Ya. V. Kurylev, On the scattering on the line. I. Existence of wave operators and asymptotic completeness in periodic case, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1990, Volume 186, 136–141

Я.В.Курылев

О РАССЕЯНИИ НА КРИВОЙ. I. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

I. Введение. Проблема изучения операторов Шредингера с потенциалами, сосредоточенными на множестве нулевой меры (т.н. δ - образные потенциалы, потенциалы нулевого радиуса) волновала физиков с 30-х годов (см., напр. [I, 2]). Что же касается математически строгих результатов, то, по-видимому, первый результат такого рода, относящийся к случаю точечного потенциала, был получен в I961 г. Л.Д.Фаддеевым и Ф.А.Березиным [3]. Дальнейшее развитие метод потенциалов нулевого радиуса получил в 70-80 гг.(см.[4-8] и литературу, цитированную в указанных работах). В настоящей заметке мы будем рассматривать задачу рассеяния на кривой в $\mathbb{R}^3$, где z - расстояние вдоль кривой с соответствующим знаком. При этом соответствующий самосопряженный оператор, который мы будем обозначать $-\Delta_H$ задается с помощью граничного условия на кривой ℓ :

$$u-\rho\left(\ln\rho+H(z)\right)\frac{\partial u}{\partial\rho}\xrightarrow[\rho\to 0]{}0. \qquad (I)$$

Здесь ρ - расстояние до ℓ , а $H(z)$ - вещественнозначная функция (см.[5]). Относительно кривой ℓ мы будем предполагать выполненными те же условия регулярности, что и в [5]. Что же касается H, то мы будем полагать $H(z)\in L_\infty(\mathbb{R}^1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В [5] на $H(z)$ налагаются более жесткие условия; $H, H'\in L_\infty$. Однако условие $H'\in L_\infty(\mathbb{R}^1)$ можно снять, если при исследовании самосопряженности возникающих операторов использовать теорию квадратичных форм и КЛМН теорему, а не теорию возмущений самосопряженных операторов и теорему Като-Реллиха, как это делается в [4, 5].

Весьма полезной для изучения спектра оператора $-\Delta_H$ и теории рассеяния для пары $(-\Delta_H,-\Delta)$ оказывается формула для резольвенты $R_H(\lambda)$ оператора $-\Delta_H$ (также полученная в [5]):

$$R_H(\lambda)-R(\lambda)=\widetilde{R}(\lambda)\left(1+d/dz\right)A_H^{-1}(\lambda)\left(1-d/dz\right)P_\ell R(\lambda). \qquad (2)$$

Поясним входящие в формулу (2) обозначения. $R(\lambda)$ - резольвента оператора Лапласа $-\Delta$; $\widetilde{R}(\lambda)$ - это по-существу та же резольвента $R(\lambda)$, но рассматриваемая как ограниченный оператор из

$H_{-1}(\ell)$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$ (т.е. действующая на функциях вида $u(z)\delta(x-x(z))$, где $u(z)\in H_{-1}(\mathbb{R}^1)$. P_ℓ - оператор вложения из $H_2(\mathbb{R}^3)$ в $H_1(\ell)$. Наконец, внутренний оператор $A_H(\lambda)$, рассматриваемый как оператор в $L_2(\ell)$, представим в виде

$$A_H(\lambda)u = T(\lambda)u + \left(1-\frac{d}{dz}\right)H(z)\left(1+\frac{d}{dz}\right)u + B_\ell(\lambda)u. \qquad (3)$$

Для пояснения входящих в (3) членов удобно использовать преобразование Фурье $\tilde{u}(k)$ функции u. Тогда

$$\widetilde{T(\lambda)u}(k) = \left[\ln(k^2-\lambda)-\alpha\right](1+k^2)\tilde{u}(k). \qquad (4)$$

Оператор $B_\ell(\lambda)$ - это оператор, связанный с геометрией кривой ℓ; в частности, в случае, когда ℓ - прямая $B_\ell(\lambda)=0$. Оператор $A_H(\lambda)$ рассматривается на естественной (с точки зрения теории квадратичных форм) области определения, причем операторы $(1-d/dz)H(z)(1+d/dz)$ и $B_\ell(\lambda)$ представляют собой возмущения оператора $T(\lambda)$. Как показано в [5], при достаточно больших отрицательных λ и при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ оператор $A_H^{-1}(\lambda)$ существует и ограничен в $L_2(\ell)$, а вместе с ним существует и $R_H(\lambda)$ вида (2).

