Л. Локуциевский, В. Тихомиров, Выпуклый анализ на плоскости, *Квант*, 2018, номер 5, 2–8

Выпуклый анализ на плоскости

Л.ЛОКУЦИЕВСКИЙ, В.ТИХОМИРОВ

Выпуклый анализ – раздел математики, в котором изучают выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи. Этот раздел сформировался лишь чуть более полувека назад, хотя понятием выпуклой кривой пользовался Архимед, а основные теоремы выпуклого анализа на плоскости могли быть доказаны Евклидом (в чем мы убедимся). Ныне теория выпуклости имеет большие приложения в естествознании, экономике и самой математике.

Наше знакомство с выпуклым анализом будет проходить на евклидовой плоскости. Опираться мы будем на знания из курса геометрии седьмого-восьмого классов. Саму плоскость обозначим $\mathbb{E}^2$ в честь Евклида. Точки плоскости будем, как обычно, обозначать большими латинскими буквами, а подмножества плоскости – каллиграфическими большими латинскими буквами.

Еще древний философ Аристотель высказал мысль, что нельзя что-либо доказать «из ничего». Нужны некоторые утверждения, которые принимаются без доказательства. Евклид (ок. 300 г. до н.э.) предпринял попытку дедуктивного построения геометрии, когда теория строится шаг за шагом, исходя из нескольких утверждений, принимаемых без доказательства. В своей книге «Начала» [1] он выдвинул пять таких основополагающих утверждений, которые назвал *постулатами*. Нам понадобятся три первых, которые мы к тому же потом чуть уточним. Вот эти постулаты Евклида, описывающие свойства точек, прямых и окружностей.

1. *От всякой точки до всякой точки можно провести отрезок прямой*.

2. *Ограниченную прямую (отрезок) можно непрерывно продолжать по прямой.*

3. *Из всякого центра всяким радиусом циркулем может быть описана окружность.* [1]

На плоскости важнейшими линиями являются прямые и окружности, именно они упомянуты в евклидовых постулатах. Мы видим, что Евклид упоминает циркуль. Помимо циркуля он пользовался линейкой. Мы тоже будем (в своем воображении) пользоваться циркулем и линейкой (для построения окружностей и прямых), но, в отличие от Евклида, мы будем пользоваться еще один инструментом – измерителем расстояния. Так что будем считать, что на плоскости можно измерить расстояние между точками, и если A и B – точки плоскости, то расстояние между ними условимся обозначать $|AB|$. Расстояние обладает такими вроде бы естественными, но настолько важными свойствами, что нарушение хотя бы одного из них лишает его права называться «расстоянием» (и приводит к очень неожиданным результатам). Итак, если точки A и B совпадают, то расстояние между ними равно нулю, и наоборот, если $|AB| = 0$, то A и B совпадают; расстояние от A до B равно расстоянию от B до A ($|AB| = |BA|$); наконец, выполнено неравенство треугольника $|AB| \le |AC| + |CB|$ для любых точек плоскости A, B и C. Следует еще упомянуть свойство неотрицательности расстояния $|AB| \ge 0$, хотя оно и следует из предыдущих свойств (докажите!).

[1] Интересно, что сам Евклид не вводит и не использует термин «отрезок прямой», а всюду употребляет слово «прямая», смысл которого зависит от контекста. Мы пользуемся привычными читателю терминами, тем самым допуская некоторую вольность цитирования первоисточника.

Мы будем опираться на свойства точек и прямых, которые уточняют постулаты Евклида.

1) *Через две различные точки A и B плоскости* $\mathbb{E}^2$ *проходит единственная прямая; причем если* $|AB| = |AC| + |CB|$, *то точка C лежит на этой прямой*. В этом случае будем также говорить, что

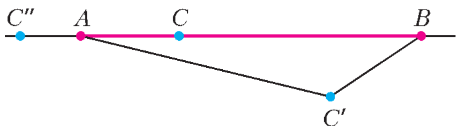

Рис. 1. Точка C лежит на отрезке $[AB]$, $|AB| = |AC| + |CB|$, *а точки C′ и C″ не лежат, так как* $|AB| < |AC'| + |C'B|$ *и* $|AB| < |AC''| + |C''B|$

точка *C лежит между A и B*. Множество точек, лежащих между A и B, вместе с самими точками A и B будем называть *отрезком* с граничными точками A и B. Такой отрезок будем обозначать $[AB]$ (рис.1).

