



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Böttcher, B. Silbermann, Toeplitz operators with  $C + H^\infty$  symbols on  $l^p$ , *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, Volume 157, 124–128

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.174

January 13, 2025, 21:18:24



ТЁПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ С СИМВОЛАМИ ИЗ  $C + H^\infty$   
В ПРОСТРАНСТВАХ  $\ell^p$ .

Хорошо известный результат Д. Сарасона состоит в том, что  $C + H^\infty$  является замкнутой подалгеброй алгебры  $L^\infty$ ; Р. Дуглас доказал, что оператор Тёплица с символом из  $C + H^\infty$  нётеров в пространстве  $\ell^2$  тогда и только тогда, когда его символ обратим в  $C + H^\infty$ . В настоящей заметке мы покажем, что оба результата имеют аналог для пространств  $\ell^p$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть  $\ell^p$  ( $1 < p < \infty$ ) — банахово пространство всех последовательностей  $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$  таких, что  $\|\varphi\|_p = \left(\sum_{n=0}^\infty |\varphi_n|^p\right)^{1/p} < \infty$ . Если  $a$  — функция из  $L^\infty$  на единичной окружности  $T$  с последовательностью коэффициентов Фурье  $\{a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ , то матрица  $(a_{j-k})_{j,k=0}^\infty$  определяет ограниченный оператор в  $\ell^2$ , называемый оператором Тёплица с символом  $a$  и обозначаемый через  $T(a)$ . Пусть  $M_p$  — множество всех функций  $a$  из  $L^\infty$  таких, что  $T(a)\varphi \in \ell^p$  и  $\|T(a)\varphi\|_p \leq c \|\varphi\|_p$  для всех  $\varphi \in \ell^2 \cap \ell^p$  (здесь  $c$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $\varphi$ ). Если  $a \in M_p$ , то  $T(a)$  естественным образом продолжается до ограниченного оператора в  $\ell^p$ . Множество  $M_p$ , снабженное поточечными операциями и нормой

$\|a\|_{M_p} = \|T(a)\|_{\mathcal{L}(\ell^p)}$ , является банаховой алгеброй.

Пусть  $C_p$  — замыкание в  $M_p$  множества всех тригонометрических многочленов. Обозначим  $H_p^{\infty \text{ def}} \triangleq M_p \cap H^\infty$  и  $C_p + H_p^{\infty \text{ def}} \triangleq \{f+h : f \in C_p, h \in H^\infty\}$ . Отметим, что  $H_p^{\infty}$  содержит разрывные функции (см. [1]), так что  $C_p + H_p^{\infty}$  строго больше  $C_p$ .

ТЕОРЕМА I. Множество  $C_p + H_p^{\infty}$  является замкнутой подалгеброй алгебры  $M_p$ .

Доказательству предположим две леммы.

ЛЕММА I (Л. А. Залькман, У. Рудин; см. [2]). Пусть  $X$  — банахово пространство и пусть  $E$  и  $F$  замкнутые подпространства в  $X$ . Если существует последовательность  $\{S_n\}$  линейных ограниченных операторов в  $X$ , удовлетворяющая следующим условиям:

(i)  $\sup_n \|S_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$

(ii)  $S_n(X) \subset E$  и  $S_n(F) \subset F$  для всех  $n$ ,

(iii)  $\|S_n a - a\|_X \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$  для всех  $a \in E$ ,

то  $E + F$  будет замкнутым подпространством пространства  $X$ .

ЛЕММА 2 (Н.К.Никольский [3]). Пусть  $\sigma_n a$  обозначает  $n$ -ую сумму Фейера функции  $a$ . Тогда для любой функции  $a$  из  $M_p$  справедлива оценка

$$\|\sigma_n a\|_{M_p} \leq \|a\|_{M_p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Применяем лемму I, в которой положим  $X = M_p$ ,  $E = C_p$ ,  $F = H_p^\infty$  и  $S_n = \sigma_n$  (см. лемму 2).

По существу нам нужно проверить лишь справедливость условия (iii) в лемме I, поскольку выполнение условия (ii) очевидно, а условие (i) гарантирует лемма 2.

