

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. N. Amatuni, V. N. Romanov, T. I. Malyutina,
Сравнение моделей, применяемых для описания
дилатометрического эксперимента,
TVT, 1978, Volume 16, Issue 5, 1041–1045

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt9192>

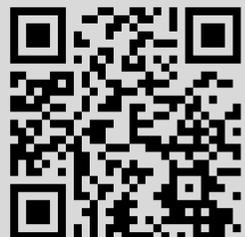
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 21, 2025, 02:04:22



УДК 536.2.023

СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИЛАТОМЕТРИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Аматуни А. Н., Романов В. Н., Малютин Т. И.

Определены критерии выбора полинома наилучшего приближения и на основе этих критериев проведен тщательный анализ результатов экспериментальных исследований ТКЛР в широком диапазоне температур для материалов, имеющих наиболее важное метрологическое значение: платины, меди, корунда и кварцевого стекла. Построены полиномы наилучшего приближения для этих материалов.

Задачей дилатометрических измерений является определение температурных коэффициентов линейного расширения (ТКЛР) при различных температурах по результатам совместных измерений длины (удлинения) и температуры. При этом результаты могут зависеть от выбора аппроксимирующей функции.

Следует отметить, что в этом вопросе нет единого подхода и он недостаточно изучен. В табл. 1 представлены данные различных авторов по тепловому расширению ряда образцовых веществ.

Таблица 1

Результаты аппроксимации данных по тепловому расширению

Вещество	Диапазон температур	Аппроксимирующая функция	Литература
Платина (Pt)	0–400° С	$L_t = L_0(1 + 8,868 \cdot 10^{-6}t + 1,324 \cdot 10^{-9}t^2)$	[1]
	0–400° С	$L_t = L_0(1 + 8,988 \cdot 10^{-6}t + 1,065 \cdot 10^{-9}t^2)$	[2]
	1140–2005 К	$\Delta L_T/L_0 = 7,543 \cdot 10^{-6}(T-291) + 2,362 \cdot 10^{-9}(T-291)^2$	[3]
	293–1900 К	$\alpha \cdot 10^6 = 6,117 + 1,6503 \cdot 10^{-2}T - 3,3561 \cdot 10^{-5}T^2 + 3,6605 \cdot 10^{-3}T^3 - 1,83772 \cdot 10^{-11}T^4 + 3,5357 \cdot 10^{-15}T^5$	[4]
Кварцевое стекло (SiO ₂)	80–1000 К	$\alpha \cdot 10^6 = -1,417 + 9,581 \cdot 10^{-3}T - 5,991 \cdot 10^{-6}T^2 - 1,5642 \cdot 10^{-8}T^3 - 6,666 \cdot 10^6 (T-300)^2 + (2,2128 \cdot 10^{-8}) \cdot (T-300)^4 + (T+600) + 1,013 \cdot 10^{-5} (T-700)^2 - 5,37 \cdot 10^{-9} (T-700)^2 (T+1400)$	[5]
	–100–400° С	$\alpha_{0 \rightarrow t} = \frac{10^{-6}(t + 157,36t)}{0,00126792t^2 + 0,88421t + 412,109}$	[6]
Медь (Cu)	20–66 К	$\alpha \cdot 10^6 = 3,5927339 \cdot 10^{-1} - 7,982688 \cdot 10^{-2}T + 4,1210928 \cdot 10^{-3}T^2 - 2,3496061 \cdot 10^{-5}T^3$	[7]
	66–243 К	$\alpha \cdot 10^6 = -6,5989607 + 2,6039173 \cdot 10^{-1}T - 1,0677137 \cdot 10^{-3}T^2 + 1,5459732 \cdot 10^{-6}T^3$	[7]
	243–800 К	$\alpha \cdot 10^6 = 1,150461 \cdot 10^1 + 2,4346346 \cdot 10^{-2}T - 2,8812984 \cdot 10^{-5}T^2 + 1,4737859 \cdot 10^{-8}T^3$	[7]
Корунд (Al ₂ O ₃)	20–1000° С	$\alpha \cdot 10^6 = A - (B/\sqrt{T}) + CT$	[8]

Здесь α — температурный коэффициент линейного расширения (ТКЛР); t — температура, °С; T — температура, К; $\Delta L/L_0$ — относительное удлинение; $(T-300)^2$; $(T-700)^2$ — члены, учитываемые при $T \geq 300$ К и $T \geq 700$ К соответственно.

