А. И. Кожанов, Корректность начально-краевых задач и свойства решений для параболических уравнений с нелинейным нелокальным источником, *Докл. РАН*, 1994, том 336, номер 2, 161–164

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1994, том 336, № 2, с. 161 - 164

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

© 1994 г. А. И. Кожанов

Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 31.05.93 г.

Поступило 06.07.93 г.

Целью настоящей работы будет исследование разрешимости и свойств решений задачи Коши и краевых задач для интегродифференциальных уравнений

$$u_t - \Delta u + \mu u = \int_0^t K(x, t, \tau) u^p(x, \tau) d\tau + f(x, t), \qquad (1)$$

а также для некоторых других уравнений, близких к указанному. Уравнения типа уравнений (1) встречаются при описании различных процессов, в которых учитываются эффекты памяти; близкие уравнения возникают в математической биологии (подобными уравнениями – так называемыми уравнениями Вольтерра – описываются некоторые процессы динамики популяций). Среди работ последнего времени, посвященных исследованиям различных моделей уравнений (1), отметим работы [1 - 4] (см. также имеющуюся в этих работах библиографию).

Пусть $p > 1$. Как и в случае параболических уравнений с локальным источником [5], основную роль в наших исследованиях будут играть аналогии принципа максимума и получаемые на их основе теоремы сравнения; с помощью теорем сравнения будут исследованы вопросы существования и несуществования глобальных решений задачи Коши и начально-краевых задач для уравнений (1), поведения решения на бесконечности и при подходе к точке обострения, а также некоторые другие вопросы. Теоремы сравнения решений задачи Коши и начально-краевых задач для уравнений (1) доказываются полностью аналогично доказательству теорем сравнения для параболических уравнений с локальным источником [5]. Справедливость теорем сравнения дает возможность ввести понятия верхних и нижних решений как решений соответствующих неравенств [5]; следовательно, для доказательства существования либо несуществования глобального гладкого решения задачи Коши или начально-краевых задач достаточно построить ограниченное верхнее решение либо неограниченное нижнее.

Начнем с исследования задачи Коши. Пусть вначале $f(x, t) \equiv 0$, $\mu \equiv \text{const}$. Возникающие ниже в условиях теорем постоянные A, C_0, C_1, C_2, T_0 будут считаться положительными, постоянная q будет больше 1, условия на другие постоянные будут указываться по ходу. Обозначим:

$$R^1_+ = \{t \in R^1, t \geq 0\},$$

$$R^{n+1}_+ = \{ (x, t) \colon x \in R^n, t \in R^1_+ \},$$

$$\tilde{R}^{n+2}_+ = \{ (x, t, \tau) \colon x \in R^n, t \in R^1_+, 0 \leq \tau \leq t \}.$$

Рассмотрим задачу: найти решение уравнения

$$u_t - \Delta u + \mu u = \int_0^t K(x, t, \tau) u^p(x, \tau) d\tau, \qquad (1')$$

удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = u_0(x). \qquad (2)$$

Теорема 1. *Пусть функция $K(x, t, \tau)$ принадлежит классу $C^1(\tilde{R}^{n+2}_+)$, положительна и представима в виде $K(x, t, \tau) = K_0(x, t, \tau) \cdot K_1(x, \tau)$ с положительными функциями $K_0(x, t, \tau)$ и $K_1(x, \tau)$, причем выполняется*

$$\int_0^t K_0^q(x, t, \tau) d\tau \leq C_1 \ \text{для всех} \ (x, t) \in R^{n+1}_+,$$

$$K_1(x, \tau) \leq C_2 \exp(\alpha_1 \tau) (T_0 + |x|^2)^\beta;$$

кроме того, пусть выполняются условия

$$K_t(x, t, \tau) + \gamma K(x, t, \tau) \leq 0,$$

$$K(x, t, t) \leq C_0 \exp(\alpha_0 t)(T_0 + |x|^2)^\kappa.$$

Институт математики Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Тогда если для постоянных $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \gamma, \mu, \kappa, A, C_0, T_0, q$ *и некоторой отрицательной постоянной* k *выполняется*

$$\alpha_1 + pk < 0, \quad \beta + \lambda_1 pq' \le 0$$
$$(q' = q/(q-1)), \quad \kappa > -1,$$
$$\alpha_0 + k(p-1) \le 0, \quad \gamma + k \le 0,$$
$$[k^2 + (\mu+\gamma)k + \mu\gamma]T_0 - 2(\gamma+k)\lambda_1 n > C_0 A^{p-1},$$
$$(\mu + k)T_0 - 4\lambda_1(\lambda_1 - 1) - 2\lambda_1 n \ge 0,$$