2. Теория рассеяния для потенциалов нулевого радиуса построена в основном для случая точечного взаимодействия и аналогичных моделей, при которых возмущение резольвенты оказывается конечномерным [6, 8] (ср., однако, близкую к настоящей заметке статью [9]). В недавней работе [10] изучается спектр и теория рассеяния для потенциала, также сосредоточенного на кривой в $\mathbb{R}^3$. Однако в отличие от рассматриваемой задачи, кривая ℓ в [10] предполагается замкнутой и конечной. Анализируя (2), можно видеть, что разность резольвент в этом случае будет ядерным оператором, так что применима теорема Бирмана-Като и справедливы все вытекающие из нее утверждения о спектре возмущенного оператора $-\Delta_H$ и о теории рассеяния для пары $(-\Delta_H, -\Delta)$. В случае же бесконечной кривой возмущение резольвенты уже не является ядерным и картина рассеяния более замысловата. Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим простейший пример.

Пример I. Рассеяние на прямой с постоянным граничным условием ($H(z)=h$, кривая ℓ - это ось $e_z\cdot z$). В этом случае возникают собственные функции непрерывного спектра волноводного типа, сосредоточенные вблизи оси $e_z\cdot z$:

$$\Psi_h(\rho,z;k) = \frac{e^{(\alpha+h)/2}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikz} K_0\left\{\rho e^{\alpha+h}\right\}, \qquad (5)$$

где $K_0(\omega)$ - функция Макдональда, а α - также константа, что и в определении $T(\lambda)$ (4). Функции $\Psi_h(\cdot,k)^{-}$ удовлетворяют уравнению

$$-\Delta_h \Psi_h(k) = \left[-e^{-2(\alpha+h)} + k^2\right] \Psi_h^{(k)}$$

так что $\sigma_{ac}(-\Delta_h) = [-e^{-2(\alpha+h)}, \infty)$. Отсюда очевидно следует отсутствие унитарной эквивалентности $-\Delta_h$ и $-\Delta$ (заметим, что оба эти оператора абсолютно непрерывны).

Итак, пример I показывает, что полноты волновых операторов $W_\pm(-\Delta_H, -\Delta)$ в общем случае ожидать не приходится. Тем не менее, существование их можно оправдать при достаточно слабых предположениях о кривой ℓ.

Введем множество предельных направлений C_ℓ кривой ℓ.

$$C_\ell = \bigcap_{M>0} \left\{ e \in S_1 : e = \frac{x(z)}{|x(z)|},\ |x(z)| \geq M \right\}.$$

ЛЕММА I. Пусть $mes_2 C_\ell = 0$. Тогда волновые операторы $W_\pm(-\Delta_H, -\Delta) = s\text{-}\lim\limits_{t\to\mp\infty} e^{-it\Delta_H} e^{it\Delta}$ существуют.

Доказательство основано на методе Кука (точнее, на варианте Купша-Сандаса метода Кука). В качестве пробных функций мы будем брать функции f такие, что $\hat{f}(\xi)$ - трехмерное преобразование Фурье $f(x)$, принадлежат $C^\infty_{0,0}(\mathbb{R}^3)$ и обращаются в ноль при $\xi/|\xi|$, лежащих в некоторой окрестности множества $C_\ell \cup (-C_\ell)$. Поскольку $mes_2 C_\ell = 0$ множество таких функций плотно в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Для исследования $\lim\limits_{t\to\mp\infty} e^{-it\Delta_H} e^{it\Delta} f$ мы будем использовать следующие срезающие функции.

Пусть $\chi(e) \in C^\infty(S_1)$, равна I в некоторой окрестности C_χ множества $C_\ell \cup (-C_\ell)$ и обращается в 0 на носителе $\hat{f}(\xi)$. При $|x(z)| \geq M_0 = M_0(\chi)$ кривая ℓ лежит в конусе $C_\chi \times [M_0, \infty)$. Пусть теперь $\chi_0(x)$ - обычная срезающая функция, равная I при $|x| \leq M_0$ и 0 при $|x| \geq 2M_0$. Введем $\varphi(x) = \chi_0(x) + [1 - \chi_0(x)]\chi(\hat{x})$, $\hat{x} = x/|x|$, $\varphi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности ℓ. Разобьем $e^{-it\Delta_H} e^{it\Delta} f$ на 2 части

$$e^{-it\Delta_H} e^{it\Delta} f = e^{-it\Delta_H} \varphi e^{it\Delta} f + e^{-it\Delta_H} [1-\varphi] e^{it\Delta} f = \mathcal{J}_1(t) + \mathcal{J}_2(t). \quad (6)$$

Применяя метод стационарной фазы к интегралу

$$f(x,t) \equiv e^{it\Delta} f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \exp\left\{-i\xi^2 t - i\langle \xi, x\rangle\right\} \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

и учитывая, что $\hat{f}(\xi)=0$ при $\xi/|\xi|\in \operatorname{supp}\chi(e)$, получаем, что

$$f(x,t)=O\left[\left(|t|+|x|\right)^{-N}\right],\ x\in \operatorname{supp}\varphi;\ \forall N>0$$