Оценки параметров a_k , их СКО s_{a_k} и доверительные интервалы Δa_k для модели (1а) при различном числе m параметров

Характеристики	Pt (20—800° C)			Cu (-20+ -160° C)			Al ₂ O ₃ (20+800° C)			Кварцевое стекло (20+300° C)		
	m=2	m=3	m=4	m=2	m=3	m=4	m=2	m=3	m=4	m=2	m=3	m=4
$a_1/s_{a_1}, 10^{-6}$	8,93 0,01	8,93 0,02	8,92 0,05	17,07 0,09	16,51 0,08	16,80 0,08	6,57 0,09	6,08 0,04	5,95 0,03	0,62 0,02	0,55 0,02	0,495 0,30
$a_2/s_{a_2}, 10^{-9}$	1,38 0,01	1,37 0,09	1,45 0,30	11,95 0,60	2,13 1,3	11,46 2,50	2,80 0,20	5,34 0,2	6,50 0,25	-0,14 0,02	0,175 0,085	0,68 0,20
$a_3/s_{a_3}, 10^{-13}$	—	0,014 0,085	-0,18 0,76	—	-38,8 5,0	48,0 20	—	-2,8 0,2	-5,9 0,7	—	-0,33 0,09	-1,58 0,50
$a_4/s_{a_4}, 10^{-15}$	—	—	0,13 0,50	—	—	246 60	—	—	2,4 0,5	—	—	0,93 0,40
$\Delta a_1, 10^{-6}$	99%	0,04	—	—	—	0,37	—	—	0,13	—	—	0,13
	95%	0,03	—	—	—	0,22	—	—	0,09	—	—	0,09
	90%	0,02	—	—	—	0,17	—	—	0,06	—	—	0,06
$\Delta a_2, 10^{-9}$	99%	0,04	—	—	—	11,5	—	—	1,0	—	—	0,9
	95%	0,03	—	—	—	6,95	—	—	0,65	—	—	0,6
	90%	0,02	—	—	—	5,33	—	—	0,5	—	—	0,4
$\Delta a_3, 10^{-12}$	99%	—	—	—	—	92	—	—	2,8	—	—	2,3
	95%	—	—	—	—	55,6	—	—	1,8	—	—	1,5
	90%	—	—	—	—	42,6	—	—	1,4	—	—	1,0
$\Delta a_4, 10^{-15}$	99%	—	—	—	—	276	—	—	2,0	—	—	1,8
	95%	—	—	—	—	167	—	—	1,3	—	—	1,1
	90%	—	—	—	—	128	—	—	1,0	—	—	0,8
s_0^2	1,5	1,7	2,0	59	6,8	1,95	170	4,6	0,96	9	3	1,4
N	—	9	—	—	9	—	—	9	—	—	9	—

Примечание. s_0^2 — остаточная дисперсия, N — число измерений; критерии Фишера: $F_{0,05; 7; 8} = 4,21$; $F_{0,05; 6; 5} = 4,95$.

Приведенные результаты показывают разнообразие в выборе функций и аппроксимируемых величин. Следует отметить, что в большинстве случаев нет характеристик точности оценок параметров и самих функций, что снижает ценность имеющихся данных.

Наиболее распространены полиномиальные модели, когда аппроксимирующая функция имеет вид

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \sum_{k=1}^m a_k (T - T_0)^k \text{ — для относительного удлинения,} \quad (1a)$$

$$\alpha_{cp} = \sum_{k=0}^m a_k (T - T_0)^k \text{ — для среднего ТКЛР,} \quad (16)$$

где T — температура; a_k — неизвестные параметры.

