Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Э. Ф. Рапопорт, О. М. Киселев, Упругая пластина в сверхзвуковом потоке газа,
Тр. сем. по краев. задачам, 1979, выпуск 16, 89–93

https://www.mathnet.ru/kukz271

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
19 января 2026 г., 10:48:32

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 16 *Труды семинара по краевым задачам* *1979*

УДК 533.6.013.42

УПРУГАЯ ПЛАСТИНА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

О. М. Киселев, Э. Ф. Рапопорт

Рассматривается плоское потенциальное сверхзвуковое течение идеального совершенного газа, ограниченное твердой стенкой AB, отходящей от нее по касательной упругой пластиной BC и свободной поверхностью CF (рис. 1). Стенка AB такова, что течение вдоль нее является течением Прандтля—Майера. Давление газа p на прямолинейной характеристике BB' равно $p_в$. Пластина отделяет движущийся газ от зоны с постоянным давлением p_0 ($p_0 < p_в$).

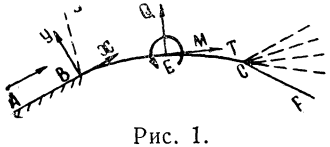

Рис. 1.

Требуется определить форму, которую принимает пластина под действием сил давления, и усилия в ней.

Пусть s — дуговая абсцисса кривой BC, отсчитываемая от точки B ($0 \leqslant s \leqslant L$), θ — угол между касательной к кривой BC и осью x ($\theta = 0$ при $s = 0$), M, T и Q — изгибающий момент, продольная и поперечная силы, действующие на дугу BE в произвольном нормальном сечении E, D — изгибная жесткость пластины.

Предположим, что справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява и что срединная поверхность пластины не подвергается растяжению (сжатию) при деформации. При этом справедливы соотношения [1]:

$$\frac{d^3\theta}{ds^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^3 = \frac{1}{D}(p_0 - p), \tag{1}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2\theta}{ds^2} = 0 \text{ при } s = L, \tag{2}$$

$$M = D\frac{d\theta}{ds}, \quad T = -\frac{1}{2}D\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2, \quad Q = -D\frac{d^2\theta}{ds^2}. \tag{3}$$

Из (1) и (2) следует

$$\dot{\theta} = -\int_1^t dt \int_1^t \left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^3 + \varepsilon(\tau - \tau_0)\right] dt, \tag{4}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \quad \varepsilon = L^3 p_*/D, \quad \tau = p/p_*,$$

$$\tau_0 = p_0/p_*, \quad t = s/L \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

(p_* — критическое давление газа).

Предположим, что дуга BC выпукла в сторону потока и вдоль нее имеет место течение Прандтля — Майера (ниже мы докажем, что такое течение действительно существует). При этом θ и τ связаны соотношениями

$$\theta = f(\tau) = \sigma(\tau_в) - \sigma(\tau),$$

$$\sigma(\tau) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg}(\tau^\alpha - 1)^{1/2} - \operatorname{arctg}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\tau^\alpha - 1)\right]^{1/2},$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = f'(\tau) = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{2\gamma} \frac{(\tau^\alpha - 1)^{1/2}}{\tau\left(\frac{\gamma+1}{2}\tau^\alpha - 1\right)},$$

$$\alpha = \frac{1-\gamma}{\gamma}, \quad \tau_в = \frac{p_в}{p_*} \quad (0 \leqslant \tau_0 < \tau_в \leqslant 1).$$

Здесь γ — показатель адиабаты.

