Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1980.

2. Хабибуллин И.Ш. Об оптимизации прямых методов решения нелинейных интегральных уравнений / Ред.журн. "Дифференциальные уравнения. - Минск, 1983. - 7 с. - Деп. в ВИНИТИ 01.06.1983, № 4884.

Е.А.Широкова

ПОЛУЧЕНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ВИДЕ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Рассмотрим внешнюю обратную краевую задачу (ОКЗ) по параметру S [1, с.29, 33]. Пусть функция $W(S)=U(S)+iV(S)$, $S\in[0,\ell]$ со свойствами $W(0)=W(\ell)$, $W(S_1)\neq W(S_2)$ при $S_1\neq S_2$ является граничным значением функции $W(z)$, аналитической в области $\mathcal{D}_z$, содержащей бесконечно удаленную точку. Следует найти $\mathcal{D}_z$ и $W(z)$, если известно, что S - дуговая абсцисса границы неизвестной области.

Функция $f(\zeta)$, отображающая единичный круг $|\zeta|<1$ на искомую область, ищется следующим образом [1, с.34]. Сначала определяется $f_0(\zeta)$ - решение внутренней ОКЗ с теми же исходными данными. Затем находится корень ζ_0 уравнения Гахова

$$\frac{f_0''(\zeta)}{f_0'(\zeta)}=\frac{2\cdot\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2}, \quad |\zeta|<1. \tag{I}$$

Получив ζ_0, найдем $f(\zeta)$: $f(\zeta)=\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta} f_0'(\zeta)\cdot\left(\frac{1-\bar{\zeta}_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)^2 d\zeta + C$.

Уравнение (I), как показано в [2], в случае, если $W'(S)$ гельдерова, имеет хотя бы один корень. Единственность корня уравнения (I) обеспечивает единственность решения внешней ОКЗ, и наоборот,сушествование нескольких корней уравнения (I) может привести к существенно различным решениям задачи [3]. Достаточные условия единственности решения уравнения (I) как условия на $f(\zeta)$ и $f_0(\zeta)$ рассматривались во многих работах (см., напр., [4], [5], [6]).

В настоящей работе получены достаточные условия единственности решения уравнения (I) в виде ограничений на функцию $W(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \ell$.

Прежде всего отметим, что [6], если $f_0(\zeta)$ выпукла, т.е. $\operatorname{Re}\left(1+\zeta\frac{f_0''}{f_0'}\right) \geqslant 0$, то уравнение (I) имеет единственный корень. Условие выпуклости $f_0(\zeta)$ может быть обеспечено так же, как в [7], следующими ограничениями на $w(s)=u(s)+iv(s)$.

<u>Теорема I</u>. Пусть

$$\left|\arg\frac{u(s)\cdot u'(s)+v(s)\cdot v'(s)}{u(s)\cdot v'(s)-v(s)\cdot u'(s)}\right| \leqslant \alpha\cdot\frac{\pi}{2},\ \alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right),$$

$$|w(s)|\leqslant M,\ \left|\frac{u'(s)\cdot u''(s)-v'(s)\cdot v''(s)}{[u'^2(s)+v'^2(s)]^{3/2}}\right| \leqslant K$$

и для функции

$$R(s)=\frac{u'(s)\cdot u''(s)+v'(s)\cdot v''(s)}{[u'^2(s)+v'^2(s)]^{3/2}}$$

справедливо одно из ограничений:

а) $-p_1 \leqslant R(s) \leqslant p_2,\ p_1,p_2>0,\ p_1+p_2 \leqslant \pi\cdot\left(N_2\cdot \ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^{-1}$, где θ – корень уравнения $\theta+\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\cdot\int\limits_0^\theta \ln\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\,d\tau=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{N_1}{\sqrt{2}}$;

б) $$\int\limits_0^\ell R^2(s)\cdot|w'(s)|\,ds \leqslant \frac{\pi}{N_2}\cdot\left(N_1^2-2\sqrt{2}N_1\right).$$

Тогда при $N_1=\sqrt{2(K^2\cdot M^2\cdot\sec\alpha\pi-1)}$, $N_2=M\cdot\exp\frac{\pi N_1}{2}$ решение соответствующей внешней ОКЗ единственно.