Стандартная температура T_0 выбирается различным образом: $T_0 = 0$ К, 0, 20, 25° С и т. д.

Нами обработаны данные по Pt, Cu, Al₂O₃, SiO₂ с использованием полиномиальных моделей типа (1а).

В табл. 2 приведены полученные результаты. Данные этой таблицы показывают, что для Pt оптимальным является полином второй степени, для Cu — третьей, для Al₂O₃ — четвертой, для кварца — полином второй степени.

Характеристики адекватности модели (1а) для Pt

эксп $\alpha_{20} \pm t_i$ $\cdot 10^{-4}$ К ⁻¹	вычт $\alpha_{20} \pm t_i$ $\cdot 10^{-4}$ К ⁻¹	s_{α} 10^{-8} К ⁻¹	Отклоне- ние экспер. значения от выч- исл. $\cdot 10^{-8}$ К ⁻¹	Знак откло- нения	$\frac{s_{\alpha}^2 (N-m)}{\chi_{0,95}^2}$	$\Delta a, 10^{-3}$ К ⁻¹		
						99%	95%	90%
8,923	8,930	0,91	0,7	-	10,5/14 < 1	3,2	2,15	1,7
9,035	9,044	0,80	0,9	-		2,8	1,9	1,5
9,195	9,183	0,65	1,2	+		2,3	1,5	1,2 *
9,314	9,320	0,52	0,6	-		1,8	1,2	0,99
9,448	9,458	0,42	1,0	-		1,5	0,99 *	0,80 *
9,608	9,597	0,31	1,1	+		1,08 *	0,73	0,59 *
9,734	9,736	0,27	0,2	-		0,95	0,64	0,51
9,866	9,872	0,31	0,6	-		1,08	0,73	0,59 *
10,012	10,069	0,41	0,3	-		1,4	0,97	0,78

Знак * означает, что отклонение экспериментального значения от вычисленного превышает допустимую величину (при заданной вероятности).

Оптимальная степень полинома, т. е. та, до которой имеет смысл повышать степень полинома, определяется из условия значимости уменьшения остаточной дисперсии. Критическая область находится из неравенства [9]

$$s_{0m}^2 / s_{0m+1}^2 > F_{q, N-m, N-m-1}$$

где $F_{q, N-m, N-m-1}$ — критерий Фишера при уровне значимости q и степенях свободы $N-m$, $N-m-1$; N — число измерений; m — число параметров a_k ; s_{0m}^2 , s_{0m+1}^2 — остаточные дисперсии для степеней полинома m и

$m+1$ соответственно $\left(s_{0m}^2 = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^N p_i \left[\frac{\Delta L_i}{L_0} - \sum_{k=1}^m a_k (T_i - T_0)^k \right]^2 \right)$; p_i —

веса измерений.

Доверительные интервалы для параметров Δa_k и аппроксимирующих функций Δf определяются равенствами

$$\Delta a_k = s_{a_k} t_{q/2, N-m}; \quad \Delta f = s_f t_{q/2, N-m}, \quad (2)$$

где s_{a_k} , s_f — среднеквадратичные отклонения (СКО) параметра a_k и функции соответственно; значения $t_{q/2, N-m}$ находятся из распределения

Стьюдента (для уровня значимости q и $N-m$ степеней свободы).

Проверка адекватности модели может проводиться по трем критериям [9].

1. Остаточная дисперсия не должна превышать некоторого критического значения. Критическая область находится из неравенства *

$$s_0^2 (N-m) > \chi_{q, N-m}^2,$$

где $\chi_{q, N-m}^2$ — « χ -квадрат» — распределение при уровне значимости q и $N-m$ степенях свободы.

2. Отклонения экспериментальных значений от вычисленных не должны превышать допустимых.

3. Чередование знаков отклонений должно носить случайный характер.

