С. А. Айсагалиев, Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траекторий и ограниченным управлением, *Дифференц. уравнения*, 1996, том 32, номер 8, 1011–1017

1996. Т. 32, № 8. С. 1011 — 1017

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ ТРАЕКТОРИЙ И ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

С. А. Айсагалиев

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\, dt \to \inf \tag{1}$$

при условиях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \mu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{2}$$

$$u(t) \in U = \{u(t) \in L_2[t_0, t_1] \,|\, \alpha_i(t) \le u_i(t) \le \beta_i(t), \ i = \overline{1, r}, \ t \in [t_0, t_1]\}, \tag{3}$$

где матрицы $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$, $a_{ij}(t) \in L_\infty[t_0, t_1]$, $i, j = \overline{1, n}$; $B(t) = \|b_{ij}(t)\|$, $b_{ij}(t) \in L_\infty[t_0, t_1]$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, $\mu(t) \in L_1[t_0, t_1]$, $x_0, x_1 \in E^n$ — заданные векторы; $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t))$, $\beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_r(t))$ — заданные непрерывные вектор-функции; t_0, t_1 — фиксированные моменты времени.

Функция $f_0(x, u, t)$, $x \in E^n$, $u \in E^r$, $t \in [t_0, t_1]$, определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u), причем производные $\partial f_0/\partial x$, $\partial f_0/\partial u$ удовлетворяют условиям Липшица.

Задача 1. Найти управление $u(t) \in U$, которое переводит траекторию системы (2) из начального состояния $x_0 = x(t_0) \in E^n$ в желаемое конечное состояние $x_1 = x(t_1) \in E^n$ за заданное время $t_1 - t_0$.

Задача 2. Найти оптимальную пару $(x_*(t), u_*(t))$ для задачи (1) — (3).

Построение множества всех управлений из $L_2[t_0, t_1]$, для которого краевая задача (2) имеет решение, приведено в [1]. Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений предложен в [2]. Решение задачи 1 в случае, когда $u(t) \in L_\infty[t_0, t_1]$ и обладает минимальной нормой, получено в [3] на основе l-проблемы моментов, а случай $u(t) \in L_2[t_0, t_1]$ с минимальной нормой рассмотрен в [4]. Таким образом, в настоящее время конструктивные методы решения задачи 1 отсутствуют, поскольку в [1 — 4] изучен случай, когда $U \equiv L_2[t_0, t_1]$. В настоящей работе предлагается метод решения задачи 1, ориентированный на применение ЭВМ.

В теории экстремальных задач наиболее разработанным является решение задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории. Из-за отсутствия методов решения задачи управляемости с ограничениями на значения управления остается актуальной разработка новых методов решения краевых задач оптимального управления.

Управляемость. Как следует из результатов работы [1], множество всех управлений из $L_2[t_0, t_1]$, каждый элемент которого переводит траекторию системы (2) из $x_0 \in E^n$ в $x_1 \in E^n$, определяется формулой

$$U_1 = \{u(t) \in L_2[t_0, t_1] \,|\, u(t) = \nu(t) + C(t)a + N_1(t)z(t_1, \nu), \ \nu(t) \in L_2[t_0, t_1]\}, \tag{4}$$

где матрица $C(t) = B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)$, $W(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)\,dt$, $a = \Phi(t_0,t_1)x_1 - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)\mu(t)\,dt$, $N_1(t) = -C(t)\Phi(t_0,t_1)$, $\Phi(t,\tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi} = A(t)\xi$, а функция $z(t) = z(t,\nu)$, $t \in [t_0,t_1]$, — решение системы

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)\nu(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in [t_0,t_1], \quad \nu(t) \in L_2[t_0,t_1]. \tag{5}$$

Здесь $\nu(t) \in L_2[t_0,t_1]$ — произвольная функция. Тогда множество всех допустимых управлений для оптимизационной задачи (1) — (3) определяется пересечением $U_1 \cap U = \Gamma$. Итак, множество

$$\Gamma = \{u(t) \in U \mid \alpha(t) \le u(t) = \nu(t) + C(t)a + N_1(t)z(t_1,\nu) \le \beta(t),\ t \in [t_0,t_1]\}. \tag{6}$$

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$J_1(\nu,u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} |\nu(t) + C(t)a + N_1(t)z(t_1,\nu) - u(t)|^2\,dt \to \inf \tag{7}$$

при условиях (5), где управление $u = u(t) \in U$.

Теорема 1. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена, множество $\Gamma \ne \varnothing$. Для того чтобы $x(t_1;t_0,x_0,u^0) = x_1$, $u^0 \in U$, необходимо и достаточно, чтобы значение $J_1(\nu^0,u^0) = 0$, где пара (ν^0,u^0) — оптимальное решение задачи (7), (5), $u \in U$.*

Доказательство. Пусть значение $x(t_1;t_0,x_0,u^0) = x_1$, $u^0 \in U$. Так как множество U_1 содержит все управления, которые переводят траекторию системы (2) из x_0 в x_1, то $u^0 \in U_1$. Следовательно, $u^0 \in \Gamma = U_1 \cap U$. Для любого управления из Γ значение $J_1(\nu^0,u^0) = 0$. Необходимость доказана.