Итак, пусть  $a \in C_p$  и  $\varepsilon > 0$ . Выберем тригонометрический многочлен  $f$  такой, что  $\|a - f\|_{M_p} < \varepsilon/3$ . Тогда, по лемме 2,

$$\begin{aligned} \|\sigma_n a - a\|_{M_p} &\leq \|\sigma_n(a - f)\|_{M_p} + \|\sigma_n f - f\|_{M_p} + \|f - a\|_{M_p} \leq \\ &\leq 2\varepsilon/3 + \|\sigma_n f - f\|_{M_p}, \end{aligned}$$

и легко видеть, что  $\|\sigma_n f - f\|_{M_p} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, условие (iii) леммы I тоже выполнено. Следовательно,  $C_p + H_p^\infty$  - замкнутое подмножество пространства  $M_p$ , а теперь уже нетрудно показать, что  $C_p + H_p^\infty$  является алгеброй. ●

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Если  $a \in M_p$ , то оператор Ганкеля  $H(a)$ , определенный матрицей  $(a_{j+k+1})_{j,k=0}^\infty$ , является ограниченным в  $\ell^p$ . Для функции  $a \in L^\infty$  определяем  $\tilde{a} \in L^\infty$  правилом  $\tilde{a}(t) = a(1/t)$  ( $t \in \mathbb{T}$ ). Можно показать, что  $\tilde{a} \in M_p$  если  $a \in M_p$ . Следующие тождества хорошо известны: если  $a, b \in M_p$ , то

$$T(ab) = T(a)T(b) + H(a)H(\tilde{b}), \quad (1)$$

$$H(ab) = T(a)H(b) + H(a)T(\tilde{b}). \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $a \in C_p + H_p^\infty$ . Тогда для нётеровости оператора  $T(a)$  в  $\ell^p$  необходимо и достаточно, чтобы функция  $a$  была обратимой в  $C_p + H_p^\infty$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ В ТЕОРЕМЕ 2. Предполагаем, что  $a$  и  $a^{-1}$  принадлежат  $C_p + H_p^\infty$ . По формуле (1) имеем  $T(a)T(a^{-1}) = I - H(a)H(\tilde{a}^{-1})$ ,  $T(a^{-1})T(a) = I - H(a^{-1})H(\tilde{a})$ . Легко показать, что  $H(\tilde{a}^{-1})$  и  $H(\tilde{a})$  — компактные операторы в  $\ell^p$ . Следовательно,  $T(a^{-1})$  — регуляризатор оператора  $T(a)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательству необходимости в теореме 2 мы пошлем одно рассуждение. Обозначим через  $\mathcal{X}_p$  множество всех функций  $a$  из  $M_p$ , для которых  $H(\tilde{a})$  — компактный оператор в  $\ell^p$ . Используя тождество (2), можно легко убедиться в том, что  $\mathcal{X}_p$  — замкнутая подалгебра алгебры  $M_p$ . Мы утверждаем, что оператор  $T(a)$  с символом из  $\mathcal{X}_p$  будет нётеровым в  $\ell^p$  в том и только том случае, когда функция  $a$  обратима в  $\mathcal{X}_p$ . Действительно, в случае обратимости функции  $a$  в  $\mathcal{X}_p$  нётеровость оператора  $T(a)$  можно доказать так, как это было сделано выше. С другой стороны, предполагая, что  $T(a)$  нётеров в  $\ell^p$ , проверим, что  $a^{-1} \in \mathcal{X}_p$ . Пусть  $R$  — некоторый правый регуляризатор, т.е.  $R \in \mathcal{X}(\ell^p)$  и  $T(a)R = I + K$ , где  $K$  — компактный оператор. Прежде всего отметим, что  $a^{-1} \in M_p$ . Используя соотношение (2), получаем

$$0 = H(\tilde{a}^{-1}\tilde{a}) = T(\tilde{a}^{-1})H(\tilde{a}) + H(\tilde{a}^{-1})T(a).$$

Умножив это равенство справа на  $R$ , имеем

$$0 = T(\tilde{a}^{-1})H(\tilde{a})R + H(\tilde{a}^{-1}) + H(\tilde{a}^{-1})K,$$

откуда следует, что оператор  $H(\tilde{a}^{-1})$  является компактным, т.е.  $a^{-1} \in \mathcal{X}_p$ . Итак, если бы мы знали, что  $C_p + H_p^\infty = \mathcal{X}_p$  (по теореме Хартмана это справедливо для  $p=2$ ), то только что приведенное рассуждение доказывало бы "необходимость" в теореме 2. Поскольку нам известно лишь включение  $C_p + H_p^\infty \subset \mathcal{X}_p$ , придется применить другие методы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через  $\mathcal{R}$  сужение на единичную окрестность множества всех рациональных функций, не имеющих полюсов на  $\mathbb{T}$ . Отметим, что  $\mathcal{R} \subset C_p$ . Пусть  $\mathcal{R} + H_p^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}$ .

