Н. Н. Осипов, Аксиомы рациональности фон Неймана–Моргенштерна и неравенства в анализе,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2023, том 529, 197–217

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 529, 2023 г.

Н. Н. Осипов

АКСИОМЫ РАЦИОНАЛЬНОСТИ ФОН НЕЙМАНА–МОРГЕНШТЕРНА И НЕРАВЕНСТВА В АНАЛИЗЕ

§1. Введение

Рассмотрим агента, у которого есть возможность участвовать в следующей игре. Он выбирает произвольную часть своего бюджета, после чего он либо ее теряет, либо она удваивается — в зависимости от результата броска честной монеты. Эти действия повторяются столько раз, сколько пожелает агент. Хотя случайные процессы с мартингальным свойством впервые появляются в исследованиях Леви [11], сам термин «мартингал» применительно к случайному процессу впервые использовал Вилль в работе [14] при описании того, как будет меняться бюджет агента во время описанной выше игры (вместо честной монеты рассматривалось произвольное распределение Бернулли, но мы пока ограничимся случаем равных вероятностей успеха и неудачи). При этом целью, которую ставил перед собой Вилль, было в терминах отсутствия заведомо выигрышной стратегии в обсуждаемой игре улучшить базовое определение случайности (нерегулярности) у двоичной последовательности успехов и неудач, предложенное ранее фон Мизесом [15]. Таким образом понятие мартингала, отсутствие выигрышной стратегии в описанной игре с монетой и базовые понятия случайной последовательности и частотной вероятности оказываются теснейшим образом связаны друг с другом.

Попытки придумать стратегию с положительным математическим ожиданием прибыли для игр, подобных описанной выше, часто сравнивают с попытками изобрести вечный двигатель — существование такой стратегии противоречит базовым принципам теории вероятностей.

Ключевые слова: мартингал, функция Беллмана, теория ожидаемой полезности, неравенство Джона–Ниренберга, классы Геринга.

Тем не менее, если агент по каким-то причинам все же желает или должен участвовать в такой игре[1], он может разумно выбрать стратегию, отличную от полного отказа от участия. Дело в том, что подробно обсуждаемая в разделе 4 теория ожидаемой полезности фон Неймана–Моргенштерна [19] вообще говоря не запрещает агенту, оставаясь в базовом смысле рациональным, различать между собой стратегии с нулевым математическим ожиданием прибыли и выбирать вместо стратегии бездействия определенные действия. Такой агент, вместо того чтобы максимизировать математическое ожидание своего финального благосостояния, может максимизировать математическое ожидание некоторой выпуклой функции от возможных значений этого благосостояния. Как мы в дальнейшем увидим, выпуклость такой функции будет означать готовность агента к риску. При этом он может (и, как мы далее увидим, должен, чтобы остаться рациональным), во-первых, ограничить степень своей готовности рисковать, а во-вторых, ограничить свой выбор только теми стратегиями, для которых одновременно выполняются следующие четыре хороших свойства:

(i) возможная общая прибыль стратегии не ограничена;
(ii) возможные потери стратегии ограничены;
(iii) в случае получения прибыли ее дальнейшие потери контролируются;
(iv) математическое ожидание прибыли во всяком случае не отрицательно.

Эти свойства можно рассматривать как некоторую замену положительности математического ожидания прибыли. Легко предъявить тривиальную стратегию, которая удовлетворяет свойствам (i)–(iv), формализованным любым разумным образом. Действительно, агент может на каждом шаге делать ставку фиксированного объема и прекращать игру при первом проигрыше. Однако такая стратегия не является оптимальной.

Возвращаясь теперь к обсуждению функции от благосостояния (функции полезности), математическое ожидание которой агент должен максимизировать для достижения оптимальности, заметим, что существует два наиболее естественных семейства, из которых такие функции

[1] В терминах неё можно, например, описать торговлю на эффективном рынке, на котором цена актива содержит всю текущую информацию, касающуюся этого актива, и ведет себя как мартингал.

обычно выбираются — все те функции полезности, у которых *абсолютная* мера отношения к риску постоянна, и те, у которых *относительная* мера отношения к риску постоянна. Первое из этих двух семейств имеет экспоненциальный вид, а второе — степенной. В разделе 5 мы подробнее обсудим эти семейства и их экономический смысл. Если говорить кратко и неформально, то при выборе стратегии агент с экспоненциальной функцией полезности мыслит в терминах абсолютных изменений своего благосостояния, а агент со степенной функцией — в терминах его относительных изменений.

Оказывается, что если мы будем рассматривать функции полезности с постоянной *абсолютной* мерой отношения к риску, а требование (iii) будем формализовывать, накладывая в любой момент игры ограничение на дальнейшую *абсолютную* дисперсию благосостояния, то мы придем к задаче оптимизации, которая возникла и была решена в [13] в контексте абстрактной задачи о поиске точной константы в интегральном неравенстве Джона–Ниренберга. Если же рассматривать функции полезности с постоянной *относительной* мерой отношения к риску, а требование (iii) формализовывать, накладывая в любой момент игры ограничение на дальнейшую *относительную* дисперсию благосостояния, то мы придем к диадическому варианту задачи оптимизации, которая была решена в [4, 17, 18] также в рамках полностью абстрактного вопроса о точных константах для вложений классов Геринга друг в друга.

Используя решения указанных абстрактных задач, мы можем показать, что для того, чтобы при выборе наилучшей стратегии не нарушались базовые аксиомы рациональности, должно выполняться как упомянутое ограничение на условные дисперсии благосостояния (формализованное требование (iii)), так и ограничение на ту склонность агента к риску, которая определяется его функцией полезности. Причем, чем меньше мы ограничиваем первое, тем больше должны ограничить второе. При этом значения максимально допустимых границ можно явно вычислить. Таким образом есть конечный и явно вычислимый «зазор» между полным бездействием, которое вполне рационально, и полностью *не*рациональным экономическим поведением. В заключительной теореме 4 описываются упомянутые границы рациональности и оптимальные стратегии в контексте абсолютных изменений благосостояния агента: результаты [13] переформулируются в свете теории ожидаемой полезности [2, 5–7, 10, 12, 19].