Пусть значение $J_1(\nu^0,u^0) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $u^0(t) = \nu^0(t) + C(t)a + N_1(t)z(t_1,\nu^0)$. Отсюда имеем $u^0(t) \in \Gamma$, $x(t_1;t_0,x_0,u^0) = x_1$. Достаточность доказана.

Теорема 2. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена, множество $\Gamma \ne \varnothing$. Тогда: а) множество Γ совпадает с множеством всех $u^0(t) \in U$, для которых значение $J_1(\nu^0,u^0) = 0$; б) Γ — выпуклое ограниченное замкнутое множество в гильбертовом пространстве $L_2[t_0,t_1]$; в) функционал $J_1(\nu,u)$ при условиях (5), $u \in U$ является выпуклым, непрерывно дифференцируемым и достигает нижней грани, причем его градиент $J_1'(\nu,u) = (J_1'(t), J_2'(t))$,*

$$J_1'(t) = \nu(t) + C(t)a + N_1(t)z(t_1,\nu) - u(t) - B^*(t)\psi(t) \in L_2[t_0,t_1],$$

$$J_2'(t) = u(t) - \nu(t) - C(t)a - N_1(t)z(t_1,\nu) \in L_2[t_0,t_1],$$

для любых $\nu(t) \in L_2[t_0,t_1]$, $u(t) \in U$, где $\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t)$, $\psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} N_1^*(t)[N_1(t)z(t_1,\nu) + \nu(t) + C(t)a - u(t)]\,dt$.

Доказательство. Как следует из теоремы 1, утверждение а) непосредственно вытекает из равносильности условий $u^0(t) \in \Gamma$ и $J_1(\nu^0,u^0) = 0$. Поскольку множество U выпуклое, ограниченное, замкнутое, а множество U_1 выпуклое, то $\Gamma = U \cap U_1$ — выпуклое, ограниченное, замкнутое множество в гильбертовом пространстве $L_2[t_0,t_1]$, т. е. множество Γ слабо бикомпактно. Так как квадратичный функционал $J_1(\nu,u)$ выпуклый и непрерывный, то он слабо полунепрерывен снизу в каждой точке $\nu(t) \in L_2[t_0,t_1]$, $u(t) \in U$. Поскольку множество U является слабо бикомпактным, то функционал $J_1(\nu,u)$ достигает нижней грани. Справедливость последнего утверждения непосредственно следует из результатов работы [1]. Теорема доказана.

Критерий управляемости для системы (2), (3) может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена. Для управляемости системы (2), (3) необходимо и достаточно, чтобы операторное уравнение*

$$L(\nu,u)=\nu(t)+C(t)a-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)\nu(t)\,dt-u(t)\equiv 0,\quad t\in[t_0,t_1],$$

имело решение, где $\nu(t)\in L_2[t_0,t_1]$, $u(t)\in U$.

Справедливость теоремы вытекает из теорем 1, 2. Заметим, что положительная определенность матрицы $W(t_0,t_1)$ является необходимым условием для управляемости системы (2), (3).

Теорема 4. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена, множество $\Gamma\neq\varnothing$. Тогда: а) градиент $J_1'(\nu,u)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J_1'(\nu_1,u_1)-J_1'(\nu_2,u_2)\|\le l\,(\|\nu_1-\nu_2\|+\|u_1-u_2\|)\quad\forall\,\nu_1,\nu_2\in L_2[t_0,t_1],\quad u_1,u_2\in U;$$

б) последовательности $\nu_{n+1}=\nu_n-\alpha_nJ'_{1,n}$, $u_{n+1}=P_U[u_n-\alpha_nJ'_{2,n}]$, $n=0,1,2,\ldots$, являются минимизирующими и слабо сходятся к решению (ν^0,u^0) оптимизационной задачи (5), (7), $u\in U$, где $0<\alpha_n\le 2/(l+2\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

Доказательство теоремы следует из выпуклости и непрерывной дифференцируемости функционала $J_1(\nu,u)$. Таким образом, допустимое управление $u^0(t)\in\Gamma$ для оптимизационной задачи (1) — (3) может быть найдено методом последовательных приближений.

Оптимальное управление. Рассмотрим задачу (1) — (3). Как следует из теорем 1, 2, если $u(t)\in\Gamma$, то решение системы (2) запишется так [1]:

$$x(t)=z(t)+\lambda_2(t)+N_2(t)z(t_1,\nu),\quad t\in[t_0,t_1],\tag{8}$$

где $\lambda_2(t)=\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)x_0+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)x_1+\Phi(t,t_0)\times$ $\times\Big[\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\mu(\tau)\,d\tau-W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)\mu(\tau)\,d\tau\Big]$, $N_2(t)=-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)\times$ $\times W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)$.