откуда следует, что $\|\mathcal{J}_1(t)\|=O(t^{-N}),\ \forall N>0.$

Рассмотрим теперь $\mathcal{J}_2'(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2'(t)&=e^{-it\Delta_H}\left\{(1-\varphi)\Delta-\Delta(1-\varphi)\right\}f(x,t)=\\&=e^{-it\Delta_H}\Delta\varphi f(x,t)+2e^{-it\Delta_H}\langle\nabla\varphi,\nabla f(x,t)\rangle\}.\end{aligned}\tag{7}$$

(При выводе равенства (7) мы учитывали, что $(1-\varphi)f(x,t)$ обращается в 0 вблизи ℓ так, что оператор $-\Delta_H$ на таких функциях совпадает $-\Delta$. Оба члена, стоящие в правой части (7), аналогичны $\mathcal{J}_1(t)$, так что для $\mathcal{J}_2'(t)$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}_2'(t)\|=O(|t|^{-N}),\ \forall N>0.$$

откуда немедленно вытекает существование $\lim\limits_{t\to\mp\infty}\mathcal{J}_2(t)=$ $=\lim\limits_{t\to\mp\infty}e^{-it\Delta_H}e^{it\Delta}f.$

3. Перейдем к рассеянию на прямой $e_z\cdot z$ с периодической функцией $H(z)$ (мы полагаем $H(z+2\pi)=H(z)$). Как показывает пример I, условие полноты волновых операторов $W_\pm(-\Delta_H,-\Delta)$ в этом случае нарушается. Тем не менее имеет место

ЛЕММА 2. Пусть $-\Delta_H$ - оператор Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на оси $e_z\cdot z=\{(x,z):x_1=x_2=0,z\in\mathbb{R}^1\}$; причем $H(z+2\pi)=H(z)$. Тогда существуют и асимптотически полны волновые операторы $W_\pm(-\Delta_H,-\Delta)$, и оператор рассеяния $S=W_-^*W_+$ унитарен.

Доказательство основано на традиционном для периодических задач методе разложения в прямой интеграл (см., напр. [II]).

Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}:L_2(\mathbb{R}^3)\longrightarrow\int_0^1\oplus\mathcal{H}_\gamma d\gamma$, где $\mathcal{H}_\gamma=\mathcal{H}=L_2(\mathbb{R}^2\times[0,2\pi])$. При $f\in S(\mathbb{R}^3)$

$$(\mathfrak{F}f)_\gamma(x_1,x_2;z)=(2\pi)^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i(n+\gamma)z}\tilde{f}(x_1,x_2,n+\gamma),\ z\in[0,2\pi],\tag{8}$$

где $\tilde{f}$ - преобразование Фурье f по переменной z. Отображение $\mathfrak{F}$ осуществляет унитарное отображение $L_2(\mathbb{R}^3)$ на $\int_0^1\oplus\mathcal{H}_\gamma d\gamma$, которое разлагает как оператор Лапласа $-\Delta$, так и оператор Лапласа с периодическим потенциалом на оси $-\Delta_H$. При этом $\mathfrak{F}\Delta\mathfrak{F}^{-1}=$ $\int\oplus\Delta(\gamma)d\gamma$, где Δ_γ - оператор Лапласа в слое $L_2(\mathbb{R}^2\times[0,2\pi])$ с краевыми условиями

$$\Psi(x_1,x_2,2\pi)=e^{2\pi i\gamma}\Psi(x_1,x_2,0),\Psi_z(x_1,x_2,2\pi)=e^{2\pi i\gamma}\Psi_z(x_1,x_2,0)\quad(9)$$

Аналогичным образом разлагается и оператор $-\Delta_H$:

$$\mathcal{F}\Delta_H\mathcal{F}^{-1}=\int_0^1\oplus\Delta_H(\gamma)d\gamma,$$

который совпадает с $-\Delta$, задаваемым на функциях, удовлетворяющих краевым условиям (9) и условию при $x_1=x_2=0$ вида (I). Имеет место аналог равенства (2) для резольвент операторов $-\Delta_H(\gamma)$ и $-\Delta(\gamma)$

$$r_H(\gamma,\lambda)-r(\gamma,\lambda)=\tilde{r}(\gamma,\lambda)(1+d/dz)a_H^{-1}(\gamma,\lambda)(1-d/dz)p_e r(\gamma,\lambda).\quad(10)$$

Здесь символ $r(\gamma,\lambda)$ соответствует $R(\lambda)$, $a_H(\gamma,\lambda)-A_H(\lambda)$, p_e-P_e с естественными заменами. Так

$$a_H(\gamma,\lambda)f=t(\gamma,\lambda)f+(1-d/dz)H(z)(1+d/dz)f$$

где

$$\tilde{t}_n(\gamma,\lambda)=[\ln((n+\gamma)^2-\lambda)-\alpha](1+(n+\gamma)^2)\quad(11)$$