§2. Формализация игры с монетой

Пусть $\{\mathcal{F}_n\}$ — диадическая фильтрация на интервале $[0,1)$:

$$\mathcal{F}_n = \sigma\Big\{\big[\tfrac{k}{2^n},\tfrac{k+1}{2^n}\big)\ \Big|\ 0 \le k < 2^n\Big\},\quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Эта фильтрация вместе с мерой Лебега на единичном интервале формализует эксперимент, заключающийся в подбрасывании честной монеты неограниченное число раз. Элементарными исходами в нем являются точки $\xi \in [0,1)$, которые в двоичной системе счисления можно интерпретировать как все возможные бесконечные последовательности результатов бросков монеты. Каждая алгебра $\mathcal{F}_n$ состоит в точности из тех событий, про которые можно сказать произошли они или нет к моменту n, а мера Лебега определяет априорную вероятность этих событий.

Рассмотрим теперь агента, исходный бюджет или благосостояние (wealth) которого в денежных единицах составляет величину $w_0 \in \mathbb{R}$. Стратегия агента должна определять количество единиц его бюджета, которые он будет задействовать в игре при каждом броске в каждой возможной ситуации. Это означает, что стратегия — это последовательность $\{v_n\}$ неотрицательных функций на $[0,1)$, каждая из которых измерима относительно соответствующей алгебры $\mathcal{F}_n$. В результате использования такой стратегии благосостояние агента будет меняться в соответствии со случайным процессом $w = \{w_n\}$, определяемым по формуле

$$w_{n+1} = w_n + v_n\, r_{n+1},$$

где $r_n(\xi) = \operatorname{sign}\sin 2^n\pi\xi$ — функции Радемахера. Отметим, что пока случайные величины w_n могут принимать в том числе отрицательные значения — долг агента может быть сколь угодно большим. Позже мы это явно запретим и обсудим последствия такого запрета.

Процесс w является диадическим мартингалом: введя для случайных величин $\varphi \in L^1([0,1))$ обозначение

$$\mathbb{E}_n\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\varphi \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right],$$

мы получим, что $w_n = \mathbb{E}_n w_m$ при $n \le m$. С другой стороны, если не ограничивать долг агента, то для любого начинающегося в w_0 диадического мартингала w можно выбрать стратегию, в результате которой благосостояние агента будет меняться в соответствии с этим мартингалом: такой стратегией будет адаптированная к фильтрации $\{\mathcal{F}_n\}$

последовательность функций $\{v_n\} = \{|\Delta_{n+1} w|\}$, где

$$\Delta_0 w \stackrel{\text{def}}{=} w_0 \qquad \text{и} \qquad \Delta_n w \stackrel{\text{def}}{=} w_n - w_{n-1}, \quad n > 0.$$

Этот факт позволяет нам в качестве пространства поиска вместо множества стратегий рассматривать множество всех диадических мартингалов, начинающихся в w_0 и трактуемых как последовательность благосостояний агента в процессе игры. Далее мы увидим, что если ввести естественное ограничение на долг агента, то наше пространство поиска сузится до тех мартингалов, которые восстанавливаются по своим предельным случайным величинам (мартингалы Леви).

§3. Ограничение на долг

Мы сформулируем утверждение, которое в точности означает, что если мы в рамках свойства (ii) запретим агенту неограниченно брать в долг, то, во-первых, будет существовать предельная случайная величина, определяющая его финальный бюджет, во-вторых, математическое ожидание прибыли агента никогда не будет положительным, и в третьих, оно при этом будет равным нулю (требование (iv)) тогда и только тогда, когда w будет представлять собой последовательность условных математических ожиданий финального бюджета.

Лемма 1. *Пусть случайные величины, составляющие диадический мартингал $w = \{w_n\}$, равномерно ограничены снизу. Тогда существует ограниченная снизу случайная величина $w_\infty \in L^1([0,1))$, к которой величины w_n сходятся почти наверное. При этом выполняется оценка $\mathbb{E}w_\infty \leq w_0$, в которой равенство достигается тогда и только тогда, когда w является сходящимся в L^1 мартингалом Леви, т. е. когда*

$$w_n = \mathbb{E}_n w_\infty \quad \textit{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{1}$$

Доказательство. Мы покажем, что это простое утверждение сразу вытекает из первой теоремы Дуба о поточечной сходимости супермартингалов, леммы Фату, леммы Шеффе и того факта, что все сходящиеся в L^1 мартингалы являются мартингалами Леви (все перечисленные результаты можно найти в руководстве [16]). Действительно, пусть величина $m \in \mathbb{R}$ ограничивает снизу все w_n. Теорема Дуба о поточечной сходимости влечет существование предела $w_\infty \in L^1([0,1))$. Применяя лемму Фату к неотрицательным величинам $w_n - m$, получаем требуемое неравенство. Лемма Шеффе, также примененная к $w_n - m$, влечет, что если переход к пределу сохраняет математическое ожидание, то мы имеем дело со сходимостью в L^1, которая для мартингалов всегда означает (1). Предложение доказано. $\square$

С помощью (1) отождествляя допустимые последовательности w благосостояний и финальные благосостояния w_∞, а также запрещая агенту оставаться в результате игры с невыплаченным долгом (опять же, в рамках свойства (ii)), мы рассматриваем в дальнейшем в качестве пространства поиска следующее множество случайных величин, задающих допустимые финальные благосостояния:

$$\mathcal{W}(w_0) \overset{\text{def}}{=} \bigl\{ w \in L^1([0,1)) \bigm| \mathbb{E}w = w_0,\, w \geq 0 \bigr\}.$$

Для того, чтобы обосновать необходимость леммы 1, отметим, что если бы у агента была возможность неограниченно брать в долг, он мог бы выбрать заранее любой уровень $M > w_0$, $M \in \mathbb{R}$, и достигнуть его с вероятностью 1 за конечное время, используя в качестве стратегии остановленное случайное блуждание, т. е. выбирая в качестве v_n одно и то же значение и прекращая игру, как только $w_n \geq M$. Доказательство этого факта о простом симметричном случайном блуждании содержится в стандартных руководствах (см., например, [16]). При этом *математическое ожидание* времени, которое требуется на реализацию такой стратегии, равно бесконечности.

§4. Максимизируемый функционал

Теперь опишем функционал над предельными благосостояниями из множества $\mathcal{W}(w_0)$, значение которого мы хотим максимизировать. Любая положительная случайная величина $w \in L^0\bigl([0,1), \mathbb{R}_{\geq 0}\bigr)$ порождает распределение на $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (на множестве благосостояний) — борелевскую вероятностную меру $p_w(B) \overset{\text{def}}{=} \lambda(w^{-1}(B))$. Здесь λ — мера Лебега, а B пробегает борелевские подмножества множества $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Чтобы сравнивать такие распределения между собой и выбирать среди них наилучшее, нам потребуется теория ожидаемой полезности фон Неймана–Моргенштерна и ее обобщения.