Легко убедиться в том, что исходная задача (1) — (3) равносильна следующей задаче: минимизировать функционал

$$J(\nu)=\int_{t_0}^{t_1}F_0(\nu(t),z(t),z(t_1),t)\,dt\to\inf\tag{9}$$

при условиях

$$J_1(\nu,u)=\frac12\int_{t_0}^{t_1}|\nu(t)+C(t)a+N_1(t)z(t_1,\nu)-u(t)|^2\,dt=0,\tag{10}$$

$$\dot z=A(t)z+B(t)\nu(t),\quad z(t_0)=0,\quad t\in[t_0,t_1],\tag{11}$$

$$\nu(t)\in L_2[t_0,t_1],\quad u(t)\in U,\tag{12}$$

где $F_0=f_0(z(t)+\lambda_2(t)+N_2(t)z(t_1,\nu),\,\nu(t)+C(t)a+N_1(t)z(t_1,\nu),\,t)$, функции $u(t),x(t)$ определяются соответственно выражениями (6), (8).

Задача (9) — (12) в отличие от исходной (1) — (3) является задачей оптимального управления со свободным правым концом траекторий и может быть решена известными методами [5] (методом множителей Лагранжа, методом штрафных функционалов и др.).

В последние годы весьма интенсивно разрабатываются теория экстремальных задач в функциональных пространствах и методы их решения. Для минимизации функционалов на множествах из гильбертовых или банаховых пространств часто используются следующие методы: градиентный метод [6 — 8], метод проекции градиента [9 — 11], метод Ньютона [12 — 14], метод штрафных функционалов [15 — 17], метод множителей Лагранжа [18, 19]. Указанные методы отличаются друг от друга построением итерационных процессов для минимизирующих последовательностей и применение каждого метода эффективно для определенных классов задач. По существу в работе разработан новый метод минимизации функционалов, позволяющий расширить возможность применения метода проекции градиента на более широкие классы задач. Заметим, что наличие двух управляющих функций $\nu(t), u(t)$ существенно улучшает сходимость итерационных процессов, построенных для решения задачи (9) — (12), по сравнению с приближенными методами непосредственного решения исходной задачи (1) — (3). Если $(\nu_*(t), z_*(t))$ — решение задачи (9) — (11), то оптимальная пара $(u_*(t), x_*(t))$ для исходной задачи определяется формулами (6), (8) соответственно путем замены ν на ν_*. Ниже предлагается проекционный метод решения задачи (9) — (12) с условным названием "метод кратной проекции градиента".

Введем следующие множества:

$$\Gamma = \{w(t) \in L_2[t_0,t_1] \,|\, \bar\alpha(t) \le w(t) = \nu(t) + N_1(t)z(t_1,\nu) \le \bar\beta(t),\ t\in[t_0,t_1]\},$$

$$\Pi = \{w(t) \in L_2[t_0,t_1] \,|\, w(t) = \nu(t) - C(t)c_\nu,\ \nu(t)\in L_2[t_0,t_1]\},$$

$$V = \{v(t) \in L_2[t_0,t_1] \,|\, \bar\alpha(t) \le v(t) \le \bar\beta(t),\ t\in[t_0,t_1]\},$$

где $c_\nu = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)\nu(t)\,dt$, $N_1(t)z(t_1,\nu) = -C(t)c_\nu$, $\bar\alpha(t) = \alpha(t) - C(t)a$, $\bar\beta(t) = \beta(t) - C(t)a$. Отметим, что если $w(t)\in\Gamma$, то $J_1(\nu,u) = 0$, где $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, определяется формулой (6), $\Pi\cap V = \Gamma$.

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\bar J(\nu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(\nu(t), z(t), z(t_1), t)\,dt \to \inf, \tag{13}$$

$$\dot z = A(t)z + B(t)\nu, \quad z(t_0) = 0, \quad \nu(t)\in L_2[t_0,t_1]. \tag{14}$$

Теорема 5. *Пусть функция $F_0(\nu,z,\bar z,t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов вместе с частными производными по переменным $(\nu,z,\bar z)\in E^r\times E^n\times E^n$, функции $\partial F_0/\partial z$, $\partial F_0/\partial\nu$, $\partial F_0/\partial\bar z$ удовлетворяют условию Липшица. Тогда функционал (13) при условиях (14) дифференцируем в $L_2[t_0,t_1]$ и его градиент $\bar J'(\nu_0)$ в точке $\nu_0\in L_2[t_0,t_1]$ вычисляется по формуле*

$$\bar J'(\nu_0) = \partial F_0(\nu_0, z(t,\nu_0), z(t_1,\nu_0), t)/\partial\nu - B^*(t)\psi(t,\nu_0) \in L_2[t_0,t_1], \tag{15}$$