$= \{g+h : g \in \mathcal{K}, h \in H_p^\infty\}$ . Ясно, что  $C_p + H_p^\infty$  совпадает с замыканием множества  $\mathcal{K} + H_p^\infty$  в  $M_p$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Множество  $\mathcal{K} + H_p^\infty$  является алгеброй с поточечными операциями. Если  $a \in \mathcal{K} + H_p^\infty$ , то оператор  $T(a)$  нётеров в  $\ell^p$  тогда и только тогда, когда функция  $a$  обратима в  $L^\infty$  и  $a^{-1}$  принадлежит  $\mathcal{K} + H_p^\infty$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из формулы (2) и теоремы Кронекера (согласно которой  $N(\tilde{a})$  имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда  $a \in \mathcal{K} + H_p^\infty$ ) легко получить, что  $\mathcal{K} + H_p^\infty$  — алгебра. Критерий нётеровости можно доказать, сочетая теорему Кронекера с рассуждением, приведенным в замечании выше (следует только выбрать такой регуляризатор  $\mathcal{K}$ , для которого  $\mathcal{K}$  имеет конечный ранг). ●

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМЕ 2.** Пусть  $T(a)$  нётеров в  $\ell^p$ . Тогда функция  $a$  обратима в  $M_p$ . Выберем функции  $b_n$  из  $\mathcal{K} + H_p^\infty$  такие, что  $\|a - b_n\|_{M_p} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $\|T(a) - T(b_n)\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , откуда вытекает нётеровость операторов  $T(b_n)$  в  $\ell^p$  для всех достаточно больших  $n$ . По теореме 3  $b_n^{-1} \in \mathcal{K} + H_p^\infty$ , а так как  $\|a^{-1} - b_n^{-1}\|_{M_p} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , приходим к выводу, что  $a^{-1}$  принадлежит замыканию  $\mathcal{K} + H_p^\infty$  в  $M_p$ , т.е. принадлежит  $C_p + H_p^\infty$ . ●

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ.** (а) Если  $a \in C_p + H_p^\infty$  и оператор  $T(a)$  нётеров в  $\ell^p$ , то функция  $a$  принадлежит  $C_r + H_r^\infty$  и  $T(a)$  является нётеровым в  $\ell^r$  для всех  $r$  между  $p$  и  $q$  ( $1/p + 1/q = 1$ ). Это показывает, что индекс оператора  $T(a)$  одинаков во всех пространствах  $\ell^r$ , для  $r$ , лежащих между  $p$  и  $q$ . В частности, можно использовать результаты Р.Дугласа для  $n = 2$ , чтобы выразить индекс оператора  $T(a)$  в  $\ell^p$  в терминах гармонического продолжения.

(в) Пусть  $\text{alg } T(C_p + H_p^\infty)$  — наименьшая замкнутая подалгебра алгебры  $\mathcal{L}(\ell^p)$ , содержащая множество  $\{T(a) : a \in C_p + H_p^\infty\}$  и пусть  $\mathcal{C}_\infty(\ell^p)$  — множество всех компактных операторов в  $\ell^p$ . Можно доказать, что  $\mathcal{C}_\infty(\ell^p)$  является идеалом алгебры  $\text{alg } T(C_p + H_p^\infty)$  и что факторалгебра  $\text{alg } T(C_p + H_p^\infty) / \mathcal{C}_\infty(\ell^p)$  изометрически изоморфна алгебре  $C_p + H_p^\infty$ .

(с) Все результаты этой заметки переносятся на блочные тёплицевы операторы естественным образом.

Авторы выражают благодарность В.И.Васюнину за помощь при оформлении статьи.

### Литература

1. В и н о г р а д о в С.А. Мультипликаторы степенных рядов с последовательностью коэффициентов из  $\ell^p$ . - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. IV. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1974, т.39, с.30-39.
2. К у с и с П. Введение в теорию пространств  $H^p$ . М., 1984.
3. Н и к о л ъ с к и й Н.К. О пространствах и алгебрах тёплицевых матриц, действующих в  $\ell^p$ . - Сиб.матем.ж., 1966, т.VII, № I, с.146-158.

A.Böttcher, B.Silberman. Toeplitz operators with  $C + H^\infty$  symbols on  $\ell^p$ .

### Summary

We show that the algebra of all multipliers on  $\ell^p$  ( $1 < p < \infty$ ) contains a closed subalgebra,  $C_p + H_p^\infty$ , which coincides with the familiar algebra  $C + H^\infty$  in the case  $p = 2$ . We also prove that a Toeplitz operator with  $C_p + H_p^\infty$  symbol is Fredholm on  $\ell^p$  if and only if its symbol is invertible in  $C_p + H_p^\infty$ .