Приведенные достаточные условия единственности геометрически наглядны, однако выделение классов корректности с их помощью представляет определенные трудности. Получим достаточное условие выпуклости $f_0(\zeta)$ в виде ограничений на $(\ln W'(s))''$.

Теорема 2. Пусть $|(\arg w'(s))''| \leq A\cdot \ell^{-2}, |(\ln|w'(s)|)''| \leq B\cdot \ell^{-2}$, причем $\varepsilon=[10A+B(4\pi+A)](24\pi)^{-1}$ меньше ε_0 – наименьшего корня уравнения $\varepsilon\cdot \Omega'(1+2\varepsilon)=1$, где $\Omega(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{m^{\frac{m}{2}}}{m!}z^m$, $(0{,}04<\varepsilon_0<0{,}05)$.

Тогда решение соответствующей внешней ОКЗ единственно, если

$$\frac{A}{2}+\frac{B^2}{2\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tau}{\sin\tau}d\tau\cdot[1+\varepsilon\cdot\chi(\varepsilon)]<2\pi\ , \quad \text{где}$$

$$\chi(\varepsilon)=\{\Omega(1+2\varepsilon)\cdot\Omega'(1+2\varepsilon)+(1+2\varepsilon)[\Omega'^2(1+2\varepsilon)+\Omega(1+2\varepsilon)\cdot\Omega''(1+2\varepsilon)]\}[1-$$
$$-\varepsilon\cdot\Omega'(1+2\varepsilon)]^{-1}.$$

Доказательство. Из условия на $(\arg w'(s))''$ и ℓ – периодичности функции $w'(s)$ имеем $\frac{2\pi}{\ell}-\frac{A}{2\ell}\leq(\arg w'(s))'\leq\frac{2\pi}{\ell}+\frac{A}{2\ell}$. Условие $(\ln|w'(s)|)''\leq B\cdot\ell^{-2}$ обеспечивает ограничение $(\ln|w'(s)|)'\leq B\cdot(2\ell)^{-1}$.

И так как

$$K(\tau,s)\equiv[\arg(w(\tau)-w(s))]'_s=\frac{d\arg w'(s)}{ds}+\frac{1}{3}\left\{|w'|^{-\frac{1}{2}}\left[|w'|^{\frac{1}{2}}(\arg w')'\right]'\right\}_{|\tau+\vartheta(s-\tau)}\cdot(s-\tau),$$

то (2)

$$|K(\tau,s)-\frac{\pi}{\ell}|\leq[10A+B(4\pi+A)]\cdot(24\ell)^{-1}=\frac{\varepsilon\pi}{\ell}\ .$$

Из соотношения $(p(s,\tau))'_\tau\equiv((\ln|w(s)-w(\tau)|)'_s\cdot\sin\frac{\pi(\tau-s)}{\ell})'_\tau=$

$=\frac{\pi}{2\ell}(\ln|w'|)'_{|\tau+\vartheta(s-\tau)}$ следует, что $|(p(s,\tau))'_\tau|\leq\frac{\pi B}{4\ell^2}$.

Рассмотрим оценку решения уравнения Фредгольма

$$\psi'(s)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\ell\psi'(\tau)\cdot K(\tau,s)d\tau-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\ell(\ln|w'(\tau)|)'\cdot[\ln|w(\tau)-w(s)|]'_s d\tau. \quad (3)$$

Согласно оценке Трикоми [8], заменим $K(\tau,s)$ на $K^*(\tau,s)\equiv\frac{\pi}{\ell}$, и тогда из условия (2) получим

$$|\psi'(s)| \leq \sup_s \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\ell} (\ln|w'(\tau)|)' \cdot [\ln|w(\tau)-w(s)|]'_s \, d\tau \right| \cdot [1+\varepsilon\chi(\varepsilon)] .$$

