



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

P. P. Kargaev, Nonclassical weighted norm estimates for some Calderón–Zygmund operators on the plane, *Zap. Nauchn. Šem. POMI*, 1994, Volume 217, 74–82

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

February 15, 2025, 04:21:40



П. П. Каргаев

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ
КАЛЬДЕРОНА—ЗИГМУНДА НА ПЛОСКОСТИ

0. Пусть μ -борелевская мера с компактным носителем F в \mathbb{C} , удовлетворяющая условию Карлесона. В данной работе изучается поведение операторов Кальдерона—Зигмунда A_K с ядрами $K(\zeta, z) = (\zeta - z)^{-2}$, $K(\zeta, z) = (|\zeta - z|(\zeta - z))^{-1}$:

$$A_K(f)(z) = \int_F K(\zeta, z)f(\zeta) d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{C} \setminus F.$$

Нас интересует, при каких условиях на неубывающую положительную функцию ψ , удовлетворяющую соотношению $\int_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt < +\infty$, оператор A_K действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$, где m -мера Лебега; $\Phi(z) = \rho(z)\psi(\rho(z))$, $z \in \mathbb{C} \setminus F$, ρ -расстояние до носителя F .

В случае, когда F -стандартное канторовское множество размерности 1, μ -мера Хаусдорфа размерности 1 на F , $K(\zeta, z) = (\zeta - z)^{-2}$, $\psi \equiv 1$ вопрос о том, действует ли A_K из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$ поставил Е. М. Дынькин в обзоре [2]. Оказывается (см. теорему 3), в этом случае $A_K(L^2(\mu)) \subset L^2(\Phi m)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t} dt < +\infty. \quad (0)$$

Это же условие на функцию ψ определяет ситуацию $A_K(L^2(\mu)) \subset L^2(\Phi m)$ и в том случае, когда μ удовлетворяет условию (5), $K(\zeta, z) = (|\zeta - z|(\zeta - z))^{-1}$ (см. теорему 4). В силу теоремы 1 неравенство (0) влечет соотношение $A_K(L^2(\mu)) \subset L^2(\Phi m)$ и для ядра $K(\zeta, z) = |\zeta - z|^{-2}$. Это означает, что эффект интерференции в описанных случаях полностью отсутствует.

1. Пусть μ -борелевская мера в \mathbb{C} с компактным носителем $F = \text{supp } \mu$. Предположим, что μ удовлетворяет условию Карлесона:

$$\mu(B(z, r)) \leq c_1 r, \quad z \in \mathbb{C}, \quad r > 0.$$

(Здесь и далее $B(z, r) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\}$). Мы будем рассматривать интегральные операторы

$$A_K(f)(z) = \int_F K(\zeta, z) f(\zeta) d\mu(\zeta), \quad f \in L^2(\mu), \quad z \in CF$$

($CF = \mathbb{C} \setminus F$) с ядрами $K : F \times CF \rightarrow \mathbb{C}$, которые удовлетворяют следующему условию:

$$|K(\zeta, z)| \leq c_2 |\zeta - z|^{-2}, \quad \zeta \in F, \quad z \in CF. \quad (1)$$

Пусть далее ψ -неубывающая положительная функция, заданная на $(0, +\infty)$ и такая, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt < +\infty.$$

Обозначим через $\rho(z)$ расстояние от точки $z \in \mathbb{C}$ до множества F и положим $\Phi(z) = \psi(\rho(z))\rho(z)$, $z \in CF$.

Мы будем изучать условия на функцию ψ , при которых оператор A_K действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$ (здесь m -мера Лебега). В силу теоремы о замкнутом графике, если A_K действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$, то он ограничен, то есть $A_K \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi m))$. Положим теперь

$$B_{K,\psi}(f)(z) = \Phi^{1/2}(z) A_K(f)(z), \quad z \in CF, \quad f \in L^2(\mu).$$

Мы укажем условия на множество F , при выполнении которых оператор $B_{K,\psi}$ слабого типа (2,2). Заметим, что $B_{K,\psi} \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(m))$ в том и только в том случае, когда $A_K \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi m))$ и при этом $\|B_{K,\psi}\| = \|A_K\|$.