Проведенный анализ показал, что на множестве линейных моделей вида (1а) адекватными являются для Pt полином второй степени, для

* Предполагается нормальность закона распределения погрешностей.

Оценки параметров α_k , s_{α_k} и доверительные интервалы $\Delta\alpha_k$ для модели (3а)

Кристаллы	$\alpha_1/s_{\alpha_1}; 10^{-2}$	α_2/s_{α_2}	$\alpha_3/s_{\alpha_3}; 10^{-1}$	Диапазон температур, К
Pt	0,046/0,006 $\Delta\alpha_1=0,012$	110/6 $\Delta\alpha_2=12$	0,067/0,009 $\Delta\alpha_3=0,018$	293–1273
Al_2O_3	0,382/0,012 $\Delta\alpha_1=0,024$	803/12 $\Delta\alpha_2=24$	0,13/0,01 $\Delta\alpha_3=0,02$	300–1200
Al_2O_3 ⊥	0,302/0,007 $\Delta\alpha_1=0,014$	757/9 $\Delta\alpha_2=18$	0,265/0,010 $\Delta\alpha_3=0,020$	300–1473
Cu	0,181/0,008 $\Delta\alpha_1=0,016$	235/6 $\Delta\alpha_2=12$	0,245/0,025 $\Delta\alpha_3=0,050$	293–112
Кварцевое стекло	0,329/0,005 $\Delta\alpha_1=0,010$	960/8 $\Delta\alpha_2=16$	-14,09/0,09 $\Delta\alpha_3=0,18$	293–975

Таблица 5

Значения ТКЛР (α) и их дисперсий (D_α), рассчитанных по моделям (1а), (3а)

T, К	Pt				Al_2O_3			
	$\alpha, K^{-1} \cdot 10^{-6}$ по (1а)	$D_\alpha, K^{-2} \cdot 10^{-16}$	$\alpha, K^{-1} \cdot 10^{-6}$ по (3а)	$D_\alpha, K^{-2} \cdot 10^{-16}$	$\alpha, K^{-1} \cdot 10^{-6}$ по (1а)	$D_\alpha, K^{-2} \cdot 10^{-16}$	$\alpha, K^{-1} \cdot 10^{-6}$ по (3а)	$D_\alpha, K^{-2} \cdot 10^{-16}$
293	8,93	2,65	8,92	21,5	5,95	9,7	5,60	11,8
373	9,14	1,72	9,13	2,3	6,89	0,55	6,75	5,3
473	9,40	0,85	9,38	0,48	7,78	1,7	7,77	1,2
573	9,66	0,35	9,63	1,2	8,41	0,92	8,40	3,3
673	9,92	0,23	9,89	1,35	8,86	1,5	8,82	3,5
773	10,19	0,48	10,15	0,97	9,17	2,44	9,12	2,2
873	10,46	1,10	10,42	0,55	9,41	2,41	9,34	1,4
973	10,73	2,1	10,70	0,58	9,63	37,5	9,52	3,2
1073	11,01	3,4	10,99	1,5	9,88	60,2	9,67	9,5
1173	—	—	11,29	3,9	—	—	9,79	21,5
1273	—	—	11,60	8,3	—	—	—	—

T, К	Cu				T, К	SiO_2	
	$\alpha, K^{-1} \cdot 10^{-6}$ по (1а)	$D_\alpha, K^{-2} \cdot 10^{-16}$	$\alpha, K^{-1} \cdot 10^{-6}$ по (3а)	$D_\alpha, K^{-2} \cdot 10^{-16}$		$\alpha, K^{-1} \cdot 10^{-6}$ по (3а)	$D_\alpha, K^{-2} \cdot 10^{-16}$
293	16,80	78,9	16,59	12,2	293	0,47	6,5
273	16,39	21,9	16,32	2,6	373	0,58	1,41
253	16,07	3,84	16,04	0,57	473	0,61	0,4
233	15,74	4,78	15,70	1,1	573	0,58	0,98
213	15,39	4,17	15,33	2,5	673	0,53	1,12
193	14,98	4,74	14,89	3,1	773	0,48	0,96
173	14,45	5,45	14,35	2,4	873	0,42	1,5
153	13,70	4,46	13,65	2,3	973	0,38	7,8
133	12,76	30,38	12,75	11,5	—	—	—
113	—	—	11,54	50,4	—	—	—

Cu — четвертой, для Al_2O_3 — четвертой. Для кварца полином четвертой степени не позволяет адекватно описать экспериментальные данные.