где $\lambda_1 = -(\kappa+1)/(p-1)$, *и если функция* $u_0(x)$ *принадлежит* $C(R^n)$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$0 \le u_0(x) \le A(T_0 + |x|^2)^{\lambda_1},$$

то в R_+^{n+1} *существует глобальное гладкое решение задачи Коши* (1'), (2), *и это решение при* $x \in R^n$, $t \ge 0$ *будет удовлетворять неравенствам*

$$0 \le u_0(x) \le A\exp(kt)(T_0 + |x|^2)^{\lambda_1}.$$

Доказательство основано на построении ограниченного верхнего решения. Функция $v(x, t) = A\exp(kt)(T_0 + |x|^2)^{\lambda_1}$ удовлетворяет неравенству

$$v_{tt} - \gamma\Delta v - \Delta v_t + (\mu+\gamma)v_t + \gamma\mu v >$$
$$> C_0\exp(\alpha_0 t)(T_0 + |x|^2)^{\kappa} v^p.$$

В силу условий на $K(x, t, \tau)$ это неравенство можно продолжить:

$$v_{tt} - \gamma\Delta v - \Delta v_t + (\mu+\gamma)v_t + \gamma\mu v >$$
$$> K(x, t, t)v^p + \int_0^t [K_t(x, t, \tau) + \gamma K(x, t, \tau)]\, v^p(x, \tau)d\tau$$

и после интегрирования получить

$$v_t - \Delta v + \mu v > \int_0^t K(x, t, \tau)\, v^p(x, \tau)d\tau.$$

Но тогда функция v и будет верхним решением, что дает оценку

$$u(x, t) \le v(x, t) = A\exp(kt)(T_0 + |x|^2)^{\lambda_1}. \qquad (3)$$

Неотрицательность функции $u(x, t)$ очевидна. Далее, оценка (3) дает равномерную ограниченность в R_+^{n+1} правой части уравнения (1'). В силу классических результатов о разрешимости задачи Коши для параболических уравнений с нелинейной правой частью [5, 6] отсюда имеем существование требуемого глобального решения. Теорема доказана.

Теорема 1 дает существование решения задачи Коши, экспоненциально убывающего по t при $t \to \infty$ и убывающего степенным образом при $|x| \to \infty$. Приведем теперь теорему о существовании решения, убывающего степенным образом как по t, так и по x.

Теорема 2. *Пусть функция* $K(x, t, \tau)$ *принадлежит классу* $C^1(\tilde{R}_+^{n+2})$, *положительна и представима в виде* $K(x, t, \tau) = K_0(x, t, \tau) \cdot K_1(x, \tau)$ *с положительными функциями* $K_0(x, t, \tau)$ *и* $K_1(x, \tau)$, *причем выполняются условия*

$$\int_0^t K_0^q(x, t, \tau)d\tau \le C_1 \text{ для всех } (x, t) \in R_+^{n+1},$$

$$K_1(x, \tau) \le C_2(T_0 + \tau + |x|^2)^{\beta};$$

кроме того, пусть выполняются условия

$$K_t(x, t, \tau) + \gamma K(x, t, \tau) \le 0,$$
$$K(x, t, t) \le C_0(T_0 + t + |x|^2)^{\kappa}$$

и условия

$$\kappa > -2, \quad \beta + q'p\lambda_0 < -1, \quad \gamma\mu \ge 0, \qquad (4)$$

$$\lambda_0(\lambda_0 - 1)(1 + 4\gamma T_0 - 2n + \gamma\mu T_0^2) > C_0 A^{p-1}, \qquad (5)$$

$$(\mu+\gamma)\lambda_0 - 4\gamma\lambda_0(\lambda_0 - 1) - 2\gamma\lambda_0 n \ge 0, \qquad (6)$$

$$\lambda_0 - 4\lambda_0(\lambda_0 - 1) - 2\lambda_0 n + \mu T_0 \ge 0, \qquad (7)$$