2. Теорема 1. Пусть

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t} dt < +\infty. \quad (2)$$

Тогда $A_K \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi m))$.

Доказательство. Пусть $f \in L^2(\mu)$, $g = A_K(f)$. Тогда из условия (1) и из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|g(z)|^2 \leq c_2^2 \int_F \frac{|f(\zeta)|^2 \psi(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|^2} d\mu(\zeta) \int_F \frac{d\mu(\zeta)}{\psi(|\zeta - z|) |\zeta - z|^2}, \quad z \in CF.$$

Далее из карлесоновости меры μ и из возрастания ψ следует

$$\int_F \frac{d\mu(\zeta)}{\psi(|\zeta - z|)|\zeta - z|^2} \leq \frac{1}{\psi(\rho(z))} \int_F \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{2c_1}{\psi(\rho(z))\rho(z)},$$

$$|g(z)|^2 \Phi(z) \leq 2c_1 c_2^2 \int_F \frac{|f(\zeta)|^2 \psi(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|^2} d\mu(\zeta) \quad z \in CF. \quad (3)$$

Пусть $A > 0$, $G_A = \bigcup_{z \in F} B(z, A)$. Тогда

$$\int_{G_A} |g(z)|^2 \Phi(z) dm(z) \leq$$

$$\leq 2c_1 c_2^2 \int_F |f(\zeta)|^2 d\mu(\zeta) \int_{G_A} \frac{\psi(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|^2} dm(z) \leq$$

$$\leq 2c_1 c_2^2 \|f\|_{L^2(\mu)}^2 \int_0^a \frac{\psi(t)}{t} dt.$$

Здесь в качестве a можно взять, например, $A + \text{diam } F$.

Пусть теперь $A = 2 \text{diam } F$. Фиксируем некоторую точку $\zeta_0 \in F$. Тогда для $\zeta \in F$, $z \notin G_A$ имеет место неравенство $|\zeta - z| \geq |z - \zeta_0| - \text{diam } F \geq \frac{1}{2} |z - \zeta_0|$. Отсюда

$$|g(z)| \leq c_2 \int_F \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\mu(\zeta) \leq \frac{4c_2}{|z - \zeta_0|^2} \|f\|_{L^2(\mu)} (\mu(F))^{1/2};$$

$$|g(z)|^2 \Phi(z) \leq 16c_2^2 \|f\|_{L^2(\mu)}^2 (\mu(F)) \psi(|z - \zeta_0|) |z - \zeta_0|^{-3}, \quad z \notin G_A.$$

Наконец, получаем

$$\int_{\mathbb{C} \setminus G_A} |g(z)|^2 \Phi(z) dm(z) \leq 16c_2^2 \|f\|_{L^2(\mu)}^2 (\mu(F)) \int_A^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt. \quad (4)$$

2. Будем говорить, что F удовлетворяет условию Коточигова, если

$$\sup_{\zeta \in B(z, r)} \rho(\zeta) \geq c_3 r, \quad z \in \mathbb{C}, \quad r > 0,$$

где $c_3 > 0$ — некоторая константа.

Теорема 2. Пусть F удовлетворяет условию Коточигова. Тогда $B_{K,\psi}$ -оператор слабого типа $(2,2)$, если F снабжено мерой μ , а CF — мерой Лебега m .