В табл. 3 приведены в качестве примера характеристики адекватности линейной модели (1а) для Pt.

Полиномиальные модели имеют существенный недостаток. Заранее неизвестна оптимальная степень полинома и, кроме того, параметры разложения не имеют физического смысла. Фактически мы имеем случай не-

известной модели, приближаемой полиномами. Это обстоятельство весьма существенно при вычислении производных по температуре от экспериментально определяемой величины и может приводить к смещенным оценкам. Следует отметить также, что разложения (1а), (1б) справедливы в сравнительно узких температурных диапазонах. При применении линейных моделей в широких диапазонах температур следует определять большое число параметров, что не может быть сделано с достаточной точностью. Приведенные выше результаты показывают, что в ряде случаев имеется несоответствие между оптимальной степенью полинома и необходимой для адекватного описания экспериментальных данных.

В связи с этим небезынтересно использование для аппроксимации физически интерпретируемых функций. В работе [10] на основе теории теплового расширения предложена функция вида

$$\alpha = \frac{a_1 \exp(a_2/T)}{T^2 [\exp(a_2/T) - 1]^2 [1 - a_3 \operatorname{cth}(a_2/2T)]} \quad (3)$$

или для относительного удлинения

$$\varepsilon(T) = \frac{a_1 \operatorname{cth}(a_2/2T)}{1 - a_3 \operatorname{cth}(a_2/2T)}. \quad (3a)$$

С использованием модели (3а) обработаны данные по Pt, Cu, Al₂O₃, Si. Результаты приведены в табл. 4.

Применение критериев *a*, *b*, *c* показало, что модель (3а) в рассмотренных случаях является адекватной.

Для дальнейшего сопоставления моделей рассчитаны производные деформации по температуре (т. е. ТКЛР) с использованием найденных оценок параметров. В табл. 5 приведены результаты расчета ТКЛР для различных моделей.

Данные табл. 5 показывают, что значения ТКЛР зависят от вида модели (даже при выполнении условий ее адекватности). В целом модель (3а) предпочтительнее, чем модели (1а), так как дает более корректные значения ТКЛР и, кроме того, содержит всего три параметра, которые могут быть определены достаточно точно.

Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева

Поступила в редакцию
17 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Holborn, S. Day. *Ann. der Phys.*, 4, 104, 1901.
2. J. B. Austin. *Physica*, 3, 240, 1932.
3. J. W. Edwards, R. Speiser, H. Jonston. *J. Appl. Phys.*, 22, № 4, 1951.
4. T. A. Hahn, R. K. Kirby. *Therm. Exp.* 1971. 3^dAIP Symp. Corning, № 4, 87, 1972.
5. T. A. Hahn, R. K. Kirby. *Therm. Exp.* 1971. 3^dAIP Symp. Corning, № 4, 13, 1972.
6. J. A. Bearitic, B. E. Blaisdell, J. Kaye. *Proc. Amer. Acad. Arts. Sci.*, 74, 371, 1944.
7. T. A. Hahn. *J. Appl. Phys.*, 41, № 13, 5096, 1970.
8. В. А. Петухов, В. Я. Чеховской, X. С. Багдасаров. *ТВТ*, 11, № 5, 1083, 1973.
9. S. Siegel. *Nonparametric statistics for Behavior Sciences*, N. Y., 1956.
10. А. Н. Амагуки, В. Н. Романов. Тез. докл. Всес. школы-семинара «Проблемы метрологического обеспечения СОИИ», М., 1976.