где $\lambda_0 = -(\kappa+2)/(p-1)$, *либо условия*

$$\kappa > -1, \quad \beta + q'p\lambda_1 < -1, \quad \gamma\mu \ge 0, \qquad (8)$$

$$1 + 4\gamma T_0 - 2n \ge 0, \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}&(\mu+\gamma)\lambda_1 - 4\gamma\lambda_1(\lambda_1 - 1) - \\ &- 2\gamma\lambda_1 n + \gamma\mu T_0 > C_0 A^{p-1},\end{aligned} \qquad (10)$$

$$\lambda_1 - 4\lambda_1(\lambda_1 - 1) - 2\lambda_1 n + \mu T_1 \ge 0, \qquad (11)$$

где $\lambda_1 = -(\kappa+1)/(p-1)$, *либо же условия*

$$\begin{aligned}&\kappa > 0, \quad \beta + q'p\lambda_2 < -1, \\ &\lambda_1 - 4\lambda_1(\lambda_1 - 1) - 2\lambda_1 n + \mu T_1 \ge 0,\end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}&\gamma\mu > C_0 A^{p-1}, \\ &(\mu+\gamma)\lambda_2 - 4\gamma\lambda_2(\lambda_2 - 1) - 2\gamma\lambda_2 n \ge 0,\end{aligned} \qquad (13)$$

$$\lambda_2 - 4\lambda_2(\lambda_2 - 1) - 2\lambda_2 n + \mu T_0 \ge 0, \qquad (14)$$

где $\lambda_2 = -\kappa/(p-1)$. *Тогда если функция* $u_0(x)$ *принадлежит классу* $C(R^n)$ *и удовлетворяет* *неравенствам*

$$0 \le u_0(x) \le A\,(T_0 + |x|^2)^{\lambda}, \qquad (15)$$

где $\lambda = \lambda_0$, *если выполнены условия* (4) - (7), $\lambda = \lambda_1$, *если выполнены условия* (8) - (11), *и* $\lambda = \lambda_2$, *если выполнены условия* (12) - (14), *то в* R_+^{n+1} *существует глобальное гладкое решение задачи Коши* (1'), (2), *и это решение при* $x \in R^n$, $t \ge 0$ *будет удовлетворять неравенствам*

$$0 \le u_0(x) \le A\,(T_0 + t + |x|^2)^{\lambda}$$

с тем же λ, *что и в условии* (15).

В условиях теоремы 2 функция $v = A(T_0 + t + |x|^2)^{\lambda}$, где λ принимает одно из трех значений $\lambda = \lambda_0$, $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$ в зависимости от выполнения соответствующих условий, является верхним решением для задачи Коши.

Теоремы 1 и 2 справедливы и для первой начально-краевой задачи в цилиндре $Q = D \times (0, \infty)$, где D – ограниченная область из пространства R^n; при этом в случае задания на боковой границе цилиндра неоднородных граничных значений $\psi(x, t)$ необходимо иметь неотрицательность $\psi(x, t)$ и мажорирование $\psi(x, t)$ сверху с помощью функции $v(x, t)$ (при $x \in \partial D$).

Приведем один результат о несуществовании глобальных решений задачи Коши.

Теорема 3. *Пусть для положительных чисел* C_0 *и* T_0 *при* $0 \le t < T_0$ *выполнены условия*

$$K_t(x, t, \tau) + \gamma K(x, t, \tau) \ge 0,$$

$$K(x, t, t) \ge C_0(T_0 - t + |x|^2)^{\kappa};$$

кроме того, пусть для положительного числа A, *чисел* C_0, T_0, γ, κ *и* μ *выполняется*

$$\kappa > -2, \quad \mu < 0, \quad \gamma \ge 0,$$

$$\lambda_0(\lambda_0 - 1)(1 + 2n + 4\gamma T_0) < C_0 A^{p-1},$$

$$\mu + \gamma + 4\gamma(\lambda_0 - 1) + 2\gamma n \le 0,$$

$$\mu T_0 - \lambda_0(1 + 2n) \le 0.$$

Тогда если начальная функция $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$u_0(x) \ge A(T_0 + |x|^2)^{\lambda_0},$$

то гладкое решение задачи (1'), (2) *существует в течение времени, не превышающего* T_0.