Доказательство. Согласно теореме Шегрена (см. [1]), если выполнено условие Коточигова, то существует константа $c_F > 0$, зависящая только от множества F и такая, что для любой борелевской меры ν , у которой $\text{supp } \nu \subset F$

$$m \left(\left\{ z \in \mathbb{C} : \int_F \frac{d\nu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} > a \right\} \right) \leq c_F \nu(F)/a, \quad a > 0.$$

Из неравенства (3) и из возрастания функции ψ получим для $f \in L^2(\mu)$, $g = B_{K,\psi}(f)$:

$$|g(z)|^2 \leq 2c_1 c_2^2 \int_F \frac{|f(\zeta)|^2 d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \psi(\rho(z) + \text{diam } F), \quad z \in CF.$$

Если теперь $A = 2\text{diam } F$ и $\rho(z) < A$, то $\psi(\rho(z) + \text{diam } F) < \psi\left(\frac{3A}{2}\right)$ и, применив теорему Шегрена к мере $|f|^2 \mu$, получим

$$m(\{z \in \mathbb{C} : \rho(z) < A, |g(z)| > a\}) \leq 2c_1 c_2^2 \|f\|_{L^2(\mu)}^2 \psi\left(\frac{3A}{2}\right) / a^2, \\ a > 0.$$

С другой стороны, мы получили при доказательстве теоремы 1 неравенство (4), из которого очевидно следует, что

$$m(\{z \in \mathbb{C} : \rho(z) \geq A, |g(z)| > a\}) \leq 16c_2^2 \|f\|_{L^2(\mu)}^2 \mu(F) \int_A^\infty \frac{\psi(t)}{t^2} dt / a^2, \\ a > 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Пусть мера μ удовлетворяет следующему условию: существуют положительные константы $c_4 > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$\mu(B(z, r)) \geq c_4 r, \quad z \in F, \quad 0 < r < \delta. \quad (5)$$

Тогда F удовлетворяет условию Коточигова.

Доказательство. Пусть Q -квадрат со стороной $r < 2\delta$. Разобьем Q на n^2 одинаковых квадратов. Предположим, что в каждом из

них имеется точка множества F , расстояние которой от его границы больше или равно $\frac{r}{3n}$. Тогда, применяя неравенство (5) и используя условие Карлесона, имеем

$$c_4 n^2 \left(\frac{r}{3n} \right) \leq c_1 \frac{r}{\sqrt{2}}; \quad n \leq \frac{3c_1}{\sqrt{2}c_4}.$$

3. Положим

$$\begin{aligned} K_1(\zeta, z) &= (\zeta - z)^{-2}; & \zeta \in F, \quad z \in CF; \\ \psi_1(t) &= 1, \quad t > 0; & \Phi_1(z) = \rho(z), \quad z \in CF. \end{aligned}$$

Возьмем в качестве μ конечную сумму длин кривых, каждая из которых есть образ при некотором движении плоскости какой-то функции (своей для каждой кривой) $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, удовлетворяющей условию Липшица ($|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$; $x_1, x_2 \in [a, b]$). Тогда хорошо известно (см., например, [2]), что $A_{K_1} \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi_1 m))$. Может показаться, что ограниченность оператора A_{K_1} в этом случае связана только с карлесоновостью меры Хаусдорфа размерности 1 на F . Однако, это не так.

Рассмотрим канторовское множество $X \subset \mathbb{C}$ размерности 1. Оно строится так. Положим $E_0 = [0, 1]$, $E_1 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ и т.д. Множество E_n состоит из 2^n отрезков длины 4^{-n} каждый. Пусть $E = \bigcap_{n \geq 0} E_n$, $X = E \times E$. Мера Хаусдорфа размерности 1 на X совпадает с прямым произведением двух канторовских мер на E (о канторовских мерах см., например, [3]). Обозначим ее через ν . Тогда $\text{supp } \nu = X$, мера ν удовлетворяет условию Карлесона и условию (5). Значит, к мере ν применима теорема 2 и при любой функции ψ , удовлетворяющей условиям пункта 1, оператор $B_{K, \psi}$ оператор слабого типа (2,2). В частности, можно взять $\psi = \psi_1$.