Обозначив $(\ln|w'(\tau)|)' \cdot [\ln|w(\tau)-w(s)|]'_s \cdot \sin\frac{\pi(\tau-s)}{\ell} \equiv p(s,\tau)\cdot(\ln|w'(\tau)|)' \equiv q(s,\tau)$, имеем $\sup_s \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\ell} \frac{q(s,\tau)}{\sin\frac{\pi(\tau-s)}{\ell}} d\tau\right| = \sup_s \left|\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{q(s,t+s)}{\sin\frac{\pi t}{\ell}} dt\right| =$

$$= \sup_s \frac{1}{2}\left|\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{q(s,t+s)-q(s,-t+s)}{\sin\frac{\pi t}{\ell}} dt\right| \leq \sup_{s,\tau}|q'_\tau(s,\tau)| \cdot 2\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{t\,dt}{\sin\frac{\pi t}{\ell}} = \frac{B^2}{2\pi^2\ell} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{\sin\tau} d\tau ,$$

Так как, согласно периодичности, $|q'_\tau| \leq |(\ln|w'|)''| \cdot |p(s,\tau)| + |p'_\tau(s,\tau)| \times |(\ln|w'|)'| \leq \pi B^2 (4\ell^3)^{-1}$. В итоге имеем $|\psi'(s)| \leq \frac{B^2}{2\pi^2\ell} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{\sin\tau} d\tau [1+\varepsilon\chi(\varepsilon)]$.

Обозначим через K_z кривизну границы области $\mathcal{D}_{0z}$, получающейся при решении внутренней ОКЗ с исходными граничными данными. Учитывая, что $K_z = (\arg w'(s))' + \psi'(s)$, где $\psi'(s)$ - решение уравнения (3) [9] и, следовательно, $\frac{2\pi}{\ell} - \frac{A}{2\ell} - \frac{B^2}{2\pi^2\ell}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{\sin\tau} d\tau[1+\varepsilon\chi(\varepsilon)] \leq K_z$,

из условия теоремы получим, что $K_z \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Возникает вопрос, нельзя ли расширить класс единственности решения внешней ОКЗ, ослабляя условия на область значений функционала $\mathrm{Re}\,\zeta\frac{f_0''}{f_0'}$. Покажем, что условие $\mathrm{Re}\,\zeta\frac{f_0''}{f_0'} \geqslant -1$ нельзя ослабить путем увеличения константы 1 .

Пусть $\zeta\frac{f_0''}{f_0'} = a\left[\sqrt{\left(\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\right)^2 + b} - \sqrt{1+b}\right]$, $a>1,\ b\geq a^2-1$. Областью значений данного функционала при $|\zeta|<1$ является полуплоскость

$\operatorname{Re}\zeta\frac{f_0''}{f_0'} > -a\sqrt{1+b}$ с разрезом по вещественной оси от $-a\cdot\sqrt{1+b}$ до $a(\sqrt{b}-\sqrt{1+b})$.

Уравнение (I) для данной функции имеет, кроме корня $\zeta_0=0$, еще корни $\pm\left[a(\sqrt{1+b}-a)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[a\sqrt{1+b}-1\right]^{-\frac{1}{2}}$. Корни сливаются только в случае, когда $b=0$, $a=1$, т.е. $f_0(\zeta)$ выпукла.

Найдем ограничение вида $-\mathcal{L}<\operatorname{Re}\zeta\frac{f_0''}{f_0'}<M$, достаточное для того, чтобы уравнение (I) для $f_0(\zeta)=a_0+a_1\zeta+a_3\zeta^3+\ldots$ имело единственный корень $\zeta_0=0$.

Л е м м а . Пусть $\mathcal{L}<\operatorname{Re}\zeta\frac{f_0''}{f_0'}<M$, где $(M+\mathcal{L})\cdot\cos\frac{(M-\mathcal{L})\pi}{2(M+\mathcal{L})}<\pi$. Тогда уравнение (I) имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из условия леммы следует, что

$$\zeta\frac{f_0''}{f_0'}=\frac{M-\mathcal{L}}{2}+\frac{i(M+\mathcal{L})}{\pi}\ln\frac{1-A\omega(\zeta)-i\omega(\zeta)+iA}{1-A\omega(\zeta)+i\omega(\zeta)-iA},\quad \text{где } A=\operatorname{tg}\frac{(M-\mathcal{L})\pi}{4(M+\mathcal{L})},$$

$\omega(\zeta)=b_0\zeta^2+b_1\zeta^3+\ldots,\ |\omega(\zeta)|\leq|\zeta|^2$ при $|\zeta|\leq 1$.