В условиях теоремы функция $v_1(x, t) = A(T_0 - t + |x|^2)^{\lambda_0}$ будет нижним решением для задачи Коши, что вытекает из того, что $v_1(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$v_{1tt} - \gamma\Delta v_1 - \Delta v_{1t} + (\mu + \gamma) v_{1t} + \gamma\mu v_1 <$$
$$< C_0(T_0 - t + |x|^2)^{\kappa} v_1^p.$$

Тогда в силу принципа сравнения имеем

$$u(x, t) \ge v_1(x, t),$$

что и означает требуемое.

Подбор других верхних и нижних решений задачи Коши может дать другие свойства решений задачи (1'), (2). Так, при $\gamma > 0$ и выполнении условия $K(x, t, t,) < C_0$ в качестве верхнего решения можно взять неотрицательную функцию $v = v(x)$, удовлетворяющую неравенству $-\Delta v + \mu v > \delta_0 v^p$, $\delta_0 > 0$, и убывающую при $|x| \to \infty$. Подобное верхнее решение дает разрешимость задачи Коши в полосе $\Pi_T = \{(x, t): x \in R^n, 0 < t < T\}$ и глобальную ограниченность решения. Если взять функцию $v_1(x, t) = A\exp(kt)\exp(-\lambda|x|^2)$, где $A > 0$, $k > 0$, $\lambda > 0$, то нетрудно будет указать условия на A, k, λ, μ и функцию $K(x, t, \tau)$, при которых эта функция будет нижним решением задачи Коши. Тогда решение задачи (1'), (2) будет экспоненциально убывать при $|x| \to \infty$ и экспоненциально расти при $t \to \infty$.

Обозначим через $S_\lambda(\Pi_T)$ класс функций $u(x, t)$, имеющих в Π_T все непрерывные производные, входящие в уравнение (1), и удовлетворяющих условию

$$|u(x, t)| \le M(1 + |x|^2)^{\lambda}, \quad M \ge 0 \text{ при } x \in R^n, 0 \le t \le T.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

$$K(x, t, t) \le C_0(1 + |x|^2)^{\kappa},$$

$$K_t(x, t, \tau) + \gamma K(x, t, \tau) \le 0.$$

Тогда решение задачи Коши единственно в классе $S_\lambda(\Pi_T)$, *если* $\kappa + \lambda(p - 1) \le 0$.

Доказательство теоремы 4 основано также на использовании принципа сравнения.

Замечание 1. Теоремы 1 - 3 легко переносятся на случай $f \not\equiv 0$, $\mu \not\equiv \mathrm{const}$. Соответствующие условия легко выписываются.

Замечание 2. Теоремы, аналогичные теоремам 1 - 4, нетрудно доказать для следующих уравнений со “скрытой эволюционностью”:

$$\mu u - \Delta u = \int_0^t K(x, t, \tau) u^p(x, \tau)\, d\tau + f(x, t). \qquad (16)$$

Как и в случае уравнений (1), исследование уравнений (16) будет связано с исследованием неравенств с производными третьего порядка (по t – первого).

З а м е ч а н и е 3. К уравнениям вида (1) и (16) сводятся псевдогиперболические и псевдопараболические уравнения с немонотонным локальным источником

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + au_t + bu = q(x, t)u^p + f(x, t),$$

$$u_t - \Delta u - \Delta u_t + bu = q(x, t)u^p + f(x, t).$$

З а м е ч а н и е 4. Если выполняется $0 < p < 1$, то для уравнения (1) имеет место неединственность гладких решений задачи Коши и начально-краевых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yamada Y.* // J. Math. Anal. and Appl. 1982. V. 88. № 2. P. 433 - 451.
2. *Engler H.* // Lect. Notes Math. 1983. V. 1017. P. 161 - 167.
3. *Heard M.L., Rankin S.M.* III. // J. Different. Equat. 1988. V. 71. № 2. P. 201 - 233.
4. *Jong-Sheng Guo, Hsuan-Wen Su.* // Different. and Integral Equat. 1992. V. 5. № 6. P. 1237 - 1245.
5. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.