Первоначальный вариант теории, позволяющий сравнивать между собой дискретные распределения с конечным носителем, был изложен в [19]. Мы приведем соответствующие результаты в том виде, в котором они изложены в [10].

Определение 1. Бинарное отношение $\succ$ на множестве P называется отношением предпочтения, если оно асимметрично и отрицательно транзитивно (т. е. его отрицание транзитивно), и слабым отношением предпочтения, если оно полно и транзитивно.

Мы будем писать $p \succeq q$, если $q \not\succ p$. Если $\succ$ — отношение предпочтения, то $\succeq$ — слабое отношение предпочтения. Верно и обратное — отрицание слабого отношения предпочтения будет отношением предпочтения. Если P — выпуклое множество в линейном пространстве, то на бинарное отношение $\succ$ на нем также можно накладывать следующие два требования.

Аксиома 1 (независимость)**.** Для любых $p, q, r \in P$ и любого $\alpha \in (0, 1]$ из $p \succ q$ следует, что $\alpha p + (1 - \alpha) r \succ \alpha q + (1 - \alpha) r$.

Аксиома 2 (свойство Архимеда)**.** Для любых $p, q, r \in P$ из $p \succ q \succ r$ следует существование таких $\alpha, \beta \in (0, 1)$, что $\alpha p + (1 - \alpha) r \succ q \succ \beta p + (1 - \beta) r$.

Пусть R — произвольное множество, и $\mathcal{P}_0(R)$ — множество всех вероятностных мер на R с конечным носителем. В [10] есть пояснения, касающиеся того, почему если мы трактуем R как множество возможных состояний, в которых может оказаться агент, то рациональный способ сравнивать распределения из $\mathcal{P}_0(R)$ должен определяться каким-либо отношением предпочтения, подчиняющимся аксиомам 1 и 2. При этом оказывается, что каждый такой рациональный способ сравнения распределений допускает простое описание.

Теорема 1 (фон Нейман–Моргенштерн)**.** *Бинарное отношение* $\succ$ *на* $\mathcal{P}_0(R)$ *является отношением предпочтения и подчиняется аксиомам* 1 *и* 2 *тогда и только тогда, когда существует такая функция* $\boldsymbol{u}\colon R \to \mathbb{R}$, *что*

$$p \succ q \quad \Leftrightarrow \quad \int \boldsymbol{u}\, dp > \int \boldsymbol{u}\, dq. \tag{2}$$

При этом для каждого такого отношения, описывающая его функция $\boldsymbol{u}$ *единственна с точностью до положительного аффинного преобразования.*

Изучение вопроса о том, как обобщить теорему 1 на распределения, носитель которых не обязан быть конечным, имеет длительную историю (см., например, [2, 5, 10]). Мы приведем ответ на этот вопрос в том виде, в котором он представлен в [10] или в [7]. Прежде всего нам понадобится требование, которое можно накладывать на бинарное отношение $\succ$ на топологическом пространстве P, и которое заменит аксиому 2.

Аксиома 3 (непрерывность)**.** Для любого $p \in P$ множества $\{q \in P \mid p \succ q\}$ и $\{q \in P \mid q \succ p\}$ — открытые подмножества в P.

Пусть теперь R — сепарабельное метрическое пространство, $C_b(R)$ — множество непрерывных ограниченных функций на R, а $\mathcal{P}(R)$ — множество всех вероятностных борелевских мер на R со слабой топологией, порожденной интегрированием по этим мерам функций из $C_b(R)$. Такая топология метризуема (метрика Прохорова) и полностью определяется через сходимость последовательностей: последовательность мер p_n слабо сходится к p, если

$$\int u\,dp_n \to \int u\,dp \tag{3}$$

для любой $u \in C_b(R)$. Для бинарных отношений на $\mathcal{P}(R)$ аксиома 3 является усилением аксиомы 2. При этом верна следующая теорема.

Теорема 2. *Бинарное отношение* $\succ$ *на* $\mathcal{P}(R)$ *является отношением предпочтения и подчиняется аксиомам* 1 *и* 3 *тогда и только тогда, когда существует такая функция* $\boldsymbol{u} \in C_b(R)$*, что выполняется* (2)*. При этом функция* $\boldsymbol{u}$ *единственна с точностью до положительного аффинного преобразования.*

Теперь заметим, что если отказаться от ограниченности функции $\boldsymbol{u}$ (например, от ограниченности сверху), то легко предъявить меру $p \in \mathcal{P}(R)$, для которой $\int_R \boldsymbol{u}\,dp = \infty$. Но тогда отношение, порождаемое функцией $\boldsymbol{u}$, не позволяет различать между собой никакие невырожденные выпуклые комбинации, в которых участвует p, и для такого отношения нарушаются аксиомы 1 и 2. При этом на практике в большинстве случаев используются именно неограниченные функции $\boldsymbol{u}$ (так будет и у нас) и для того, чтобы не возникало вышеописанных проблем, должен соблюдаться компромисс между тем, какие функции $\boldsymbol{u}$ считать допустимыми функциями полезности, и тем, какие меры считать подлежащими сравнению. Изучение данного вопроса также имеет длительную историю (см., например, [6, 7, 10]). Мы приведем результат из [7], который непосредственно обобщает теорему 2 и лучше всего соответствует нашей задаче (его альтернативное доказательство также содержится в [3]). Пусть $g\colon R \to [1, +\infty)$ — непрерывная функция.

Тогда определим

$$C_g(R) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u \in C(R) \;\middle|\; \sup_{x\in R} \tfrac{|u(x)|}{g(x)} < \infty\right\};$$

$$\mathcal{P}_g(R) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{p \in \mathcal{P}(R) \;\middle|\; \int g\,dp < \infty\right\}.$$

В [7] показано, что такая пара пространств порождает метризуемую топологию: меры p_n слабо сходятся к мере p в пространстве $\mathcal{P}_g(R)$, если (3) выполняется для любой функции $u \in C_g(R)$. При этом верна теорема, которая естественным образом обобщает теорему 2.