где функция $z(t,\nu_0) = z_0(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, — решение системы (14) при $\nu=\nu_0$, а функция $\psi(t,\nu_0) = \psi_0(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, — решение сопряженной системы

$$\dot\psi_0(t) = \partial F_0(\nu_0, z_0(t), z_0(t_1), t)/\partial z - A^*(t)\psi_0(t), \tag{16}$$

$$\psi_0(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(\nu_0, z_0(t), z_0(t_1), t)}{\partial z(t_1)}\,dt. \tag{17}$$

Кроме того, градиент $\bar J'(\nu_0)\in L_2[t_0,t_1]$ удовлетворяет условию Липшица на $L_2[t_0,t_1]$, т. е. $\|\bar J'(\nu_1) - \bar J'(\nu_2)\| \le l_1\|\nu_1-\nu_2\|$ $\forall \nu_1,\nu_2\in L_2[t_0,t_1]$, $l_1 = \mathrm{const} > 0$.

Теорема может быть доказана по известной схеме вычисления производной Фреше функционала [1]. Отметим, что если $\nu_0(t)\in\Gamma$, то $\bar J(\nu_0) = J(\nu_0)$, $\bar J'(\nu_0) = J'(\nu_0)$.

Лемма 1. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда любой элемент $C(t)c\in L_2[t_0,t_1]$, где $c\in E^n$ — произвольный вектор, ортогонален к множеству Π.*

Доказательство. В самом деле, скалярное произведение $\langle C(t)c, w\rangle = \langle C(t)c, \nu - C(t)c_\nu\rangle = c^*W^{-1}(t_0,t_1)c_\nu - c^*W^{-1}(t_0,t_1)c_\nu = 0$ для любого $w(t)\in\Pi$. Следовательно, $C(t)c\perp\Pi$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда любой элемент $\bar\nu(t)\in L_2[t_0,t_1]$ имеет единственную проекцию на множестве Π, причем $\bar w(t) = P_\Pi[\bar\nu] = \bar\nu - C(t)c_{\bar\nu}\in\Pi$.*

Доказательство. Действительно, для того чтобы точка $\bar w\in\Pi$ была проекцией точки $\bar\nu(t)\in L_2[t_0,t_1]$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle\bar w - \bar\nu, w - \bar w\rangle \ge 0$ $\forall w, w\in\Pi$. Отсюда при $\bar{w}(t) = \bar{\nu}(t) - C(t)c_{\bar{\nu}}$ получим $\langle \bar{w} - \bar{\nu}, w - \bar{w}\rangle = \langle -C(t)c_{\bar{\nu}}, \nu - C(t)c_\nu - \bar{\nu} + C(t)c_{\bar{\nu}}\rangle = -c_{\bar{\nu}}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_\nu + c_{\bar{\nu}}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_\nu + c_{\bar{\nu}}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{\bar{\nu}} - c_{\bar{\nu}}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{\bar{\nu}} = 0$. Лемма доказана.

Следствие. $P_\Pi[\bar{\nu} + C(t)c] = \bar{w}(t) = \bar{\nu}(t) - C(t)c_{\bar{\nu}} \in \Pi$.

Лемма 3. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда множество Γ выпукло.*

Доказательство. Пусть множество $\Gamma \neq \varnothing$, $w_1, w_2 \in \Gamma$, число $\alpha \in [0,1]$. Из включения $w_1 \in \Gamma$ следует, что существует функция $\nu_1(t) \in L_2[t_0,t_1]$ такая, что $\bar{\alpha}(t) \le w_1(t) = \nu_1(t) - C(t)c_{\nu_1} \le \bar{\beta}(t)$. Аналогично $\bar{\alpha}(t) \le w_2(t) = \nu_2(t) - C(t)c_{\nu_2} \le \bar{\beta}(t)$, $t \in [t_0,t_1]$. Тогда $w_\alpha(t) = \alpha w_1(t) + (1-\alpha)w_2(t) = \alpha\nu_1(t) + (1-\alpha)\nu_2(t) - C(t)[\alpha c_{\nu_1} + (1-\alpha)c_{\nu_2}] = \nu - C(t)c_\nu$, где $\nu = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$, $\bar{\alpha}(t) \le w_\alpha(t) \le \bar{\beta}(t)$, $t \in [t_0,t_1]$. Отсюда следует, что $w_\alpha(t) \in \Gamma$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда $\|\bar{\nu} - C(t)c_{\bar{\nu}}\|^2 = \|\bar{\nu}\|^2 - c_{\bar{\nu}}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{\bar{\nu}}$ $\forall\, \bar{\nu}$, $\bar{\nu} \in L_2[t_0,t_1]$.*