Понятие отрезка позволяет дать основное для нас определение – выпуклого множества. Множество $\mathscr{C}$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками A и B из $\mathscr{C}$ весь отрезок $[AB]$ принадлежит $\mathscr{C}$.

Мы определили геометрическую фигуру – отрезок. Определим еще две геометрические фигуры. Окружностью с центром в точке O радиуса $r > 0$ называется совокупность всех точек, удаленных от O на расстояние r. Круг $\mathcal{B}(O,r)$ состоит из всех точек, удаленных от O не более чем на r (обозначение $\mathcal{B}$ от Ball – шар). Согласно определению, отрезок выпукл. Круг тоже выпукл (докажите!), а вот окружность нет: если соединить любые две различные точки на окружности отрезком, то все точки этого отрезка, кроме концов, окружности не принадлежат.

Здесь разумно разобраться в том, что такое граница множества (в том числе выпуклого). Не граничные, *внутренние* точки множества обладают тем свойством, что любую такую точку можно сделать центром круга, пусть очень маленького, но который целиком лежит в множестве. А *граничная* точка, наоборот, этим свойством не обладает: любой круг с центром в граничной точке имеет и общие точки со множеством, и точки, не принадлежащие множеству. *Граница* выпуклого множества (т.е. множество его граничных точек) – это нечто вроде сплошного забора, отделяющего множество от остальной части плоскости. Далее мы рассматриваем только выпуклые множества, в которые включена их граница. Такие множества называют *замкнутыми* выпуклыми множествами на плоскости $\mathbb{E}^2$.

Разберем простой пример. Внутренними точками круга $\mathcal{B}(O,r)$ являются все его точки, не лежащие на соответствующей окружности. Действительно, если расстояние от точки A до O меньше r, $|OA| < r$, то A является внутренней точкой круга $\mathcal{B}(O,r)$ по неравенству треугольника. Доказательство того, что окружность является границей круга, не так очевидно, как кажется на первый взгляд. Попробуем доказать, что точки окружности не являются внутренними точками круга. Выберем точку A на окружности, $|OA| = r$, и возьмем любой маленький круг с центром в A. Как доказать, что в нем найдутся точки не из $\mathcal{B}(O,r)$? Например, так: проведем луч OA. Казалось бы, он должен «протыкать» окружность в точке A, т.е. для любого числа $x > r$ на луче OA должны найтись нужные нам точки на расстоянии x от O.

Это соображение наводит нас на второе свойство точек и прямых на плоскости, которое нам понадобится в доказательствах. Оно уточняет второй и третий постулаты Евклида.

2) *Точка O на прямой делит точки этой прямой на две выпуклые совокупности, называемые лучами с вершиной в O. При этом (а) если A и B принадлежат разным лучам, то O лежит в отрезке [AB] и (б) каждый из лучей неотличим от совокупности неотрицательных вещественных чисел, если каждой точке луча поставить в соответствие расстояние от нее до вершины луча O (рис.2).*

Рис. 2. Точки A и B лежат на разных лучах относительно точки O

Поясним сказанное и изображенное на рисунке. Мы видим два луча. Точка O выполняет роль «пропускного пункта» на прямой: если обе точки принадлежат одному из лучей, то можно «проехать из пункта A в пункт B» и «вас никто не остановит» (это и означает, что лучи выпуклы). А если точки принадлежат разным лучам, то придется проехать через пункт O (и «предъявить документ»).

Вопрос о «неотличимости» много сложнее. Греческая научная мысль во времена Пифагора столкнулась с серьезным испытанием: было доказано, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, а это противоречило принятой в то время пифагорейцами формуле «всё есть число». На нашем арифметико-алгебраическом языке это означает, что $\sqrt{2}$ не является дробью $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа, а это выходит за рамки понятия «число», как его воспринимали древние греки. И они не стали развивать понятие числа. В частности, у Евклида в его «Началах» нет понятия числа, хотя фактически число $\sqrt{2}$ у самого Евклида представлено (при доказательстве несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной) как бесконечная непрерывная дробь.

