z}}(t) + \tilde{\mathbf{f}}(t), \quad (5)$$

где

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = (\lambda(t), 0, 0, \dots)^T; \quad \tilde{\mathbf{z}}(t) = (\tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t), \dots)^T = (\tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t), \dots)^T.$$

Далее возьмем два разных числа $1 < \delta_2 < \delta_1$, для которых $\int_0^1 \alpha_i^*(s) ds \geq 0$ (см. (2)). Затем подберем M_i и a_i , для которых верно $e^{-\int_0^t \alpha_i^*(\tau) d\tau} \leq M_i e^{-a_i t}$ (см. замечание 1).

Для начала оценим p_N .

Из (5) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{z}_N(t) \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k &\leq \\ &\leq \|T\tilde{\mathbf{z}}(t)\|_{D_{m_1}} \leq e^{-\int_0^t \alpha_1^*(\tau) d\tau} \|T\tilde{\mathbf{z}}(0)\|_{D_{M_1}} + \int_0^t e^{-\int_s^t \alpha_1^*(\tau) d\tau} \|T\mathbf{f}(t)\|_{D_{M_1}} ds. \end{aligned}$$

Так как усеченный аналог исходного процесса в начальный момент времени находится в нулевом состоянии, положим $\tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{0}$. Получаем

$$\tilde{z}_N(t) \leq \frac{LM_1}{a_1 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k}.$$

Получим теперь оценку усечения.

Найдем разность

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}(t)) = B(t)\mathbf{z}(t) - B_N(t)\tilde{\mathbf{z}}(t).$$

Перепишем ее в виде:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t)) = B(t)(\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t)) + (B(t) - B_N(t))\tilde{\mathbf{z}}(t). \quad (6)$$

Так как усеченный аналог исходного процесса и сам исходный процесс в начальный момент времени находятся в нулевом состоянии, то $\tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$. С учетом (4) из (6) получаем:

$$\begin{aligned} \|T(\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t))\|_{D_{m_2}} &\leq e^{-\int_0^t \alpha_2^*(\tau) d\tau} \|T(\mathbf{z}(0) - \tilde{\mathbf{z}}(0))\|_{D_{M_2}} + \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t \alpha_2^*(\tau) d\tau} \|T(B(t) - B_N(t))\tilde{\mathbf{z}}(t)\|_{D_{M_2}} ds. \end{aligned}$$

Далее

$$T(B(t) - B_N(t))\tilde{\mathbf{z}}(t) = (0, \dots, 0, -\lambda(t)\tilde{z}_N(t), \lambda(t)\tilde{z}_N(t), 0, 0, 0, \dots)^T.$$

Значит,

$$\|T(B(t) - B_N(t))\tilde{\mathbf{z}}_N(t)\|_{D_{M_2}} \leq 2L \frac{LM_1\delta_2^N}{a_1 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k}.$$

Отсюда

$$\|T(\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t))\|_{D_{m_2}} \leq \frac{2L^2 M_1 M_2 \delta_2^N}{a_2 a_1 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k}.$$

Перепишем оценку в других нормах.

С учетом

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{u}(t)\|_{D_{m_2}} &= |u_1| + \left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right) |u_2| + \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \delta_2\right) |u_3| + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \delta_2 + \delta_2^2\right) |u_4| + \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \delta_2 + \delta_2^2 + \delta_2^3\right) |u_5| + \dots \geq \|\mathbf{u}(t)\| \end{aligned}$$

получаем

$$\|\mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\| \leq 2\|\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq 2\|T(\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t))\|_{D_{m_2}} \leq 4 \frac{L^2 M_1 M_2 \delta_2^N}{a_1 a_2 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k}.$$

С учетом

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{u}(t)\|_{D_{m_2}} &= |u_1| + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta_2}\right) 2|u_2| + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \delta_2\right) 3|u_3| + \\ &+ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \delta_2 + \delta_2^2\right) 4|u_4| + \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \delta_2 + \delta_2^2 + \delta_2^3\right) 5|u_5| + \dots \geq \\ &\geq W \|\mathbf{u}(t)\|_{1E}, \end{aligned}$$

где $W = \min_{k \geq 1} (\delta_2^{k-2}/k)$, получаем

$$|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)| = \|\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t)\|_{1E} \leq \frac{2}{W} \frac{L^2 M_1 M_2 \delta_2^N}{a_1 a_2 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k},$$

где $\phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} ip_i$; $\tilde{\phi}(t) = \sum_{i=0}^N i\tilde{p}_i$.