Доказательство. В самом деле, квадрат нормы $\|\bar{\nu} - C(t)c_{\bar{\nu}}\|^2 = \langle \bar{\nu} - C(t)c_{\bar{\nu}}, \bar{\nu} - C(t)c_{\bar{\nu}}\rangle = \|\bar{\nu}\|^2 - 2c_{\bar{\nu}}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{\bar{\nu}} + c_{\bar{\nu}}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{\bar{\nu}} = \|\bar{\nu}\|^2 - c_{\bar{\nu}}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{\bar{\nu}} \ge 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда если $\bar{\nu}_1(t) \in L_2[t_0,t_1]$, $\bar{\nu}_2(t) \in L_2[t_0,t_1]$, то $\|\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2\|^2 = \|w_1 - w_2\|^2 + c_{\bar{\nu}_1-\bar{\nu}_2}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{\bar{\nu}_1-\bar{\nu}_2}$, где $w_1 = P_\Pi[\bar{\nu}_1]$, $w_2 = P_\Pi[\bar{\nu}_2]$.*

Доказательство. Поскольку $w_1 = \bar{\nu}_1 - C(t)c_{\bar{\nu}_1}$, $w_2 = \bar{\nu}_2 - C(t)c_{\bar{\nu}_2}$, то разность $\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2 = w_1 - w_2 + C(t)c_{\bar{\nu}_1-\bar{\nu}_2}$. Тогда квадрат нормы $\|\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_2\|^2 = \|w_1 - w_2\|^2 + c_{\bar{\nu}_1-\bar{\nu}_2}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{\bar{\nu}_1-\bar{\nu}_2}$ в силу ортогональности $(w_1 - w_2) \perp C(t)c_{\bar{\nu}_1-\bar{\nu}_2}$. Лемма доказана.

Алгоритм предлагаемого метода кратной проекции градиента заключается в следующем.

1. Определяем начальное допустимое управление $w_0 \in \Gamma$ путем решения задачи управляемости (5) — (7) на основе теорем 1 — 4.

2. Определяем градиент функционала $\bar{J}'(w_0) = J'(w_0)$ по формуле (15) при условиях (16), (17) и определим промежуточную точку $\bar{w}_1 = w_0 - \beta_0 J'(w_0)$, $\beta_0 \ge 0$, в общем случае точка $\bar{w}_1 \notin \Pi$.

3. Находим проекцию точки $\bar{w}_1$ на множестве Π, т. е. (см. лемму 2)

$$w_1(t) = P_\Pi[\bar{w}_1] = \bar{w}_1 - C(t)c_{\bar{w}_1} = w_0 - \beta_0[J'(w_0) - C(t)c_{J'}] \in \Pi, \tag{18}$$

где $c_{J'} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)J'(w_0)\,dt$. Заметим, что если $J'(w_0) = 0$ либо $J'(w_0) = C(t)c_{J'}$, то $w_1(t) = w_0(t) \in \Gamma$ и процесс построения последовательностей $\{w_n\}$ прекращается. В случае $J'(w_0) = 0$ выполнено необходимое условие оптимальности. В дальнейшем полагаем, что $J'(w_0) \not\equiv 0$, $J'(w_0) \neq C(t)c_{J'}$. Как следует из леммы 4, квадрат нормы $\|J'(w_0) - C(t)c_{J'}\|^2 = \|J'(w_0)\|^2 - c_{J'}^* W^{-1}(t_0,t_1)c_{J'} > 0$, $J'(w_0) \neq C(t)c_{J'}$. Покажем, что $\bar{J}(w_1) < J(w_0) = \bar{J}(w_0)$ при $\beta_0 < 2/l_1$, где $l_1 > 0$ — постоянная Липшица (см. теорему 5). Действительно, поскольку функционал $\bar{J}(\nu) \in C^{1,1}(L_2[t_0,t_1])$, то верно неравенство [5] $\bar{J}(w_0) - \bar{J}(w_1) \ge \langle J'(w_0), w_0 - w_1\rangle - (l_1/2)\|w_0 - w_1\|^2$. Отсюда с учетом выражения (18) получим $\bar{J}(w_0) - \bar{J}(w_1) \ge \beta_0(1 - (l_1/2)\beta_0)\|J'(w_0) - C(t)c_{J'}\|^2 > 0$, $\beta_0 < 2/l_1$. Следовательно, значение $\bar{J}(w_1) < \bar{J}(w_0) = J(w_0)$.

4. Вычисляем проекцию точки w_1 на множестве V, т. е. $v_1(t) = P_V[w_1]$. Отметим, что

$$v_1^i(t) = \begin{cases} \bar{\alpha}_i(t), & \text{если} \quad w_1^i(t) < \bar{\alpha}_i(t), \\ w_1^i(t), & \text{если} \quad \bar{\alpha}_i(t) \le w_1^i(t) \le \bar{\beta}_i(t), \\ \bar{\beta}_i(t), & \text{если} \quad w_1^i(t) > \bar{\beta}_i(t), \quad i = \overline{1,r}, \end{cases}$$

где $v_1(t) = (v_1^1(t), \dots, v_1^r(t))$, $\bar{\alpha}(t) = (\bar{\alpha}_1(t), \dots, \bar{\alpha}_r(t))$, $\bar{\beta}(t) = (\bar{\beta}_1(t), \dots, \bar{\beta}_r(t))$.