Следовательно, $\sup\limits_{\theta}\operatorname{Re}\zeta\frac{f_0''}{f_0'}\Big|_{\zeta=\rho e^{i\theta}}=\frac{M-\mathcal{L}}{2}+\frac{2(M+\mathcal{L})}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\rho^2-A}{1-A\rho^2}$. Так как из условия леммы $\frac{M-\mathcal{L}}{2}+\frac{2(M+\mathcal{L})}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\rho^2-A}{1-A\rho^2}\leq\frac{2\rho^2}{1-\rho^2}$, то лемма доказана.

Заметим, что $M=\frac{\pi}{2}$ при $M=\mathcal{L}$.

При получении достаточного условия единственности корня уравнения (I), отличного от условия выпуклости $f_0(\zeta)$, приходится пользоваться условием $f_0''(0)=0$. Обеспечить это условие можно, потребовав 2-симметричности решения в виде дополнительного ограничения на $W(S)$: $W(S)=-W(\frac{\ell}{2}+S)$.

Отметим, что требование 2-симметричности решения $f_0(\zeta)$ может быть использовано для получения условия единственности корня уравнения (I) в виде $\left|\zeta\frac{f_0''}{f_0'}\right| \leq \frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}$ тем же методом, который использован в статье [7]. В результате незначительного изменения в доказательстве Майера и Северина легко получается следующая

<u>Теорема 3</u>. Пусть $W(s) = -W(\frac{\ell}{2}+s)$, $\left|\arg\frac{u(s)\cdot u'(s)+v(s)\cdot v'(s)}{u(s)\cdot v'(s)-v(s)\cdot u'(s)}\right| \leq \alpha\cdot\frac{\pi}{2}$,

$\left|\frac{u'(s)\cdot v''(s)-v'(s)\cdot u''(s)}{[u'^2(s)+v'^2(s)]^{3/2}}\right| \leq K$, $|w(s)| \leq M$ и выполняется одно из двух условий: а) $R(s) \leq A$, б) $R(s) \geq -A$.

Тогда при $A \leq (2-N_1)(2N_2)^{-1}$, где N_1 , N_2 и $R(s)$ те же, что и в теореме I, решение внешней ОКЗ единственно.

С использованием леммы получим ограничения на $\ln W'(s)$ и $\ln W(s)$, достаточные для единственности решения соответствующей внешней ОКЗ.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $w(s) = -w(\frac{\ell}{2}+s)$, $|\arg w'(s))''| \leq A\cdot\ell^{-2}$, $|(\ln|w'(s)|)''| \leq B\cdot\ell^{-2}$,

причем $\varepsilon = [10A + B(4\pi + A)]\cdot(24\pi)^{-1}$ меньше наименьшего корня уравнения $\varepsilon\cdot\Omega'(1+2\varepsilon) = 1$; $(\arg w(s))' \geq a\ell^{-1}$, $|(\ln|w'(s)|)''| \leq b\cdot\ell^{-2}$, причем $\mathcal{D} \equiv$

$\equiv \frac{B\cdot b}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tau}{\sin\tau}d\tau[1+\varepsilon\chi(\varepsilon)] < a$, тогда соответствующая внешняя ОКЗ имеет единственное решение, если $(M+\mathcal{L})\cdot\cos\frac{(M-\mathcal{L})}{2(M+\mathcal{L})} < \pi$, где

$$M = [2\pi + A/2 + \mathcal{D}\cdot B/b]\cdot[a-\mathcal{D}]^{-1} - 1, \quad -\mathcal{L} = [2\pi - A/2 - \mathcal{D}\cdot B/b]\cdot[a-\mathcal{D}]^{-1} - 1,$$