В интервале [0, 1] функция $\sigma(\tau)$ монотонно убывает от значения

$$\sigma(0) = (\sqrt{\gamma+1}/\sqrt{\gamma-1} - 1)\pi/2$$

до нуля, $f'(\tau)$ монотонно убывает от бесконечности до нуля, $f(\tau)$ на интервале $[0, \tau_в]$ монотонно возрастает от значения

$$f(0) = -\theta_0 = \sigma(\tau_в) - \sigma(0) < 0$$

до нуля (рис. 2). Пусть $\tau = F(\theta)$ — функция, обратная функции $\theta = f(\tau)$. Соотношение (4) можно записать в виде

$$\dot{\theta} = -\int_1^t dt \int_1^t \left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^3 + \varepsilon(F(\theta) - \tau_0)\right] dt,$$

$$\theta = \int_0^t \dot{\theta} dt \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{5}$$

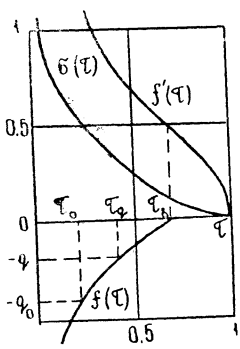

Рис. 2.

Таким образом, задача свелась к определению функции $\dot{\theta}(t)$ из системы уравнений (5), причем в течении Прандтля—Майера должно быть $\dot{\theta} \leqslant 0$, $-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 0$.

Пусть $a = a(t)$ — вещественная функция, определенная на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Введем операторы I, K:

$$Ia = \int_0^t a dt,$$

$$Ka = -\int_0^t dt \int_1^t \left[\frac{1}{2} a^3 + \varepsilon (F(Ia) - \tau_0)\right] dt.$$

С их помощью система (5) приводится к единому операторному уравнению

$$\dot{\theta} = K\dot{\theta}.$$

Будем рассматривать множество $S(q)$ функций $\varkappa = \varkappa(t)$, непрерывных в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ и таких, что $\varkappa \leqslant 0$, $\|\varkappa\| = \max|\varkappa| \leqslant q$. Очевидно, что

$$-q \leqslant I\varkappa \leqslant 0.$$

Пусть

$$q \leqslant q_0 = -f(\tau_0) \quad (0 < q_0 \leqslant \theta_0). \tag{6}$$

Функция $F(\theta)$ определена и непрерывна в интервале $-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 0$, поэтому условие (6) гарантирует непрерывность функции $K\varkappa$.

Пусть τ_q определяется из уравнения

$$f(\tau_q) = -q$$

(см. рис. 2). Очевидно, при $q = 0$ $\tau_q = \tau_в$, при $q = q_0$ $\tau_q = \tau_0$, при $0 \leqslant q \leqslant q_0$ $\tau_0 \leqslant \tau_q \leqslant \tau_в$. Для того, чтобы функция $K\varkappa$ была неположительна, достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{1}{2} q^3 \leqslant \varepsilon (\tau_q - \tau_0). \tag{7}$$

При этом

$$\|K\varkappa\| \leqslant \varepsilon (\tau_в - \tau_0).$$

Оператор K имеет производную Фреше $K'(\varkappa)$:

$$K'(\varkappa)\varkappa_1 = -\int_1^t dt \int_1^t \left[\frac{3}{2}\varkappa^2\varkappa_1 + \varepsilon F'(I\varkappa) I\varkappa_1\right] dt,$$

$$F'(\theta) = 1/f'(\tau) \text{ при } \tau = F(\theta)$$

$$\|K'(\varkappa)\| \leqslant \frac{3}{2} q^3 + \varepsilon [f'(\tau_в)]^{-1}.$$

Потребовав выполнения соотношений $\|Ax\| \leqslant q$, $\|A'(x)\| < 1$, с учетом (6) и (7) получим следующую систему неравенств:

$$q \leqslant q_0, \quad \varepsilon \geqslant L_1(q) = q^3 [2(\tau_q - \tau_0)]^{-1},$$
$$\varepsilon \leqslant L_2(q) = q(\tau_в - \tau_0)^{-1}, \tag{8}$$
$$\varepsilon < L_3(q) = f'(\tau_в)\left(1 - \frac{3}{2} q^2\right).$$

На рис. 3 схематически изображены кривые l_k: $\varepsilon = L_k(q)$ $(k = 1, 2, 3)$. Очевидно, в плоскости ε, q существует область P, в которой все неравенства (8) одновременно имеют место.