Непрерывная дробь (или цепная дробь) – это конечное или бесконечное математическое выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

где a_0 есть целое число, а все остальные a_n – натуральные числа.

Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. А если бы Евклид захотел записать длину диагонали квадрата со стороной единица, то получил бы число $[1; 2, 2, 2, 2, \ldots]$ (равное $\sqrt{2}$).

Попробуем вычислить длину какого-нибудь отрезка $[OA]$. Проведем прямую OA (по первому свойству точек и прямых). Точка O по второму свойству делит эту прямую на два луча. Нас, конечно, будет интересовать тот луч, который содержит точку A. Выберем нашу обычную, действующую с XIX века единицу длины в 1 метр, 1 м (равный примерно $1/40000000$ длины экватора Земли), и будем откладывать отрезок длиной в 1 м (по второму свойству) от точки O по этому лучу. Если точка A совпадет, скажем, с k-й точкой, отмеченной на луче, то тогда расстояние $|OA|$ от O до A будет k метров. Как поступать в том случае, если расстояние не исчисляется целым (или дробным) числом метров, разберемся на том же примере диагонали квадрата со стороной, равной одному метру. Отложим это расстояние с помощью циркуля от точки O по какому-нибудь лучу. Обнаружится, что точка, удаленная от O на длину диагонали, находится между 1 м и 2 м. Переходя к десятым долям метра, получим, что искомая точка лежит между 1,4 м и 1,5 м.

Дальше обнаружится, что выполнены неравенства $1{,}41\ \text{м} < \sqrt{2}\ \text{м} < 1{,}42\ \text{м}$. Мы вычислили наше число с точностью до одной сотой. А вот вычисление нашего числа с точностью до одной миллиардной: $1{,}414213562\ \text{м} < \sqrt{2}\ \text{м} < 1{,}414213563\ \text{м}$. Этот процесс никогда не кончится. Корень из двух будет представлен бесконечной десятичной дробью. (Недавно корень из двух был вычислен с точностью до 10 триллионов(!) десятичных знаков после запятой; это характеризует возможности современных компьютеров.)

Множество вещественных чисел обозначается в настоящее время символом $\mathbb{R}$ и является множеством всех бесконечных десятичных дробей (в том числе с периодом, состоящим из одних нулей, но исключая период из одних девяток).[2] Проведенный нами процесс вычисления длины диагонали квадрата и означает, что мы поставили в соответствие этой длине бесконечную десятичную дробь. Таким образом, свойство 2(б) нужно понимать именно в смысле этого вычисления (проделанного для каждой точки на луче). Именно поэто-

[2] Есть масса других эквивалентных способов представить множество вещественных чисел.

му $\mathbb{R}$ называют еще *вещественной прямой*.

Нам осталось обсудить еще одно свойство евклидовой плоскости, которого у Евклида не было, но им он многократно пользуется в своей книге. Как мы уже сказали, точка на прямой делит последнюю на две выпуклые совокупности, называемые лучами. Точно так же мы постулируем следующее.

3) *Прямая на плоскости, обозначим ее l, делит точки плоскости на две выпуклые совокупности, называемые полуплоскостями с границей l, и при этом, если A и B принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок $[AB]$ пересекается с l (рис.3).* Каждая из полуплоскостей определяется

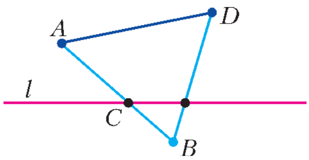

Рис. 3. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l, а точки A и D – в одной

любой своей точкой, которая не лежит на l (на рисунке 3 – точкой A (или D) и точкой B).

В конце XIX века немецкий математик Мориц Паш, изучая аксиоматику Евклида, обнаружил, что Евклид многократно пользуется одним утверждением, но никак его не доказывает. Вот это утверждение.