Теорема 3. *Бинарное отношение $\succ$ на $\mathcal{P}_g(R)$ является отношением предпочтения и подчиняется аксиомам* 1 *и* 3 *тогда и только тогда, когда существует такая функция $\boldsymbol{u} \in C_g(R)$, что выполняется* (2). *При этом функция $\boldsymbol{u}$ единственна с точностью до положительного аффинного преобразования.*

Вернемся к нашей задаче, в которой множество $R = \mathbb{R}_{\geq 0}$ представляет из себя множество выраженных в деньгах благосостояний и мы сравниваем между собой распределения p_w благосостояний для $w \in \mathcal{W}(w_0)$.

Определение 2. *Функцией полезности* будем называть непрерывную и строго возрастающую функцию на $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (большее благосостояние должно соответствовать большей полезности).

Мы будем фиксировать ограниченную *снизу* функцию полезности $\boldsymbol{u}$ и максимизировать функционал

$$U(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int \boldsymbol{u}\,dp_w = \mathbb{E}\,[\boldsymbol{u} \circ w], \tag{4}$$

дополнительно накладывая на рассматриваемые $w \in \mathcal{W}(w_0)$ ограничения, связанные с требованием (iii). При соблюдении баланса между выбором функции $\boldsymbol{u}$ и этими ограничениями окажется, что максимум функционала U меньше ∞, т. е. для всех функций $w \in \mathcal{W}(w_0)$, которые им удовлетворяют, верно, что $p_w \in \mathcal{P}_g(\mathbb{R}_{\geq 0})$, где $g = \boldsymbol{u} + \text{const}$. Таким образом, та случайная величина w, которая удовлетворяет всем требуемым ограничениям и в которой функционал U достигает максимума на множестве всех таких величин, будет обладать наилучшим среди них распределением в смысле некоторого рационального отношения предпочтения, заданного на объемлющем пространстве $\mathcal{P}_g(\mathbb{R}_{\geq 0})$ и удовлетворяющего аксиомам 1 и 3 (а значит и аксиоме 2).

§5. Выбор функций полезности

Обсудим теперь некоторые свойства функций полезности $\boldsymbol{u}$ и соответствующих им функционалов U. Для $w \in L^1\big([0,1), \mathbb{R}_{\geq 0}\big)$ мы имеем

$$U(w) = \mathbb{E}\,[\boldsymbol{u} \circ w] \qquad \text{и} \qquad U(\mathbb{E}w) = \boldsymbol{u}(\mathbb{E}w).$$

Тогда из неравенства Йенсена вытекает, что если функция $\boldsymbol{u}$ строго выпукла, то агент, предпочтения которого ей определяются, для непостоянных величин w всегда будет считать, что $p_w \succ p_{\mathbb{E}w}$, а если строго вогнута — что $p_{\mathbb{E}w} \succ p_w$. В первом случае мы говорим, что агент ищет риск, а во втором — что он его избегает. Таким образом, агент с исходным благосостоянием w_0, предпочтения которого определяются строго вогнутой функцией полезности, из всех случайных величин в $\mathcal{W}(w_0)$ предпочтет постоянную величину w_0, которая соответствует бездействию агента. Для линейной функции полезности случайные величины в $\mathcal{W}(w_0)$ становятся неразличимы. Один из способов исключить описанные ситуации — рассматривать строго выпуклые функции полезности, т. е. считать приемлемым некоторый риск.

Пусть теперь функция полезности $\boldsymbol{u}$ является дважды дифференцируемой. Несмотря на указанную выше связь отношения агента к риску с вогнутостью или выпуклостью функции полезности, функция $\boldsymbol{u}''$ сама по себе не подходит для того, чтобы численно это отношение измерять. Например, при умножении функции $\boldsymbol{u}$ на положительную константу, соответствующее отношение предпочтения не меняется, чего нельзя сказать про $\boldsymbol{u}''$. В классической работе [12] вводятся два наиболее естественных способа локально измерять отношение агента к риску.

Определение 3. Рассмотрим агента с дважды дифференцируемой функцией полезности $\boldsymbol{u}$. Тогда его абсолютная и относительная меры Эрроу–Пратта неприятия риска определяются, соответственно, по формулам

$$r(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\boldsymbol{u}''(x)}{\boldsymbol{u}'(x)} = -\frac{d}{dx}\log \boldsymbol{u}'(x) \qquad \text{и} \qquad r^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\,r(x). \tag{5}$$

Прежде всего заметим, что функция r, полученная из некоторой функции полезности $\boldsymbol{u}$, содержит всю необходимую информацию о предпочтениях агента с такой полезностью и при этом не содержит лишней информации: класс $\int e^{-\int r}$, получаемый с помощью неопределенного интеграла, будет состоять в точности из всех положительных аффинных преобразований исходной функции $\boldsymbol{u}$.

Чтобы понять, почему величины r и r^* являются *локальными* мерами отношения к риску, нам потребуется понятие премии за риск. Рассмотрим агента с функцией полезности $\boldsymbol{u}$. Его премией за риск, порождаемый случайной величиной w, является значение $\pi_w \in \mathbb{R}$, такое что с точки зрения агента случайное благосостояние w эквивалентно детерминированному благосостоянию $\mathbb{E}w - \pi_w$:

$$\boldsymbol{u}(\mathbb{E}w - \pi_w) = \mathbb{E}\,[\boldsymbol{u} \circ w].$$

В [12] показано, что при некоторых естественных ограничениях на $\boldsymbol{u}'''$ величина $r(x)$ определяет соотношение между риском, порождаемым случайным благосостоянием w с $\mathbb{E}w = x$ и $\mathbb{D}w \to 0$, и премией за него:

$$\pi_w = \frac{1}{2}\,r(x)\,\mathbb{D}w + o(\mathbb{D}w).$$

Если при этом $x > 0$, то величина $r^*(x)$ определяет соотношение между относительным риском и относительной премией за него:

$$\frac{\pi_w}{x} = \frac{1}{2}\,r^*(x)\,\mathbb{D}\left[\frac{w}{x}\right] + o(\mathbb{D}w).$$

Две рассмотренных локальных меры риска порождают два наиболее естественных семейства функций полезности, в каждом из которых соответствующая мера становится глобальной. А именно, следуя [12], с помощью простого интегрирования можем убедиться в следующем.