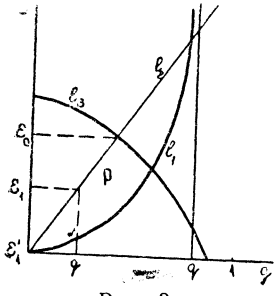

Рис. 3.

Пусть ε_0 — максимальное значение ε на границе области P, q_1 — значение q в точке пересечения прямых $\varepsilon = \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и $\varepsilon = L_2(q)$; $\varepsilon_1' = L_1(q_1)$. На основе принципа сжатых отображений можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. *При $\varepsilon_1' \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ существует единственное решение уравнения $\dot\theta = K\dot\theta$, принадлежащее множеству $S(q_1)$. Решение может быть найдено методом простых итераций по схеме*

$$\dot\theta^{(n)} = K\dot\theta^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

при любом начальном приближении $\dot\theta^{(0)} \in S(q_1)$. Оценка погрешности n-го приближения при этом дается формулами

$$\|\dot\theta - \dot\theta^{(n)}\| \leqslant \frac{\alpha_1^n}{1 - \alpha_1} \|\dot\theta^{(0)} - K\dot\theta^{(0)}\|,$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} q_1^3 + \varepsilon [f'(\tau_в)]^{-1}.$$

Указанное решение соответствует течению Прандтля—Майера.

Форма упругого равновесия пластины определяется по формулам

$$\begin{Bmatrix} x/L \\ y/L \end{Bmatrix} = \int_0^t \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} dt, \quad \theta = I\dot\theta.$$

Из (1) и (3) получаются формулы, характеризующие усилия, возникающие в пластине

$$c_M = \frac{M}{p_* L^2} = \frac{1}{\varepsilon}\dot\theta, \quad c_T = \frac{T}{p_* L} = -\frac{1}{2\varepsilon}\dot\theta^2,$$

$$c_Q = \frac{Q}{p_* L} = \int_1^t \left[\frac{\dot\theta^3}{2\varepsilon} + F(\theta) - \tau_0\right] dt.$$

Легко убедиться, что при $\varepsilon \to 0$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\dot\theta = -\frac{1}{2}\varepsilon(\tau_в - \tau_0)(t-1)^2,$$

$$x/L = t, \quad y/L = -\frac{1}{2}\varepsilon(\tau_в - \tau_0)\left(t - t^2 + \frac{1}{3}t^3\right),$$

$$c_M = -\frac{1}{2}(\tau_в - \tau_0)(t-1)^2, \quad c_Q = (\tau_в - \tau_0)(t-1),$$

$$c_T = -\frac{1}{8}\varepsilon(\tau_в - \tau_0)^2(t-1)^4.$$

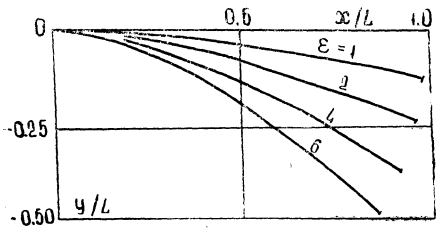

Рис. 4.

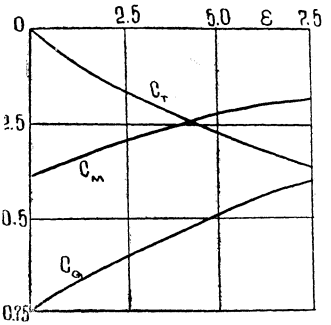

Рис. 5.

Описанный выше метод был применен для расчета обтекания пластины при $\tau_0 = 0$, $\tau_в = 0{,}75 (\gamma = 1{,}4)$. На рис. 4 показана форма упругого равновесия пластины при различных значениях параметра ε. Кривые, представленные на рис. 5, характеризуют зависимость значений коэффициентов c_M, c_T, c_Q в точке закрепления пластины B от параметра ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. О струйном обтекании упругой пластины.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.

Доложено на семинаре 1 февраля 1978 г.