Теорема 1. Пусть найдутся числа $1 < \delta_2 < \delta_1$, такие что при $i = 1, 2$

$$\int_0^1 \alpha_i^*(t) dt \geq \int_0^1 \min(\lambda(t)(1 - \delta_i^{-1}), \mu(t)(1 + \delta_i) - \lambda(t)(\delta_i^2 - 1), \mu(t)(1 - \delta_i^{-1}) - \lambda(t)(\delta_i - 1)) dt > 0.$$

Тогда верны оценки

$$\|\mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\| \leq 4 \frac{L^2 M_1 M_2 \delta_2^N}{a_1 a_2 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k};$$

$$|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)| \leq \frac{2}{W} \frac{L^2 M_1 M_2 \delta_2^N}{a_1 a_2 \sum_{k=0}^{N-1} \delta_1^k},$$

где

$$W = \min_{k \geq 1} \frac{\delta_2^{k-2}}{k}; \quad e^{-\int_0^t \alpha_i^*(\tau) d\tau} \leq M_i e^{-a_i t}; \quad \phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i; \quad \tilde{\phi}(t) = \sum_{i=0}^N i \tilde{p}_i.$$

Замечание 4. В статье [1] показано, что в качестве одной из δ_i можно выбрать число $\sqrt{\mu}/\sqrt{\lambda}$. В этом случае получается

$$\alpha_i^* = \min \left((\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda})^2, \lambda \left(1 - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right) \right),$$

и можно взять $a_i = \alpha_i^*$, $M_i = 1$.

3 Численный пример

Пусть $\lambda(t) = 2 + \sin(2\pi t)$, $\mu(t) = 4 - \cos(2\pi t)$.

Положим $\delta_1 = 11/10$. Тогда $\alpha_1^* \geq 1/22$, и можно взять $a_1 = 1/22$, $M_1 = 1$.

Положим $\delta_2 = 101/100$. Тогда $\alpha_2^* \geq 0,005$, и можно взять $a_2 = 0,005$, $M_2 = 1$, $W > 0,02$.

С учетом оценки скорости сходимости отсюда получаем, что при $N = 300$ справедливы неравенства:

$$\|\mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\| \leq 10^{-5};$$

$$|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)| \leq 10^{-4}.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 2 и 3.

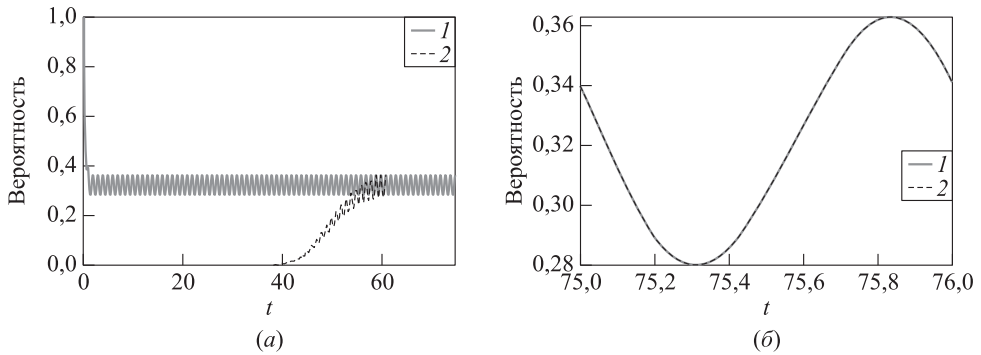


Рис. 2 Вероятность отсутствия требований в системе $p_0(t)$ на отрезке $[0, 75]$ (а) и «в предельном режиме» на отрезке $[75, 76]$ (б) при начальных условиях $X(0) = 0$ (1) и 300 (2)