В обзоре [2] Е. М. Дынькин предположил, что $A_{K_1} \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(\Phi_1 m))$ (или, что то же самое, $B_{K_1, \psi_1} \in \mathcal{L}(L^2(\mu), L^2(m))$). Однако, эта гипотеза не подтвердилась. Более того, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $\mu = \nu$. Тогда оператор A_K действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$ в том и только в том случае, когда ψ удовлетворяет условию (2). При этом, если условие (2) не выполняется, то

$$A_{K_1}(1) \notin L^2(\Phi m).$$

Доказательство. В силу теоремы 1 нам достаточно доказать, что из расходимости интеграла в левой части неравенства (2) следу-

ет, что $g = A_{K_1}(1) \notin L^2(\Phi m)$. Пусть $P = I_1 \times I_2 \subset [0, 1] \times [0, 1]$ -прямоугольник, являющийся декартовым произведением двух дополнительных интервалов к множеству E . Сначала мы покажем, что существуют абсолютные константы $a > 0, b > 0$ такие, что

$$\int_P |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta) dm(\zeta) \geq a\Phi(bl), \quad l = \min\{|I_1|, |I_2|\}.$$

Действительно, пусть (x_0, y_0) -правая верхняя вершина $P, G = [x_0, 1] \times [y_0, 1], G_1 = \mathbb{C} \setminus G$. В силу карлесоновости ν имеем

$$\int_{G_1 \cap F} \frac{d\nu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{4c_1}{l}, \quad z \in (x_0 - \frac{l}{2}, x_0) \times (y_0 - \frac{l}{2}, y_0).$$

Положим $S_m = (x_0 - 2l \cdot 4^{-m}, x_0 - \frac{3l}{2} \cdot 4^{-m}) \times (y_0 - 2l \cdot 4^{-m}, y_0 - \frac{3l}{2} \cdot 4^{-m}), Q_m = [x_0, x_0 + \frac{l}{2} \cdot 4^{-m}] \times [y_0, y_0 + \frac{l}{2} \cdot 4^{-m}], m \geq 1$. Ясно, что для $z \in P, \zeta \in G$ выполняется неравенство $\operatorname{Re}((e^{-\frac{\pi i}{4}}(\zeta - z))^{-2}) \geq 0$; для $z \in S_m, \zeta \in Q_m$ имеет место неравенство $\operatorname{Re}((e^{-\frac{\pi i}{4}}(\zeta - z))^{-2}) \geq 2c_0 4^{2m} \cdot l^{-2}$, где $c_0 > 0$ -абсолютная постоянная. Отсюда имеем в силу равенства $\nu(Q_m) = \frac{1}{2} 4^{-m}$:

$$\left| \int_{G \cap F} \frac{d\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \geq \operatorname{Re} \left(\int_{G \cap F} \frac{d\nu(\zeta)}{(e^{-\pi i/4}(\zeta - z))^2} \right) \geq \frac{c_0 4^m}{l}, \quad z \in S_m.$$

Выберем теперь $m = \lceil \log_4^+ \left(\frac{5c_1}{c_0} \right) + 1 \rceil$. Тогда при $z \in S_m$

$$\left| \int_F \frac{d\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \geq \left| \int_{F \cap G} \frac{d\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| - \int_{F \cap G_1} \frac{d\nu(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \geq \frac{5c_1}{c_0} \cdot \frac{c_0}{l} - \frac{4c_1}{l} = c_1 l^{-1}.$$

Отсюда, наконец

$$\int_P |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta) dm(\zeta) \geq \int_{S_m} |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta) dm(\zeta) \geq \frac{c_1^2}{4} 4^{-2m} \Phi \left(\frac{3l\sqrt{2}}{2} \cdot 4^{-m} \right).$$

Таким образом, можно положить $a = \frac{c_1^2}{4} \cdot 4^{-2m}, b = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 4^{-m}$.