Утверждение. Если прямая на плоскости $\mathbb{E}^2$ пересекает одну сторону треугольника во внутренней точке и при этом не проходит через противоположную стороне вершину, то она пересекает еще одну сторону треугольника во внутренней точке (рис.4).

В 1882 Пашу удалось показать, что это утверждение никоим образом не может

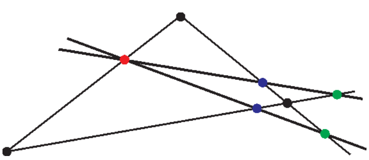

Рис. 4. Иллюстрация аксиомы Паша

быть выведено из постулатов Евклида. С тех пор это утверждение называют *аксиомой Паша*. Без аксиомы Паша невозможно определить понятие полуплоскости, так как невозможно доказать, что если точки A и B лежат с одной стороны от l и точки B и C лежат с одной стороны от l, то точки A и C тоже лежат с одной стороны от l. Позднее, уже в XX веке, В.Шмелева (Wanda Szmielew) и Л.Штерба (Leslaw Szczerba) дали полный ответ на вопрос о том, как будет устроена геометрия на плоскости, если отказаться от аксиомы Паша [4].

Аксиома Паша напрямую связана с выпуклостью. Поэтому в этой статье мы будем пользоваться тремя сформулированными постулатами, и аксиома Паша легко вытекает из третьего постулата.

А теперь, когда мы уточнили постулаты Евклида, сформулированные в третьем веке до нашей эры, перенесемся в девятнадцатый и двадцатый века эры «нашей» и докажем все основополагающие теоремы выпуклой геометрии. Основы теории выпуклости (не только на плоскости или в трехмерном пространстве, но и в пространстве большего числа измерений) заложил выдающийся математик конца XIX – начала XX веков Герман Минковский (1864–1909).

Теория выпуклости базируется на теоремах отделимости. Для того чтобы сформулировать эти теоремы, необходимо определить само понятие отделимости.

Говорят, что прямая *l отделяет множество $\mathscr{C}_1$ от множества $\mathscr{C}_2$*, если $\mathscr{C}_1$ лежит в одной полуплоскости с границей l, а $\mathscr{C}_2$ – в другой. Скажем, что прямая *l строго отделяет множество $\mathscr{C}$ от точки A*, если она отделяет $\mathscr{C}$ от A, причем A не принадлежит разделяющей прямой l, и множество $\mathscr{C}$ с ней не пересекается.

Теорема 1 (теорема отделимости). *Непустое замкнутое выпуклое подмножество евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$ можно строго отделить от точки, ему не принадлежащей.*

При доказательстве этой теоремы мы будем пользоваться таким свойством замкнутых множеств: *если $\mathscr{D}$ – замкнутое* *множество и точка A не принадлежит $\mathscr{D}$, тогда в $\mathscr{D}$ существует (хотя бы одна) ближайшая к ней точка B.* Для выпуклых замкнутых множеств верен и более сильный факт (который, впрочем, нам не потребуется): если множество $\mathscr{C}$ не только замкнуто, но еще и выпукло, то ближайшая к A точка в $\mathscr{C}$ единственна.

С такого рода результатами о существовании различных геометрических точек и фигур математики постоянно сталкиваются. Многие из них основываются на теореме Вейерштрасса о существовании минимума и максимума у непрерывной функции на компакте. Она относится к разделу математики, возникшему в XX веке. До середины девятнадцатого века существование точек, подобных точке B, считалось очевидным и не доказывалось.

Доказательство теоремы отделимости (теоремы 1). Итак, существует точка B – ближайшая к A точка из $\mathscr{C}$. Проведем прямую l, проходящую через любую внутреннюю точку C отрезка $[AB]$, перпендикулярно этому отрезку (рис.5). Докажем,

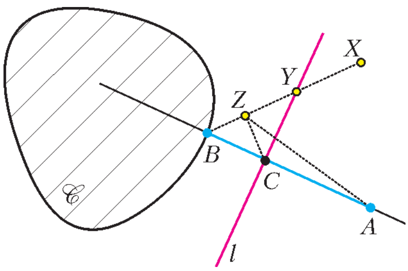

Рис. 5. Иллюстрация к доказательству теоремы отделимости

что прямая l строго отделяет точку A от множества $\mathscr{C}$.