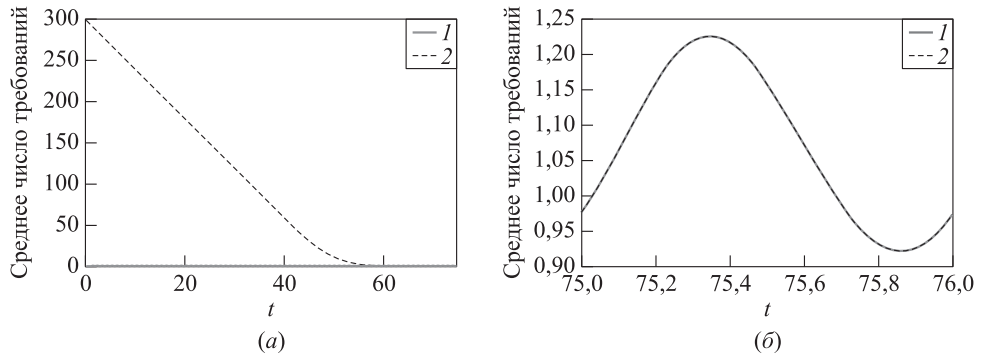


Рис. 3 Среднее число требований в системе $E(t, 0)$ (1) и $E(t, 300)$ (2) на отрезке $[0, 75]$ (а) и «в предельном режиме» на отрезке $[75, 76]$ (б)

Литература

1. Satin Y., Zeifman A., Kryukova A. On the rate of convergence and limiting characteristics for a nonstationary queueing model // Mathematics, 2019. Vol. 7. Iss. 8. Art. No. 678. 11 p.
2. Зейфман А. И., Коротышева А. В., Королев В. Ю., Сатин Я. А. Оценки погрешности аппроксимаций неоднородных марковских цепей с непрерывным временем // Теория вероятностей и ее применения, 2016. Т. 61. № 3. С. 563–569.
3. Arns M., Buchholz P., Panchenko A. On the numerical analysis of inhomogeneous continuous-time Markov chains // Inform. J. Comput., 2010. Vol. 22. P. 416–432.
4. Andreychenko A., Sandmann W., Wolf V. Approximate adaptive uniformization of continuous-time Markov chains // Appl. Math. Model., 2018. Vol. 61. P. 561–576.

Поступила в редакцию 22.01.21

ON APPROXIMATION WITH TRUNCATIONS FOR THE NONSTATIONARY QUEUING MODEL

Ya. A. Satin

Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str.,
Vologda 160000, Russian Federation

Abstract: The author deals with a nonstationary queuing model $M_t/M_t/1$ with one server. It is assumed here that the customers arrive with the intensity $\lambda(t)$ but are served in pairs (that is, in this case, $\mu(t)$ is the service rate of a group of two customers). For the considered model, the limiting characteristics are constructed using the method of truncating the state space of the system. A numerical example with exact given values of intensities showing the application of the studied approach is constructed and corresponding graphic illustrations are provided. The author uses the general algorithm to build graphs, it is associated with solving the Cauchy problem for the forward Kolmogorov system on the corresponding interval which has already been used by the author in previous papers.

Keywords: queuing systems; $M_t/M_t/1$ queue; nonstationary queuing model; approximation; limiting characteristics; rate of convergence; truncation of the state space

DOI: 10.14357/08696527210103

Acknowledgments

This work was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 19-11-00020).

References

1. Satin, Y., A. Zeifman, and A. Kryukova. 2019. On the rate of convergence and limiting characteristics for a nonstationary queueing model. *Mathematics* 7(8):678. 11 p.
2. Zeifman, A. I., A. V. Korotysheva, V. Yu. Korolev, and Ya. A. Satin. 2016. Truncation bounds for approximations of inhomogeneous continuous-time Markov chains. *Theor. Probab. Appl.* 61(3):513–520.
3. Arns, M., P. Buchholz, and A. Panchenko. 2010. On the numerical analysis of inhomogeneous continuous-time Markov chains. *Inform. J. Comput.* 22:416–432.
4. Andreychenko, A., W. Sandmann, and V. Wolf. 2018. Approximate adaptive uniformization of continuous-time Markov chains. *Appl. Math. Model.* 61:561–576.

Received January 22, 2021

Contributor

Satin Yacov A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; yacovi@mail.ru