Лемма 2. *Рассмотрим семейства функций полезности, для которых $r = \mathrm{const}$ и $r^* = \mathrm{const}$, соответственно. Первое семейство можно, с точностью до положительных аффинных преобразований, записать в виде*

$$\boldsymbol{u}_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ x, & \text{предельный случай для } \alpha = 0, \end{cases}$$

а второе — в виде

$$\boldsymbol{u}^*_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ \log x, & \text{предельный случай для } \alpha = 0. \end{cases}$$

При этом $r \equiv \alpha$ для $\boldsymbol{u}_\alpha$, и $r^* \equiv 1 - \alpha$ для $\boldsymbol{u}^*_\alpha$.

Теперь заметим, что функции $\boldsymbol{u}_\alpha$ могут рассматриваться на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и при фиксированном α функции $\boldsymbol{u}_\alpha(x+k)$ эквивалентны для всех $k \in \mathbb{R}$, т. е. являются положительными аффинными преобразованиями друг друга. В частности это означает, что предпочтения, которые задает функция $\boldsymbol{u}_\alpha$ между случайными благосостояниями $w \in \mathcal{W}(w_0)$, не отличаются от предпочтений, задаваемых этой функцией между соответствующими абсолютными изменениями $w - w_0$.

В то же время функции $\boldsymbol{u}^*_\alpha(kx)$ эквивалентны для всех $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Это означает, что предпочтения, которые задает функция $\boldsymbol{u}^*_\alpha$ между случайными благосостояниями $w \in \mathcal{W}(w_0)$, не отличаются от предпочтений, задаваемых этой функцией между соответствующими относительными изменениями $\frac{w}{w_0}$.

Далее в целевом функционале (4) будут использоваться функции полезности $\boldsymbol{u}_\alpha$ и $\boldsymbol{u}^*_\alpha$. При этом один из способов избежать бездействия — это допустить склонность агента к риску, которая возникает для выпуклых функций $\boldsymbol{u}_\alpha$, $\alpha < 0$, и $\boldsymbol{u}^*_\alpha$, $\alpha > 1$.

§6. Окончательная постановка

Если агент опирается на функцию полезности $\boldsymbol{u}_\alpha$, т. е. сравнивает между собой распределения абсолютных изменений своего благосостояния, то для такого агента естественный способ выполнить требование (iii) о контроле за прибылью — это равномерно ограничить для каждого момента времени и каждого возможного благосостояния в этот момент дальнейшую дисперсию этого благосостояния. А именно, нужно для некоторого $\eta > 0$ потребовать, чтобы $(\mathbb{D}_n w)(\xi) \le \eta^2$ для всех $\xi \in [0,1)$ и $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, где абсолютная условная дисперсия $\mathbb{D}_n w$ определяется по формуле

$$\mathbb{D}_n w \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}_n\big[(w - w_n)^2\big] = \mathbb{E}_n\big[(w - \mathbb{E}_n w)^2\big].$$

Аналогично, если агент опирается на функцию полезности $\boldsymbol{u}^*_\alpha$, т. е. сравнивает между собой распределения относительных изменений своего благосостояния, то для такого агента естественный способ выполнить требование (iii) — это равномерно ограничить для каждого момента времени и каждого возможного благосостояния в этот момент дальнейшую *относительную* дисперсию этого благосостояния. А именно, нужно для некоторого $\eta > 0$ потребовать, чтобы $(\mathbb{D}^*_n w)(\xi) \le \eta^2$ для всех $\xi \in [0,1)$ и $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, где относительная условная дисперсия

$\mathbb{D}_n^* w$ определяется по формуле

$$\mathbb{D}_n^* w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{D}_n w}{(\mathbb{E}_n w)^2} = \mathbb{D}_n \left[\frac{w}{\mathbb{E}_n w} \right].$$

Собирая теперь все вместе, мы введем две функции Беллмана, первая из которых содержит все обсуждаемые выше элементы поставленной задачи в абсолютном контексте, а вторая — в относительном:

$$\mathcal{B}(w_0, \sigma, \alpha, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{w \in \mathcal{W}(w_0)} \left\{ \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}_\alpha \circ w \right] \;\middle|\; \mathbb{D}_n w \leq \eta^2,\ \mathbb{D}_0 w = \sigma^2 \right\},$$

$$\mathcal{B}^*(w_0, \sigma, \alpha, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{w \in \mathcal{W}(w_0)} \left\{ \mathbb{E}\left[\boldsymbol{u}_\alpha^* \circ w \right] \;\middle|\; \mathbb{D}_n^* w \leq \eta^2,\ \mathbb{D}_0^* w = \sigma^2 \right\}.$$

Отметим, что в обоих случаях мы берем супремум не сразу по всему множеству случайных величин w, удовлетворяющих требуемым ограничениям, а по «срезам» этого множества, соответствующим разным значениям σ^2 общей абсолютной или относительной дисперсии. Затем, если мы для каждого такого σ найдем соответствующий супремум и случайную величину w, в которой он достигается, то максимизируя затем функцию Беллмана по σ, мы придем к окончательному ответу.

Как мы уже говорили, опираясь на выпуклые функции $\boldsymbol{u}_\alpha$, $\alpha < 0$, и $\boldsymbol{u}_\alpha^*$, $\alpha > 1$, для которых мера r неприятия риска отрицательна (т. е. риск предпочтителен), агент сможет различать между собой стратегии с нулевым математическим ожиданием прибыли, причем бездействие не будет для него предпочтительным. При этом для параметров η и для показателей $r \equiv \alpha$ и $r^* \equiv 1 - \alpha$ можно найти взаимосвязанные нижние границы, разделяющие случай конечных и случай бесконечных значений для функций $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^*$, соответственно. Бесконечность значений этих функций будет следствием бесконечности соответствующих функционалов полезности для некоторых допустимых случайных величин w, что, как мы объясняли ранее, означает нарушение базовой рациональности фон Неймана–Моргенштерна. Таким образом, мы можем точно найти ту грань, которая отделяет рискованное, но все еще достаточно аккуратное и остающееся рациональным поведение от полностью нерационального риска! И именно благодаря тому, что эта грань несколько отличается просто от полного неприятия риска (при котором $r > 0$), задача о рациональных стратегиях в мартингальной игре оказывается осмысленной и весьма содержательной. Как мы сейчас увидим, она почти эквивалентна относительно недавно решенным задачам [4, 13, 18] о поиске точных констант в некоторых классических неравенствах анализа [8, 9] методом функции Беллмана.