Всего прямоугольников P , у которых наименьшая сторона равна $2 \cdot 4^{-(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ имеется по крайней мере 4^n . Значит,

$$\begin{aligned} \int_{CF} |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta) dm(\zeta) &\geq \frac{1}{2} ab \sum_{n \geq 0} \psi \left(\frac{b}{2} 4^{-n} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} ab \sum_{n \geq 0} 4^n \psi \left(\frac{b}{2} 4^{-n} \right) \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) \geq \frac{1}{2} ab \int_0^1 \frac{\psi(\frac{bt}{2})}{t} dt = +\infty. \end{aligned}$$

4. В этом пункте мы разберем случай ядра

$$K_2(\zeta, z) = (|\zeta - z|(\zeta - z))^{-1}, \quad \zeta \in F, \quad z \in CF.$$

Теорема 4. Пусть мера μ удовлетворяет условию (5). Тогда оператор A_{K_2} действует из $L^2(\mu)$ в $L^2(\Phi m)$ в том и только в том случае, когда функция ψ удовлетворяет условию (2). При этом, если условие (2) не выполнено, то $A_{K_2}(1) \notin L^2(\Phi m)$.

Доказательство. Опять в силу теоремы 1 нам достаточно показать, что из расходимости интеграла в левой части неравенства (2) следует, что $g = A_{K_2}(1) \notin L^2(\Phi m)$. Отметим, что из условия (5) имеем при $\rho(z) < \delta$

$$U(z) = \int_F \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^3} \geq \int_{B(\zeta_0, \rho(z)/2)} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|^3} \geq \frac{c_4}{2\rho^2(z)}, \quad (6)$$

где $\zeta_0 \in F$ такова, что $\rho(z) = |\zeta_0 - z|$. Используя формулу Грина в комплексной форме и равенство

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z|z|} \right) = -\frac{1}{2|z|^3}, \quad z \neq 0$$

имеем $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2}U$,

$$i \oint_{|z-\zeta|=r} g(\zeta) d\zeta = -2 \int_{B(z,r)} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) dm(\zeta) = \int_{B(z,r)} U(\zeta) dm(\zeta), \quad (7)$$

$$0 < r < \rho(z).$$

Рассмотрим некоторое разбиение по Уитни множества CF (см. [4]) с помощью совокупности квадратов \mathcal{F} . Тогда

$$\sqrt{2}l_Q \leq \rho(z) \leq 5\sqrt{2}l_Q, \quad z \in Q, \quad Q \in \mathcal{F},$$

где l_Q — длина сторон квадрата Q . Фиксируем какой-нибудь квадрат $P \in \mathcal{F}$ и положим $l = l_P$, z_0 — центр квадрата P . Тогда из неравенства Коши–Буняковского и из монотонности ψ получаем

$$\int_P |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta) dm(\zeta) \geq \Phi(\sqrt{2}l) \left(\frac{1}{l} \int_{B(z_0, l/2)} |g(\zeta)| dm(\zeta) \right)^2.$$

Учитывая (6) и (7) имеем для $l < \delta/5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_{B(z_0, l/2)} |g(\zeta)| dm(\zeta) &\geq \frac{1}{l} \int_0^{l/2} dr \left(i \int_{|\zeta-z_0|=r} g(\zeta) d\zeta \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{B(z_0, l/4)} U(\zeta) dm(\zeta) \geq \frac{c_4}{8} \int_{B(z_0, l/4)} \frac{dm(\zeta)}{\rho^2(\zeta)} \geq \frac{\pi c_4}{2^8 \cdot 5^2} = d_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, используя карлесоновость меры μ получим

$$\begin{aligned} \Phi(\sqrt{2}l) &= \frac{2\psi(\sqrt{2}l)}{\sqrt{2}l} \cdot l^2 \geq 2 \int_P \frac{\psi(\frac{1}{5}\rho(z))}{\rho(z)} dm(z) \geq \\ &\geq \frac{1}{c_1} \int_P \psi(\frac{1}{5}\rho(z)) dm(z) \int_F \frac{dm(\zeta)}{|\zeta-z|^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя неравенства (8), (9) имеем

$$\begin{aligned} \int_{CF} |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta) dm(\zeta) &\geq d_1 \sum_{P \in \mathcal{F}, l_P < \frac{\delta}{5\sqrt{2}}} \Phi(\sqrt{2}l_P) \geq \\ &\geq \frac{d_1}{c_1} \int_F d\mu(\zeta) \int_G \frac{\psi(\frac{1}{5}\rho(z))}{|\zeta-z|^2} dm(z), \end{aligned} \quad (10)$$