и т.п. При $H(z)\in L_\infty(0,2\pi)$ и достаточно больших отрицательных

$$a_H^{-1}(\gamma,\lambda)=t^{-1/2}(\gamma,\lambda)[E+t^{-1/2}(\gamma,\lambda)(1-d/dz)H(1+d/dz)t^{-1/2}]^{-1}t^{-1/2}.\quad(12)$$

Из явного вида коэффициентов Фурье $\tilde{t}_n(\gamma,\lambda)$ (см.(11)) следует, что при достаточно больших отрицательных λ оператор $t^{-1/2}(\gamma,\lambda)$ это оператор Гильберта-Шмидта в $L_2(0,2\pi)$. Как показано в [5] оператор $(E+t^{-1/2}(1-d/dz)H(1+d/dz)t^{-1/2})^{-1}$ ограничен при больших отрицательных λ или $\operatorname{Im}\lambda\neq0$. Далее операторы $(1-d/dz)p_e r(\gamma,\lambda)$ и $\tilde{r}(\gamma,\lambda)(1+d/dz)$ ограничены как операторы из $L_2(\mathbb{R}^2\times[0,2\pi])$ в $L_2(0,2\pi)$ и из $L_2(0,2\pi)$ в $L_2(\mathbb{R}^2\times(0,2\pi))$ соответственно. Таким образом, из (10) следует, что $r_H(\gamma,\lambda)-r(\gamma,\lambda)$ - ядерный при всех $\gamma\in[0,1]$. В силу теоремы Бирмана-Като отсюда следует существование и полнота волновых операторов $W_\pm(-\Delta_H(\gamma),-\Delta(\gamma))$ и унитарность операторов рассеяния $S(\gamma)=W_-^*(\gamma)W_+(\gamma)$. Подымая с помощью $\mathcal{F}^{-1}$ этот результат в $L_2(\mathbb{R}^3)$, мы получаем унитарность S и асимптотическую полноту $W_\pm: W_-(-\Delta_H,-\Delta)L_2(\mathbb{R}^3)=W_+(-\Delta_H,-\Delta)L_2(\mathbb{R}^3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 2 следует, что $L_2(\mathbb{R}^2\times[0,2\pi])\ominus W_\pm(-\Delta_H(\gamma),-\Delta(\gamma))L_2(\mathbb{R}^2\times[0,2\pi])$ – это подпространство, натянутое на собственные функции оператора $-\Delta_H(\gamma)$, сосредоточенные вблизи отрезка $x_1=x_2=0$, $z\in[0,2\pi]$. Поэтому $L_2(\mathbb{R}^3)\ominus W_\pm L_2(\mathbb{R}^3)$ оказывается натянутым на решения волноводного типа, сосредоточенные вблизи оси $x_1=x_2=0$. Таким образом, в задаче с потенциалом, сосредоточенным на оси, появляется новый канал рассеяния, что роднит эту задачу с многочастичной задачей рассеяния. Более подробное описание волноводных решений и соответствующего подпространства будет проведено в следующей работе.

Литература

1. Bethe H., Peierls R. Quantum theory of the diplon. Proc.Roy.Soc., 1935, v.148 A, p.146-156.
2. Kronig R.L., Penney W.G. Quantum vechanics of electron in crystal lattices. Proc.Roy.Soc.,1931,v.130A, p.499-513.
3. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. Докл. АН СССР, 1961, т.137, № 5, с.1011-1014.
4. Благовещенский А.С., Лаврентьев К.К. Трехмерный оператор Лапласа с граничным условием на оси. Вестник ЛГУ, 1977, № 1, с.9-16.
5. Курылев Я.В. О граничных условиях на кривой для трехмерного оператора Лапласа. В кн.: Математические вопросы теории распростр.волн. 9. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1978, т.78, с.112-127.
6. Павлов Б.С. Теория расширений и явно решаемые модели. УМН, 1987, т.42, № 6, с.99-132.
7. Cheremshantsev S.E. Hamiltonians with zero-range interactions supported on a Brownian path. LOMI - Preprints E-12-89, L., 1989.
8. Albeverio S., Fenstad J.E., Hoegh-Krohn R., Lindstrøm T. Non Standart Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics. Acad.Press., N-Y-London, 1986.
9. Yafaev D.R. On the Break-down of Completeness of Wave Operators in Potential Seattering. Comm.Math.Phys., 1979, v.65, N 2, p.167-180.
10. Teta A. Singular Perturbations of the Laplacian and Connections with Models of Random Medic. Preprint. Bohum Univ.1989.
11. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.4. Анализ операторов. М., 1982.