§7. Аналитическая переформулировка

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — произвольный диадический интервал. Заметим, что во всех вышеприведенных рассуждениях ничего не изменится, если мы в качестве базового вероятностного пространства, на котором заданы случайные величины w, возьмем, вместо пространства $([0,1], \lambda)$ с мерой Лебега на единичном интервале, пространство $\bigl(I, \frac{\lambda}{|I|}\bigr)$ с нормированной мерой Лебега на интервале I. Далее, мы будем писать $J \sqsubseteq I$, если J является диадическим подынтервалом в I. Интегральное среднее функции $\varphi \in L^1(I)$ по интервалу $J \sqsubseteq I$ будем обозначать

$$\langle \varphi \rangle_J \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|J|} \int_J \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Теперь приведем функции $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^*$ к тому виду, в котором фактически эти же функции фигурировали в [13] и [4, 18]. Начнем с функции $\mathcal{B}$. Прежде всего отметим, что при $\alpha < 0$ функцию $\boldsymbol{u}_\alpha$ можно с помощью положительного аффинного преобразования заменить на функцию $e^{-\alpha x}$. Следующим шагом мы можем подобрать единицу измерения для денег таким образом, чтобы параметр риска α стал равен -1. Для этого сделаем замену

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha w, \quad x_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha w_0 \quad \text{и} \quad \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha \eta.$$

При этом условие $\mathbb{D}_n w \le \eta^2$ примет вид $\varphi \in \mathrm{dBMO}_\varepsilon(I)$, где множество

$$\mathrm{dBMO}_\varepsilon(I) \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{ \varphi \in L^1(I) \Bigm| \sup_{J \sqsubseteq I} \bigl(\langle \varphi^2 \rangle_J - \langle \varphi \rangle_J^2 \bigr) \le \varepsilon^2 \Bigr\}$$

представляет из себя шар радиуса ε в диадическом пространстве функций ограниченной осцилляции. Сделав последнюю замену $x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^2\sigma^2 + x_1^2$, перейдем от функции $\mathcal{B}$ к функции

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}}_{\ge 0}(x_1, x_2; \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in \mathrm{dBMO}_\varepsilon(I)} \bigl\{ \langle e^\varphi \rangle_I \bigm| \varphi \ge 0,\, \langle \varphi \rangle_I = x_1,\, \langle \varphi^2 \rangle_I = x_2 \bigr\},$$

которая не зависит от выбора интервала I. Аналогичная функция $\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}}$, в определении которой отсутствовало ограничение $\varphi \ge 0$, была вычислена в [13] вместе с соответствующими функциями φ, реализующими супремум. Это позволило найти точные *не*улучшаемые значения для констант $\varepsilon_0^{\mathrm{d}}$ и $C^{\mathrm{d}}(\varepsilon)$, фигурирующих в диадическом варианте неравенства Джона–Ниренберга [9] в интегральной форме.

Предложение 1. *Существует* $\varepsilon_0^{\mathrm{d}} > 0$*, такое что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0^{\mathrm{d}})$ *можно найти константу* $C^{\mathrm{d}}(\varepsilon) > 0$*, такую что неравенство*

$$\langle e^{\varphi}\rangle_I \le C^{\mathrm{d}}(\varepsilon) e^{\langle\varphi\rangle_I}$$

выполняется для всех $\varphi \in \mathrm{dBMO}_{\varepsilon}(I)$.

Читатель, внимательно следивший за последовательностью рассуждений на протяжении статьи, теперь сможет увидеть следующую экономическую интерпретацию этого утверждения. Будем трактовать φ как предельные благосостояния в диадической мартингальной игре. Если мы рассматриваем только те φ, у которых для сходящихся к ним мартингалов осуществляется достаточный контроль за потерями уже полученной прибыли в *абсолютном* смысле, то выбор среди этих величин, осуществляемый с помощью функции полезности с постоянной *абсолютной* склонностью к риску ($r \equiv -1$), не приводит к слишком большому неконтролируемому риску: нельзя выбрать случайные благосостояния, которые были бы сколь угодно полезнее, чем просто гарантированное обладание их математическим ожиданием.

Перейдем к функции $\mathcal{B}^*$. После замены $\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{1+\eta^2}$ условие $\mathbb{D}_n^* w \le \eta^2$ примет вид $w \in \mathrm{dRH}^2_{\rho}(I)$, где множество

$$\mathrm{dRH}^2_{\rho}(I) \overset{\mathrm{def}}{=} \Big\{ w \in L^1(I) \;\Big|\; w \ge 0,\, \sup_{J \sqsubseteq I} \tfrac{\langle w^2\rangle_J}{\langle w\rangle_J^2} \le \rho^2 \Big\}$$

представляет из себя «шар» радиуса ρ в диадическом классе Геринга с показателем 2 (dyadic reverse-Hölder class). Для единообразия обозначив $x_1 \overset{\mathrm{def}}{=} w_0$ и сделав замену $x_2 \overset{\mathrm{def}}{=} x_1^2(1+\sigma^2)$, перейдем от функции $\mathcal{B}^*$ к независящей от выбора интервала I функции

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}*}(x_1, x_2; \rho, \alpha) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{w \in \mathrm{dRH}^2_{\rho}(I)} \big\{ \langle w^{\alpha}\rangle_I \;\big|\; \langle w\rangle_I = x_1,\, \langle w^2\rangle_I = x_2 \big\},$$

где $\rho \ge 1$ и $\alpha > 1$. Она представляет из себя диадический вариант функции, которая была вычислена в [4, 18] вместе с экстремальными весами w, реализующими супремум. В упомянутых работах функции такого рода вычислялись для обычных классов Геринга $\mathrm{RH}^p(I)$, в определении которых выражения $\frac{\langle w^p\rangle_J}{\langle w\rangle_J^p}$ ограничиваются равномерно по всем подынтервалам $J \subseteq I$, а не только по диадическим. Они применялись для получения точных констант в неравенствах [8], связывающих классы Геринга друг с другом. В частности, можно вычислить точные *не*улучшаемые значения для всех выражений, фигурирующих в следующем утверждении.

Предложение 2. *Существует $\rho_0(\alpha) > 1$, такое что для любого $\rho \in (1, \rho_0(\alpha))$ можно найти конечную константу $C(\rho, \alpha) > 0$, такую что неравенство*

$$\langle w^\alpha \rangle_I \le C(\rho, \alpha) \langle w \rangle_I^\alpha$$

выполняется для всех $w \in \mathrm{RH}^2_\rho(I)$.