5. Далее строим последовательности $\{v_n(t)\} \subset V$, $\{w_n(t)\} \subset \Pi$ по правилам

$$v_n(t) = P_V[w_n], \quad w_{n+1}(t) = P_\Pi[v_n], \quad n = 1, 2, \dots \tag{19}$$

Как следует из формулы (19), точка $w_2(t) = P_\Pi[v_1] = v_1 - C(t)c_{v_1} \in \Pi$ в силу леммы 2. Справедлива

Лемма 6. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно определена, множество $W_2 = \{w(t) \in \Pi \mid w(t) = \gamma w_0(t) + (1-\gamma)w_2(t),\ 0 \le \gamma \le 1\}$. Тогда точка $w_2(t)$ является проекцией точки $\bar{w}_1(t)$ на множестве W_2, т. е. $w_2 = P_{W_2}[\bar{w}_1]$.*

Доказательство. Так как точка $v_1 = P_V[w_1]$, то $\langle v_1 - w_1, w_0 - v_1\rangle \geq 0$, $w_0 \in V$. Отсюда имеем $\langle w_0 - w_1, w_0 - v_1\rangle \geq \|w_0 - v_1\|^2$. В силу ортогональности $(v_1 - w_2) \perp \Pi$ скалярное произведение $\langle v_1 - w_2, w_2 - w_0\rangle = 0$, $w_2 - w_0 \in \Pi$. Тогда $\langle w_0 - w_2, w_0 - v_1\rangle = \langle w_0 - w_2, w_0 - w_2 + w_2 - v_1\rangle = \|w_0 - w_2\|^2$. Следовательно,

$$\langle w_2 - w_1, w_0 - v_1\rangle \geq \|w_0 - v_1\|^2 - \|w_0 - w_2\|^2 \geq 0, \tag{20}$$

так как $\|w_0 - v_1\| \geq \|w_0 - w_2\|$. Скалярное произведение

$$\langle w_2 - w_1, w_0 - w_2\rangle = \langle w_2 - w_1, w_0 - v_1 + v_1 - w_2\rangle = \langle w_2 - w_1, w_0 - v_1\rangle \geq 0 \tag{21}$$

в силу отношения (20) и ортогональности $(w_2 - w_1) \perp (v_1 - w_2)$. Тогда

$$\langle w_2 - \bar{w}_1, w_0 - w_2\rangle = \langle w_2 - w_1 + w_1 - \bar{w}_1, w_0 - w_2\rangle = \langle w_2 - w_1, w_0 - w_2\rangle \geq 0, \tag{22}$$

поскольку $(w_0 - w_2) \perp (w_1 - \bar{w}_1)$. Это означает, что $w_2 = P_{W_2}[\bar{w}_1]$. Лемма доказана.

Следствие. *Точка $w_2 \in \Pi$ является проекцией точки $w_1 \in \Pi$ на множестве W_2, т. е. $w_2 = P_{W_2}[w_1]$.*

Справедливость следствия вытекает непосредственно из соотношения (21).

Теорема 6. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена, число $\beta_0 < 2/l_1$. Тогда значение $\bar{J}(w_2) < J(w_0) = \bar{J}(w_0)$.*

Доказательство. Поскольку функционал $\bar{J}(\nu) \in C^{1,1}(W_2)$, множество W_2 выпукло, то верно неравенство $\bar{J}(w_0) - \bar{J}(w_2) \geq \langle J'(w_0), w_0 - w_2\rangle - (l_1/2)\|w_0 - w_2\|^2$.

Из неравенства (22) получим $\langle w_2 - w_0 + \beta_0 J'(w_0), w_0 - w_2\rangle \geq 0$, откуда имеем $\langle J'(w_0), w_0 - w_2\rangle \geq (1/\beta_0)\|w_0 - w_2\|^2$. Тогда $\bar{J}(w_0) - \bar{J}(w_2) \geq (1/\beta_0 - l_1/2)\|w_0 - w_2\|^2 > 0$. Следовательно, значение $\bar{J}(w_2) < \bar{J}(w_0) = J(w_0)$. Теорема доказана.

Введем множество

$$W_{n+1} = \{w(t) \in \Pi \mid w(t) = \gamma w_0(t) + (1 - \gamma) w_{n+1}(t),\ 0 \leq \gamma \leq 1\}.$$

Лемма 7. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда точка $w_{n+1}(t)$ является проекцией точки $w_n(t)$ на множестве W_{n+1}, т. е. $w_{n+1}(t) = P_{W_{n+1}}[w_n]$.*