Доказательство будем проводить, как принято говорить, «от противного». По построению, точки A и B принадлежат разным полуплоскостям относительно l и $B \in \mathscr{C}$. Предположим, что утверждение нашей теоремы неверно и существует (гипотетическая) точка $X \in \mathscr{C}$ из той же полуплоскости, что A, и покажем, как прийти к противоречию. Если такая гипотетическая точка X в множестве $\mathscr{C}$ есть, то по третьему свойству плоскости о выпуклости полуплоскостей на отрезке $[BX]$ найдется точка Y, принадлежащая l. Ввиду того что точки B и X принадлежат $\mathscr{C}$, точка Y принадлежит этому множеству по определению выпуклости.

Точка Y не может совпадать с точкой C – если бы точка Y совпала с C, то она была бы к A ближе, чем B, что противоречит свойству точки B. Поэтому точки B, C и Y образуют прямоугольный треугольник BCY и $[BY]$ – его гипотенуза. Пусть $[CZ]$ – высота ΔBCY, опущенная из C на гипотенузу. Очевидно, $Z \in \mathscr{C}$.

Итак, если гипотетическая точка $X \in \mathscr{C}$ существует, то существуют и определенные выше точки Y и Z. Здесь мы и приходим к противоречию: в силу того что высота, проведенная из прямого угла, меньше катета, получаем $|ZC| < |BC|$. Откуда из неравенства треугольника получаем $|AZ| < |AC| + |CZ| < |AC| + |BC| = |AB|$, т.е. точка Z ближе к A, чем точка B. Но $Z \in \mathscr{C}$. Противоречие доказывает теорему.

Одно из важнейших свойств выпуклых объектов – это возможность их *двойственного описания*. Само понятие двойственности в математике связано обычно с некоторым преобразованием множеств (или функций) в другой «двойственный» объект. Двойственным объектом для выпуклого множества является *поляра* этого множества. Введем на плоскости декартову систему координат. Тогда полярой множества $\mathscr{C}$ называется новое множество точек

$$\mathscr{C}^\circ = \{(p;q) \mid px + qy \le 1 \text{ при всех } (x;y) \in \mathscr{C}\}.$$

Отметим, что для любой пары чисел $(p;q) \ne (0;0)$ множество всех таких точек $(x;y)$ на плоскости, удовлетворяющих неравенству $px + qy \le 1$, образует полуплоскость относительно прямой $px + qy = 1$, содержащую начало координат. Таким образом, поляра множества описывает все такие полуплоскости, которые содержат $\mathscr{C}$.

Лемма. Поляра $\mathscr{D}^\circ$ любого (не обязательно выпуклого или замкнутого) множества $\mathscr{D}$ является выпуклым замкнутым множеством, содержащим начало координат.

Доказательство. Зафиксируем точку $(x;y)$ и рассмотрим замкнутую полуплоскость $P_{x,y}$, состоящую из таких точек $(p;q)$, что $px+qy \le 1$. Тогда поляра $\mathscr{D}^\circ$ является пересечением полуплоскостей $P_{x,y}$ по всем $(x;y) \in \mathscr{D}$. Поскольку каждая такая полуплоскость выпукла, замкнута и содержит начало координат, то и поляра является выпуклой, замкнутой и содержит начало координат.

Идея выпуклой двойственности для выпуклых множеств проявляется в том, что, зная поляру множества, можно восстановить само множество. Для этого нужно всего лишь построить поляру поляры! Итак, вот точная формулировка.