Отметим, что из прямого неравенства Гёльдера следует, что если $\alpha \in (1, 2]$, то $\rho_0(\alpha) = \infty$ и $C(\rho, \alpha) = \rho^\alpha$. Поэтому в вычислениях нуждается только случай $\alpha > 2$.

Вариант предложения 2 для диадических классов Геринга допускает экономическую интерпретацию аналогичную той, которую мы приводили для предложения 1: нужно лишь дважды заменить слово «абсолютный» на «относительный» (см. также работу [1] о диадических классах Геринга).

§8. Частичное решение

Диадическая функция $\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}}$, вычисленная в [13] вместе с экстремальными функциями φ, отличается от $\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}}_{\ge 0}$ отсутствием ограничения $\varphi \ge 0$, накладываемого при вычислении супремума. Что касается функции $\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}*}$, то в [4, 18] вычисляется только ее *не*диадический аналог. Эти два факта не позволяют полностью решить задачу о поиске оптимальных стратегий без дополнительных вычислений. Тем не менее, мы можем воспользоваться тем фактом, что функции φ, в которых достигается супремум из определения функции $\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}}$, в части случаев автоматически оказываются неотрицательными. Это позволит почти сразу получить частичное решение исходной задачи в абсолютном контексте.

Итак, следуя [13], положим $\varepsilon_0^{\mathrm{d}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{2}\log 2 \approx 0.98$ и определим возрастающую биективную функцию

$$\delta\colon \big(0, \varepsilon_0^{\mathrm{d}}\big] \to (0, 1],$$

которая каждому ε сопоставляет единственый на интервале $[\varepsilon, 1]$ корень уравнения

$$\left(1-\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}\right) e^{\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}} \left(2-e^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}\right) = (1-\delta)\, e^{\delta-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}.$$

Также нам понадобится функция, которая искажает ε в сторону уменьшения:

$$\epsilon(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\varepsilon) - \sqrt{\delta^2(\varepsilon)-\varepsilon^2}.$$

Искажение нарастает с ростом ε и его максимум составляет $\varepsilon_0^{\mathrm{d}} - \epsilon(\varepsilon_0^{\mathrm{d}}) \approx 0.18$.

Далее, точки (x_1, x_2), в которых супремум в определении функции $\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}}$ из [13] берется по непустому множеству, образуют замкнутую область

$$\Omega_\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 \le x_2 \le x_1^2 + \varepsilon^2\right\}.$$

Для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0^{\mathrm{d}})$ и $(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon$ в [13, 4151–4153] в явном виде вычислены функции $\varphi_{\varepsilon, x_1, x_2}$, в которых достигается супремум в $\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}}$ (т. е. без ограничения $\varphi \ge 0$). Прямым следствием этих вычислений является следующая лемма.

Лемма 3. *Верны следующие утверждения.*

- *Если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0^{\mathrm{d}})$, $(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon$ и $x_1 \ge \epsilon(\varepsilon)$, то $\varphi_{\varepsilon, x_1, x_2} \ge 0$ и $\left\langle e^{\varphi_{\varepsilon, x_1, x_2}} \right\rangle_I < \infty$. При этом функция $\boldsymbol{B}^{\mathrm{d}}$ возрастает по x_2.*
- *Если $\varepsilon \ge \varepsilon_0^{\mathrm{d}}$, то существует функция $\varphi_\infty \in \mathrm{dBMO}_\varepsilon(I)$, такая что $\varphi_\infty \ge 0$, $\left\langle \varphi_\infty \right\rangle_I = x_1$ и $\left\langle e^{\varphi_\infty} \right\rangle_I = \infty$.*
- *Функции $\varphi_{\varepsilon, x_1, x_2}$ и φ_∞ неограниченны сверху.*

Дополнительно прокомментируем второй пункт. В качестве φ_∞ можно взять функцию, получающуюся из $\varphi_{\varepsilon, x_1, x_2}$ предельным переходом $\varepsilon \to \varepsilon_0^{\mathrm{d}}$, и при этом такая функция будет неотрицательна, если разница $x_2 - x_1^2$ достаточно мала. Это легко следует из упомянутых вычислений [13, 4151–4153].

Теперь из леммы 3 и из предыдущего материала, включающего в себя лемму 1, теоремы 2 и 3 и лемму 2, выведем, при каких условиях возможен рациональный выбор оптимальной в абсолютном смысле стратегии для игры с монетой и каков должен быть результат этого выбора.

Вспомним, что мы рассматриваем агента с исходным благосостоянием w_0, который выбирает стратегию игры — адаптированную к $\{\mathcal{F}_n\}$ последовательность функций v_n, каждая из которых определяет ту часть бюджета, которую агент должен задействовать в игре в момент n. При этом набор допустимых стратегий ограничивается следующим образом.

- Во-первых, агент рассматривает только те стратегии, которые приводят к равномерно ограниченным снизу последовательностям благосостояний $\{w_n\}$, т. е. не приводят к неограниченному долгу в процессе игры. В этом случае у последовательности $\{w_n\}$ существует поточечный предел $w \in L^1([0,1))$, который будет определять финальное благосостояние агента.
- Дальше агент ограничивает пространство поиска только теми стратегиями, для которых $\mathbb{E}w \geq w_0$ и $w \geq 0$, т. е. теми, из-за которых он в среднем не проигрывает и не теряет больше, чем выделенный на игру бюджет w_0.
- Для оставшихся допустимыми стратегий, для которых с необходимостью будет выполняться $\mathbb{E}w = w_0$ и $w_n = \mathbb{E}_n w$, агент вводит еще одно ограничение, которое позволяет контролировать потери уже полученной прибыли в абсолютном смысле. А именно, для каждого момента времени ограничивается дальнейшая дисперсия благосостояния агента: $\mathbb{D}_n w \leq \eta^2$ для некоторого $\eta > 0$.

Наконец, будем предполагать, что агент сравнивает между собой вероятностные меры $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, трактуемые как возможные распределения его благосостояния, сравнивая для них выражения $\int \boldsymbol{u}_\alpha \, dp$, где $\boldsymbol{u}_\alpha$ — функция полезности с постоянной абсолютной мерой неприятия риска, равной α. Соответствующее бинарное отношение будем обозначать символом $\succ_\alpha$. Множество всех тех распределений финального благосостояния, которые порождаются допустимыми стратегиями, обозначим через $\mathcal{P}_\eta(\mathbb{R}_{\geq 0}, w_0)$.