Доказательство. Из $v_n(t) = P_V[w_n]$ имеем $\langle v_n - w_n, w_0 - v_n\rangle \geq 0$. Отсюда следует, что $\langle w_0 - w_n, w_0 - v_n\rangle \geq \|w_0 - v_n\|^2$. Поскольку $(v_n - w_{n+1}) \perp \Pi$, то $\langle v_n - w_{n+1}, w_{n+1} - w_0\rangle = 0$. Тогда $\langle w_0 - w_{n+1}, w_0 - v_n\rangle = \|w_0 - w_{n+1}\|^2$. Из полученных соотношений имеем, что $\langle w_{n+1} - w_n, w_0 - w_{n+1}\rangle \geq \|w_0 - v_n\|^2 - \|w_0 - w_{n+1}\|^2 \geq 0$ в силу того, что $w_{n+1} = P_\Pi[v_n]$, $w_0 \in \Pi$. Это означает, что $w_{n+1} = P_{W_{n+1}}[w_n]$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена, число $\beta_0 < 2/l_1$, производная $J'(w_0) \neq 0$ либо $J'(w_0) \neq C(t)c_{J'}$. Пусть последовательности $\{v_n(t)\} \subset V$, $\{w_n(t)\} \subset \Pi$ определяются формулой (19). Тогда*

1) в любой точке $w_{2,\gamma}(t) = \gamma w_0(t) + (1 - \gamma) w_2(t) \in W_2$, $\gamma \in [0, 1]$, значение функционала $\bar{J}(w_{2,\gamma}) < J(w_0)$;

2) если

$$\langle w_2 - w_1, w_2 - w_3\rangle + \|v_1 - w_2\|^2 + \|v_2 - w_3\|^2 \geq 0, \tag{23}$$

то в любой точке $w_{3,\gamma} = \gamma w_0(t) + (1 - \gamma) w_3(t) \in W_3$ значение $\bar{J}(w_{3,\gamma}) < J(w_0)$;

3) если точка $w_n(t) = P_{W_n}[\bar{w}_1]$, то в любой точке $w_{n,\gamma} \in W_n$ значение $\bar{J}(w_{n,\gamma}) < J(w_0)$.

Доказательство. Как следует из леммы 6 и ее следствия, $w_2(t) = P_{W_2}[\bar{w}_1]$ и $w_2(t) = P_{W_2}[w_1]$. Следовательно, верны неравенства (21), (22).

Покажем, что $w_{2,\gamma}(t) = w_2(t) + \gamma[w_0(t) - w_2(t)] = P_{W_{2,\gamma}}[\bar{w}_1]$, где $W_{2,\gamma} = \{w_{2,\alpha}(t) = w_2(t) + \alpha[w_0(t) - w_2(t)],\ \alpha \in [\gamma, 1]\}$, γ — фиксированное число, $0 \leq \gamma \leq 1$. Действительно, скалярное произведение $\langle w_{2,\gamma} - \bar{w}_1, w_0 - w_{2,\gamma}\rangle = \langle w_{2,\gamma} - w_1 + w_1 - \bar{w}_1, w_0 - w_{2,\gamma}\rangle = \langle w_{2,\gamma} - w_1, w_0 - w_{2,\gamma}\rangle$ в силу ортогональности $(w_1 - \bar{w}_1) \perp (w_0 - w_{2,\gamma})$. Отсюда, подставляя значение $w_{2,\gamma}$, получим $\langle w_{2,\gamma} - \bar{w}_1, w_0 - w_{2,\gamma}\rangle = (1-\gamma)\langle w_2 - w_1, w_0 - w_2\rangle + \gamma(1-\gamma)\|w_0 - w_2\|^2 \geq 0$, поскольку $\langle w_2 - w_1, w_0 - w_2\rangle \geq 0$. Следовательно, $w_{2,\gamma} = P_{W_{2,\gamma}}[\bar{w}_1]$. Так как функционал $\bar{J}(\nu) \in C^{1,1}[W_{2,\gamma}]$, $W_{2,\gamma}$ — выпуклое множество, то, применяя теорему 6, получим $\bar{J}(w_{2,\gamma}) < J(w_0)$. Таким образом, для случая двухкратного проектирования $(n = 1)$ теорема доказана.

Рассмотрим случай трехкратного проектирования $(n = 2)$. Из лемм 6, 7 имеем $w_2 = P_{W_2}[w_1] : \langle w_2 - w_1, w_0 - w_2\rangle = \langle w_2 - w_1, w_0 - v_1\rangle \geq \|v_1 - w_2\|^2$, $w_3 = P_{W_3}[w_2] : \langle w_3 - w_2, w_0 - w_3\rangle = \langle w_3 - w_2, w_0 - v_2\rangle \geq \|v_2 - w_3\|^2$. Отсюда с учетом того, что $\langle w_2 - w_1, w_0 - v_1\rangle = \langle w_2 - w_1, w_0 -$

$-w_3\rangle + \langle w_2 - w_1, w_3 - v_1\rangle$, получим $\langle w_3 - w_1, w_0 - w_3\rangle \geq \|v_1 - w_2\|^2 + \|v_2 - w_3\|^2 + \langle w_2 - w_1, w_2 - w_3\rangle$, где $\langle w_2 - w_1, w_2 - v_1\rangle = 0$. Тогда, согласно неравенству (23), имеем $\langle w_3 - w_1, w_0 - w_3\rangle = \langle w_3 - \bar{w}_1, w_0 - w_3\rangle \geq 0$. Следовательно, точка $w_3(t) = P_{W_3}[\bar{w}_1]$. Далее, поскольку $\bar{J}(\nu) \in C^{1,1}[W_3]$, W_3 — выпуклое множество, то, как и в теореме 6, можно доказать, что $\bar{J}(w_{3,\gamma}) < J(w_0)$.