Теорема 2 (теорема о биполяре). *Пусть $\mathscr{C}$ – некоторое множество, содержащее начало координат. Тогда множество $\mathscr{C}$ выпукло и замкнуто в том и только том случае, когда $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{\circ\circ}$.*

Чтобы почувствовать утверждение теоремы о биполяре, рассмотрим один простой, но очень важный пример. Пусть $\mathscr{C}$ – квадрат, $\mathscr{C} = \{|x| \le 1, |y| \le 1\}$ (рис.6). Найдем его поляру. Если $px+qy \le 1$ для всех $(x;y) \in \mathscr{C}$, то, взяв в качестве $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$, получим, что $|p|+|q| \le 1$. Обратно, если $|p|+|q| \le 1$, то для всех $(x;y) \in \mathscr{C}$ выполнено $px+qy \le |p|+|q| \le 1$. Поэтому поляра – это тоже квадрат, но со сторонами, не параллельными осям: $\mathscr{C}^\circ = \{|p|+|q| \le 1\}$. Теперь вычислим биполяру. Если $xp+yq \le 1$ для всех $(p;q) \in \mathscr{C}^\circ$, то, подставив вершины $(\pm 1; 0)$ и $(0; \pm 1)$ в качестве пар $(p;q)$, получим $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. Обратно, если $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$, то $xp+yq \le |p|+|q| \le 1$, и мы видим, что $\mathscr{C}^{\circ\circ} = \mathscr{C}$.

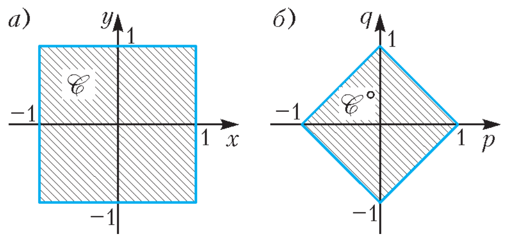

Рис. 6. Пример множества $\mathscr{C}$ и его поляры $\mathscr{C}^\circ$

Теорема о биполяре является следствием теоремы Минковского о двойственном описании выпуклых множеств. Прямое описание множества – это описание (тем или иным способом) всех точек, ему принадлежащих. Любое же замкнутое выпуклое множество можно описать *двойственно*, задав все полуплоскости, его содержащие.

Теорема 3 (теорема Минковского о двойственном описании выпуклых замкнутых множеств). *Выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{E}^2$ является пересечением всех полуплоскостей, его содержащих.*

Таким образом, выпуклые замкнутые множества можно определять двумя путями – через отрезки и через полуплоскости. Отметим, что если множество не выпукло, то оно содержится в пересечении всех полуплоскостей, его содержащих, но не будет с ним совпадать. Поэтому точно описать невыпуклое множество с помощью полуплоскостей не получится.

Доказательство теоремы Минковского (теоремы 3). Пусть $\mathscr{C}$ – выпуклое замкнутое множество, а $\widetilde{\mathscr{C}}$ – пересечение всех полуплоскостей, содержащих $\mathscr{C}$. По определению, $\mathscr{C} \subset \widetilde{\mathscr{C}}$. Далее проведем рассуждение от противного. Предположим, что утверждение теоремы неверно и найдется точка A, принадлежащая $\widetilde{\mathscr{C}}$ и не принадлежащая $\mathscr{C}$. Тогда, строго отделив по теореме 1 точку A от $\mathscr{C}$, приходим к противоречию.

Задача 1. Какие множества на плоскости можно представить как пересечение (замкнутых) полуплоскостей?

Теорема Минковского имеет огромное множество применений, в том числе и в школьной геометрии. Например, читателю может быть небезынтересна статья [5] в «Кванте», в которой исследуются множества середин отрезков с концами в двух заданных выпуклых многоугольниках.

Теория выпуклых множеств фактически родилась в XIX веке, но именно в XX веке, не побоимся так сказать, геометрия выпуклых множеств расцвела. Появилось множество работ, ей посвященных, образовался широкий круг математиков, интересовавшихся выпуклой геометрией. В 1934 году в Германии вышла книга [2] двух геометров Томми Боннесена (1873–1935) и Морица Вернера Фенхеля

(1905–1988), подводящая некоторый итог бурно развивающейся теории. У нас в тридцатые годы стали популярны школьные кружки. Появилась популярная литература для школьников. Назовем имена замечательных ученых – Лазаря Ароновича Люстерника (1899–1981) и Льва Генриховича Шнирельмана (1905–1938), посвятивших выпуклой геометрии и статьи и популярные брошюры, а также хотим назвать студента мехмата Давида Шклярского, совершившего переворот в кружковой деятельности. Он построил свой кружок не на докладах, а на решениях задач, очень многие из которых были из выпуклой геометрии.