Теорема 4. *При всех описанных условиях те значения α, при которых возможен рациональный выбор отличной от бездействия оптимальной стратегии, составляют непустой конечный интервал, зависящий от η. А именно, верно следующее.*

- *Если $\alpha \geq 0$, то отношение $\succ_\alpha$ на всем $\mathcal{P}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ является отношением предпочтения, которое удовлетворяет аксиомам 1, 2 и 3 базовой рациональности. При этом распределение p_{w_0}, порождаемое бездействием, будет максимальным элементом в $\mathcal{P}_\eta(\mathbb{R}_{\geq 0}, w_0)$ относительно $\succ_\alpha$ (единственным* *при* $\alpha > 0$ *и неразличимым с остальными элементами при* $\alpha = 0$).

- *Если* $-\frac{\sqrt{2}\log 2}{\eta} < \alpha < 0$, *то множество* $\mathcal{P}_\eta(\mathbb{R}_{\geq 0}, w_0)$ *содержится в пространстве* $\mathcal{P}_{e^{-\alpha x}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, *на котором отношение* $\succ_\alpha$ *является отношением предпочтения, удовлетворяющим аксиомам* 1, 2 *и* 3. *Распределение* p_{w_0} *теперь не является максимальным элементом в* $\mathcal{P}_\eta(\mathbb{R}_{\geq 0}, w_0)$ *относительно* $\succ_\alpha$. *Если допустимая абсолютная осцилляция благосостояния существенно не превышает исходное благосостояние, т. е. если* $w_0 \geq -\frac{\epsilon(-\alpha\eta)}{\alpha}$, *то таким элементом будет распределение* p_w *случайной величины*

$$w = -\frac{\varphi_{\varepsilon,x_1,x_2}}{\alpha}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = -\alpha\eta, \quad x_1 = -\alpha w_0 \quad \text{и} \quad x_2 = x_1^2 + \varepsilon^2.$$

  Вычисленная таким образом случайная величина w *не ограничена сверху* (*требование* (i)) *и определяет финальное благосостояние для стратегии*

$$\{v_n\} = \{|\Delta_{n+1} w|\}.$$

- *Если* $\alpha \leq -\frac{\sqrt{2}\log 2}{\eta}$, *то не существует такого выпуклого множества* P, $\mathcal{P}_\eta(\mathbb{R}_{\geq 0}, w_0) \subseteq P \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, *на котором отношение* $\succ_\alpha$ *удовлетворяло бы аксиоме* 1 *или* 2.

§9. Благодарности

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 19-11-00058П).

Автор благодарит В. И. Васюнина, С. В. Кислякова и Д. М. Столярова за вопросы и ценные замечания, которые были сделаны во время доклада автора на семинаре ПОМИ по анализу. Состоявшееся обсуждение позволило выбрать правильное направление в изложении материала и привело в итоге к существенному улучшению статьи.

Список литературы

1. T. C. Anderson and D. E. Weirich, *A dyadic gehring inequality in spaces of homogeneous type and applications*. — N. Y. J. Math. **24** (2018), 1–19.
2. D. Blackwell and M. A. Girshick, *Theory of games and statistical decisions*, John Wiley & Sons, 1954.
3. D. Dillenberger and R. V. Krishna, *Expected utility without bounds–a simple proof*. — J. Math. Econ. **52** (2014), 143–147.

4. M. Dindoš and T. Wall, *The sharp a_p constant for weights in a reverse-hölder class.*. — Rev. Mat. Iberoam. **25**, No. 2 (2009), 559–594.
5. P. C. Fishburn, *Bounded Expected Utility.* — Ann. Math. Stat. **38**, No. 4 (1967), 1054–1060.
6. P. C. Fishburn, *Unbounded Expected Utility.* — Ann. Stat. **3**, No. 4 (1975), 884–896.
7. H. Föllmer and A. Schied, *Stochastic finance*, De Gruyter, 2004.
8. F. W. Gehring, *The l^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping.* — Acta Math. **130** (1973), 265–277.
9. F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation.* — Commun. Pure Appl. Math. **14**, No. 3 (1961), 415–426.
10. D. M. Kreps, *Notes on the theory of choice*, Routledge, 2018.
11. P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1937.
12. J. W. Pratt, *Risk aversion in the small and in the large.* — Econometrica **32**, No. 1/2 (1964), 122–136.
13. L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp results in the integral-form john–nirenberg inequality.* — Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 4135–4169.
14. J. Ville, *étude critique de la notion de collectif*, Ph.D. thesis, Faculté des sciences de l'Université de Paris, 1939.
15. R. von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre anwendungen in der statistik und der theoretischen physik*, Vorlesungen aus dem Gebiete der Angewandten Mathematik, vol. 1, Franz Deuticke, 1931.
16. D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991.
17. В. И. Васюнин, *Точная константа в обратном неравенстве Гёльдера для макенхауптовских весов.* — Алгебра и анализ **15**, No. 1 (2003), 73–117.
18. В. И. Васюнин, *Взаимные оценки l^p-норм и функция Беллмана.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **355** (2008), 81–138.
19. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, *Теория игр и экономическое поведение*, Наука, 1970 (russian).

Osipov N. N. The von Neumann–Morgenstern rationality axioms and analytic inequalities.

Trading in an efficient market where the asset price behaves as a martingale leads to a zero expected payoff. However, the problem of how to make such trading as rational as possible remains meaningful and non-trivial: it turns out that there is a certain gap between trading that has zero profit expectation, but is still rational in the basic sense, and completely irrational economic behavior that violates the basic von Neumann–Morgenshtern rationality axioms. By solving the problem of describing this gap and finding optimal trading strategies that get into it, we will arrive at the Bellman functions that have previously arisen in solving completely abstract problems about finding sharp constants in inequalities from analysis. Namely, solving the economic problem in the absolute context, where the strategy to be chosen does not depend on the current wealth of the

agent, we will arrive at the Bellman function related to the John–Nirenberg inequality in integral form. Solving the problem in a relative context, where all the agent's actions in the market are considered relative to his current wealth, we will arrive at the Bellman function related to the inequalities that describe the relationship between Gehring classes. Thus, we will obtain a natural economic interpretation for the listed inequalities and the Bellman functions associated with them.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: `nicknick@pdmi.ras.ru`

Поступило 9 ноября 2023 г.