Наконец, в случае n-кратного проектирования, когда $w_n(t) = P_{W_n}[\bar{w}_1]$, применяя теорему 6, получим $\bar{J}(w_{n,\gamma}) < J(w_0)$. Теорема доказана.

6. Оптимизационная задача (13), (14) отличается от задачи (9) — (12) отсутствием ограничения (10) и $u(t) \in U$, которые равносильны тому, что $w(t) \in \Gamma$. Поэтому необходимое условие оптимальности в точке $w_0 \in \Gamma$ для задачи (9) — (12) запишется так: $\langle \bar{J}'(w_0), w - w_0\rangle = \langle J'(w_0), w - w_0\rangle \geq 0 \ \ \forall w$, $w \in \Gamma$. Если $J'(w_0) = C(t)c_{J'}$, то в силу ортогональности $C(t)c_{J'} \perp \Pi$, $w - w_0 \in \Pi \ \ \forall w \in \Gamma$ скалярное произведение $\langle J'(w_0), w - w_0\rangle = 0 \ \ \forall w \in \Gamma$. Таким образом, в случае $J'(w_0) = C(t)c_{J'}$ в точке $w_0(t) \in \Gamma$ выполнено необходимое условие оптимальности.

7. Как следует из теоремы 7, в случае двухкратного проектирования значение $\bar{J}(w_{2,\gamma}) < J(w_0)$, где $w_{2,\gamma}$ — граничная точка множества $W_{2,\gamma}$. Заметим, что существует число $\gamma \in [0,1]$ такое, что множество $W_{2,\gamma} \subset \Gamma$, следовательно, $w_{2,\gamma} \in \Gamma$, т. е. $J_1(w_{2,\gamma}, u_{2,\gamma}) = 0$, $\bar{J}(w_{2,\gamma}) = J(w_{2,\gamma}) < J(w_0)$. Далее повторяются пп. 1 — 7 с начальной точкой $w_{2,\gamma} \in \Gamma$.

Отметим, что в случае $\|v_k - w_k\| \neq 0$, $\|v_k - w_{k+1}\| \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, верны неравенства $\|w_0 - \bar{w}_1\| > \|w_0 - w_1\| > \|w_0 - v_1\| > \|w_0 - w_2\| > \|w_0 - w_3\| > \cdots > \|w_0 - w_k\| > \cdots$ Следовательно, существует номер N такой, что $w_N \in \Gamma$. Если окажется, что $w_N = P_{W_N}[\bar{w}_1]$, то $J(w_N) < J(w_0)$. Необходимо повторить пп. 1 — 7 с начальной точкой $w_N(t) \in \Gamma$.

Заключение. Построение множества всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из начального состояния в заданное конечное состояние системы, позволило разделить исходную краевую задачу оптимального управления на самостоятельные задачи: управляемости и оптимального управления линейными системами со свободным правым концом.

В результате исследования предложен численный метод решения задачи управляемости путем построения минимизирующей последовательности и получены необходимые и достаточные условия управляемости в случае ограниченных управлений, разработан новый численный метод решения экстремальных задач — метод кратной проекции градиента для решения краевых задач оптимального управления.

Литература

1. *Айсагалиев С. А.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1475 — 1486.
2. *Айсагалиев С. А., Айсагалиева С. С.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 4. С. 555 — 576.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., 1968.
4. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М., 1975.
5. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
6. *Альбер Я. И.* Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 3. С. 752 — 757.
7. *Брайсон А., ХоЮ-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М., 1972.
8. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972.
9. *Демьянов Ф. В., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Л., 1968.
10. *Кирин Н. Е.* Вычислительные методы теории оптимального управления. Л., 1968.
11. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 5. С. 787 — 823.
12. *Альбер Я. И.* // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 11. С. 1931 — 1945.
13. *Данилин Ю. М.* // Кибернетика. 1970. № 3. С. 110 — 117.
14. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
15. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
16. *Поляк Б. Т.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 1. С. 3 — 11.
17. *Трухаев Р. И., Хоменюк В. В.* Теория неклассических вариационных задач. Л., 1971.
18. *Ермолаев Ю. М., Гуленко В. П.* // Кибернетика. 1966. № 1. С. 72 — 78.
19. *Иванилов Ю. П., Пропой А. И.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1972. Т. 12, № 5. С. 571 — 581.

Казахский Национальный государственный университет им. Аль-Фараби

Поступила в редакцию 30 января 1995 г.