$\chi(\varepsilon)$ и Ω те же, что и в теореме 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как показано выше, для решения $\psi'(s)$ уравнения (3) справедлива оценка $|\psi'(s)| \leq \mathcal{D} \cdot B/b$. Тем же способом можно оценить решение $\varphi'(s)$ уравнения Фредгольма

$$\varphi'(s) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\ell \varphi'(\tau)\cdot K(\tau,s)\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^\ell (\ln|w(\tau)|)' \cdot [\ln|w(\tau)-w(s)|]'_s\,d\tau: \quad (4)$$

$$|\varphi'(s)| \leq \mathcal{D}.$$

Отобразим область $\mathcal{D}_w$ с границей $\mathcal{L}_w = \{w = w(s), s\in[0,\ell]\}$ на круг $|\zeta| < 1$ с соответствием $0 \to 0$. Для $\zeta(w)$, осуществляющей это отображение, справедливо

$$\ln\left|\frac{\zeta(w)}{w}\right|\Big|_{w=w(s)} = -\ln|w(s)|.$$

Обозначим через $\varphi(s) = \arg\frac{\zeta(w)}{w}\Big|_{w=w(s)}$, тогда $\ln\zeta(w)\Big|_{w=w(s)} = i\varphi(s) + i\arg w(s)$

и, значит, $\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}\Big|_{w=w(s)} \cdot w'(s) = i\varphi'(s) + i(\arg w(s))'$, т.е. $|\zeta'(w)| = |w'(s)|^{-1} \times$ $\times |\varphi'(s) + (\arg w(s))'|$, где $\varphi'(s)$ - решение уравнения (4).

Так как $\left|\frac{df_0(\zeta)}{d\zeta}\right|_{|\zeta|=1} = \left|\frac{df_0(\zeta(w))}{dw}\cdot\frac{dw}{d\zeta}\right| = \left|\varphi'(s) + \frac{d\arg w(s)}{ds}\right|^{-1}$,

то при условии $\sup_s|\varphi'(s)| < \inf_s(\arg w(s))'$, которое выполнено согласно условию теоремы, имеем

$$|f_0'(\zeta)| \leq [\inf_s(\arg w(s))' - \sup_s|\varphi'(s)|]^{-1} \leq [a-\mathcal{D}]^{-1}.$$

Используя соотношение $K_z = [Re(1+\zeta\frac{f_0''}{f_0'})]\cdot|f_0'(\zeta)|^{-1}$, получим

$$\sup_s|f_0'(\zeta)|\cdot\inf_s K_z \leq Re(1+\zeta\frac{f_0''}{f_0'}) \leq \sup_s|f_0'(\zeta)|\cdot\sup_s K_z.$$

Таким образом, $-\mathcal{L} < Re\,\zeta\frac{f_0''}{f_0'} < M$, и условия леммы выполнены. Теорема доказана.

Литература

I. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та. I965.

2. Гахов Ф.Д. Об обратных краевых задачах // Учен. зап. Казан. ун-та. I953. Т.II3. Кн.IO. С.9 - 20.

3. Рогожин В.С. О единственности решения внешней обратной краевой задачи / Учен. зап. Казан. ун-та. I957. Т.II7. Кн. 2. С.38 - 4I.

4. Кудряшов С.Н. О числе решений внешних обратных краевых задач // Изв. вузов. Матем. I969. № 8. С.30 - 32.

5. Аксентьев Л.А., Хохлов Ю.Е., Широкова Е.А. О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Матем. заметки. I978. Т.24. № 3. С.3I9 - 329.

6. Аксентьев Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. I984. № 2. С.3 - II.

7. Майер Ф.Ф., Севодин М.А. К сильной проблеме однолистности решения внутренней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Матем. I985. № 3. С.44 - 5I.

8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, I960.

9. Широкова Е.А. Применение интегральных уравнений Фредгольма при исследовании внутренней обратной краевой задачи // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан.ун-та, I984. Вып.2I. С.233 - 239.