где $G = \bigcup_{z \in F} B(z, \frac{\delta}{5})$. Из замечания к теореме 2 следует, что F удовлетворяет условию Коточигова, так что существует положительная константа $c_5 > 0$ такая, что для любого квадрата Q найдется квадрат $\tilde{Q} \subset Q$, для которого $l_{\tilde{Q}} \geq c_5 l_Q$; $\rho(z) \geq l_{\tilde{Q}}$, $z \in \tilde{Q}$. Пусть теперь $\zeta \in \mathcal{F}$. Рассмотрим разбиение по Уитни множества $\mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ с помощью совокупности квадратов \mathcal{P} . Имеем

$$\begin{aligned} \int_{B(\zeta, \delta/5)} \frac{\psi(\frac{1}{5}\rho(z))}{|\zeta-z|^2} dm(z) &\geq \sum_{P \in \mathcal{P}, l_P < \frac{\delta}{25\sqrt{2}}} \int_{\tilde{P}} \frac{\psi(\frac{1}{5}\rho(z))}{|\zeta-z|^2} dm(z) \geq \\ &\geq \frac{c_5^2}{50} \sum_{P \in \mathcal{P}, l_P < \frac{\delta}{25\sqrt{2}}} \psi\left(\frac{c_5 l_P}{5}\right) \geq \frac{c_5^2}{25} \sum_{P \in \mathcal{P}, l_P < \frac{\delta}{25\sqrt{2}}} \int_{\tilde{P}} \frac{\psi\left(\frac{c_5 |\zeta-z|}{25\sqrt{2}}\right)}{|\zeta-z|^2} dm(z) \geq \\ &\geq \frac{c_5^2}{25} \int_{B(\zeta, \frac{\delta}{25})} \frac{\psi\left(\frac{c_5 |\zeta-z|}{25\sqrt{2}}\right)}{|\zeta-z|^2} dm(z) = \frac{c_5^2}{25} \int_0^{\frac{\delta c_5}{54\sqrt{2}}} \frac{\psi(t)}{t} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Наконец, из неравенств (10) и (11) получаем

$$\int_{CF} |g(\zeta)|^2 \Phi(\zeta) dm(\zeta) \geq \frac{d_1 \mu(F) c_5^2}{25c_1} \int_0^{\frac{6c_5}{5^4 \sqrt{2}}} \frac{\psi(t)}{t} dt = +\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Sjögren, *Weak L_1 characterization of Poisson integrals, Green potentials, and H^p spaces*. — Trans. A. M. S. **233** (1977), 179–196.
2. Е. М. Дынькин, *Методы теории сингулярных интегралов (теория Литтлвуда–Пэли и ее приложения)*. — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **42** (1989), 105–198.
3. В. Гелбаум, Дж. Олмстед, *Контрпримеры в анализе*. М., Мир, 1967.
4. Е. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*. М., Мир, 1973.

Kargaev P. Nonclassical weighted norm estimates for some Calderon–Zygmund operators on the plane.

Let μ be a Borel measure with a compact support $F \subset \mathbb{C}$, ρ be the distance from the set F ;

$$A_K(f)(z) = \int_F K(\zeta, z) f(\zeta) dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{C} \setminus F,$$

where $K(\zeta, z) = (\zeta - z)^{-2}$ or $K(\zeta, z) = (|\zeta - z|(\zeta - z))^{-1}$ and m is the Lebesgue measure. Let $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a nondecreasing positive function, $\Phi(z) = \psi(\rho(z))\rho(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus F$.

We prove that under some additional assumptions on μ the operator A_K is bounded from $L^2(\mu)$ to $L^2(\Phi m)$ if and only if

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt < +\infty.$$

This means that the interference effect is not observed in such situations.