Стимулом для Минковского создавать теорию выпуклых множеств была, как это ни покажется странным, теория чисел. Читатель может прочесть статью [6] в «Кванте», в которой утверждение о том, что простое число представимо в виде суммы двух квадратов, лишь если при делении на четыре оно дает в остатке единицу (одна из первых замечательных теорем теории чисел), доказывается по Минковскому с помощью свойств выпуклости.

Доказательство теоремы о биполяре в своей основе содержит идею, заложенную в теореме Минковского.

Доказательство теоремы о биполяре (теоремы 2). Согласно теореме Минковского, выпуклое замкнутое множество $\mathscr{C}$ совпадает с пересечением полуплоскостей, его содержащих. Поэтому если $\mathscr{C}$ содержит начало координат, а полуплоскость содержит $\mathscr{C}$, то полуплоскость тоже должна содержать начало координат. Все полуплоскости, содержащие начало координат, делятся на два важных типа.

1. Полуплоскости, не содержащие начало на граничной прямой. В этом случае граничная прямая может быть задана равенством $px + qy = 1$ (при подходящем выборе p и q), а сама полуплоскость задается неравенством $px + qy \le 1$.

2. Полуплоскости, содержащие начало на граничной прямой. В этом случае граничная прямая может быть задана равенством $px + qy = 0$ (при подходящем выборе p и q), а сама полуплоскость задается неравенством $px + qy \le 0$.

Таким образом, поляра $\mathscr{C}^\circ$ есть в точности множество всех полуплоскостей первого типа, содержащих $\mathscr{C}$. По определению, биполяра есть множество

$$\mathscr{C}^{\circ\circ} = \left\{ (x;y) : px + qy \le 1 \quad \text{для всех } (p;q) \in \mathscr{C}^\circ \right\}.$$

Тем самым, биполяра $\mathscr{C}^{\circ\circ}$ содержит такие точки $(x;y)$, которые лежат в каждой полуплоскости первого типа из $\mathscr{C}$. Каждая такая полуплоскость содержит $\mathscr{C}$. Поэтому $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}^{\circ\circ}$.

Однако, формально, равенство $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{\circ\circ}$ еще не доказано, так как по теореме Минковского множество $\mathscr{C}$ совпадает с пересечением всех полуплоскостей, его содержащих, а биполяра $\mathscr{C}^{\circ\circ}$ есть пересечение только полуплоскостей первого типа. Тем не менее, не использовав полуплоскости второго типа, мы не приобрели ни одной новой точки. Действительно, если точка $(x;y)$ не лежит в $\mathscr{C}$, то ее можно *строго* отделить от $\mathscr{C}$, причем разделяющая прямая не может содержать начало координат, так как оно лежит в $\mathscr{C}$. Таким образом, $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{\circ\circ}$.

Обратное утверждение – если $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{\circ\circ}$, то множеств $\mathscr{C}$ является выпуклым и замкнутым – доказывается очень просто. Действительно, биполяра есть поляра множества $\mathscr{D} = \mathscr{C}^\circ$, а значит, выпукла и замкнута.

Литература

1. Начала Евклида. Книги I–VI. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948 («Классики естествознания»).

2. *T.Bonnesen, W.Fenchel*. Theorie der Konvexen Körper. – Teubner, Leipzig, 1934.

3. *Г.Г.Магарил-Ильяев, В.М.Тихомиров*. Выпуклый анализ и его приложения. – М.: Либроком, 2016.

4. *L.W.Szczerba and W.Szmielew.* On the Euclidean geometry without the Pasch axiom. – Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 659–666.

5. *Н.Васильев*. Сложение фигур. – «Квант», 1976, №4.

6. *В.Тихомиров.* Теорема Ферма–Эйлера о двух квадратах. – «Квант», 1991, №10.

(Окончание следует)