5. Т р у н о в Н.В. К теории нормальных весов на алгебрах Неймана.– Изв. вузов. Матем., 1982, № 8, с.61 – 70.

6. Connes A. Sur le theorem de Radon – Nikodym pour les poids normaux fideles semifines.– Bull. Sc. math., 1973, t. 93, p. 253 – 258.

7. Connes A. On the spacial theory of von Neumann algebras. – J. Funct. Anal., 1980, v. 35, N 2, p. 153 – 164.

8. Haagerup U. Normal weights on W^*-algebras. – J. Funct. Anal., 1975, v. 19, N 3, p. 302 – 317.

9. Haagerup U. Operator – valued weights in von Neumann algebras, I. – J. Funct. Anal., 1979, v. 32, N 2, p. 175 – 206.

10. Pedersen G.K., Takesaki M. The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras. – Acta math., v. 130, N 1-2, p. 53 – 87.

Н.В.Трунов, А.Н.Шерстнев

ОБ УСЛОВНЫХ ОЖИДАНИЯХ В АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА

Заметка непосредственно примыкает к работам авторов [2 и 3]. В ней продолжается исследование одного обобщения понятия условного ожидания в алгербах Неймана, введенного в этих работах в связи с теорией некоммутативного пространства L_1.

§ 1. Мы начнем со случая состояния. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра Неймана в гильбертовом пространстве H, φ – точное нормальное состояние на $\mathcal{M}$. В терминологии и обозначениях, касающихся теории пространства $L_1(\varphi)$ интегрируемых билинейных форм (б.ф.) на линеале состояния

$$D_\varphi = \{ f \in H \mid \exists \lambda > 0 : (xf, f) \leq \lambda \varphi(x),\ \forall x \in \mathcal{M}^+ \},$$

мы будем придерживаться работ [2 и 3]. В частности, условимся не различать оператор $x \in \mathcal{M}$ и порожденную им интегрируемую б.ф. $(x(\cdot),(\cdot))$ на $\mathcal{D}_\varphi$. Пусть $\mathcal{N}$ - подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$, $\varphi_0 = \varphi \upharpoonright \mathcal{N}$ - ограничение φ на $\mathcal{N}$, $\gamma : L_1(\varphi) \to \mathcal{M}_*$ и $\gamma_0 : L_1(\varphi_0) \to \mathcal{N}_*$ - канонические изоморфизмы.

Напомним следующий результат (см. [2], предложение 6), являющийся простым следствием теории пространства $L_1(\varphi)$. При данных предположениях существует и однозначно определено условием

$$\gamma(a)(x) = \gamma_0(Ea)(x) \qquad (x \in \mathcal{N},\ a \in L_1(\varphi)) \tag{1}$$

отображение $E : L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$, обладающее следующими свойствами:

E1. E - линейная сюрьекция,

E2. E - положительно и точно,

E3. $\|E\| = 1$,

E4. $\varphi_0(Ea) = \varphi(a) \quad (a \in L_1(\varphi))$,

E5. Если $a_n \uparrow a$ в $L_1^+(\varphi)$, то $Ea_n \uparrow Ea$, где символ $a_n \uparrow a$ означает, что последовательность a_n не убывает и $\sup\limits_n a_n = a \in L_1^+(\varphi)$ в смысле порядка, задаваемого конусом $L_1^+(\varphi)$.

Основной результат работы [2] (теорема 11) утверждает, что дополнительное требование

$$Ex = x \qquad (x \in \mathcal{N}) \tag{2}$$

(аналог идемпотентности E) эквивалентно существованию обычного (ограниченного) условного ожидания $\mathcal{E} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ относительно φ в смысле [1 и 6], причем ограничение E на $\mathcal{M}$ совпадает с $\mathcal{E}$.

С целью обобщения понятия условного ожидания в алгебрах Неймана займемся изучением ограничения $\mathcal{E} = E \upharpoonright \mathcal{M}$ отображения E, определенного условием (1), на алгебру $\mathcal{M}$. Отметим, что в классической (коммутативной) теории вероятностей условное ожидание в L_∞ вводится, как правило, именно таким способом.

Т е о р е м а 1. Отображение $\mathcal{E} = E/\mathcal{M}$ действует из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ и обладает следующими свойствами:

$\mathcal{E}1$. $\mathcal{E}$ – линейное отображение, $\mathcal{E}(1) = 1$,

$\mathcal{E}2$. $\mathcal{E}$ – положительно и точно,

$\mathcal{E}3$. $\|\mathcal{E}\| = 1$, т.е. $\|\mathcal{E}x\| \le \|x\|$ $(x \in \mathcal{M})$,

$\mathcal{E}4$. $\varphi_0(\mathcal{E}x) = \varphi(x)$ $(x \in \mathcal{M})$,

$\mathcal{E}5$. $\mathcal{E}$ – ультраслабонепрерывно,

$\mathcal{E}6$. $\gamma(\mathcal{E}x)(y) = \gamma(x)(\mathcal{E}y)$ $(x, y \in \mathcal{M})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для проверки включения $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$ достаточно установить, что $\mathcal{E}x \in \mathcal{N}$ для каждого $x \in \mathcal{M}^э$. С этой целью определим вещественный линейный функционал ω на плотном в $\mathcal{N}_*^э$ линеале $\gamma_0(\mathcal{N}^э)$, полагая $\omega(\gamma_0(y)) = \gamma_0(\mathcal{E}x)(y)$ $(y \in \mathcal{N}^э)$. Тогда

$$|\omega(\gamma_0(y))| = |\gamma_0(\mathcal{E}x)(y)| = |\gamma(x)(y)| = |\gamma(y)(x)| \le$$

$$\le \|\gamma(y)\| \cdot \|x\| = \|y\|_\varphi \cdot \|x\| \le \|y\|_{\varphi_0} \cdot \|x\| = \|\gamma_0(y)\| \cdot \|x\| .$$

В этой выкладке мы воспользовались тем, что

$$\|\gamma(z)\| = \|z\|_\varphi \equiv \inf\{\varphi(z_1 + z_2) \mid z = z_1 - z_2,\ z_1, z_2 \in \mathcal{M}^+\} \quad (z \in \mathcal{M})$$

(см. [2]). В таком случае найдется $x_0 \in \mathcal{N}^э$ такой, что $\omega(\gamma_0(y)) = \gamma_0(y)(x_0)$ для всех $y \in \mathcal{N}^э$. Сравнивая с (1), имеем $\mathcal{E}x = x_0 \in \mathcal{N}^э$.

Пусть далее $(\pi, \mathcal{H})$ – представление $\mathcal{M}$, ассоциированное с φ, $\hat{\ }) : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ – тождественное вложение $\mathcal{M}$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}$, являющееся пополнением $\hat{\mathcal{M}}$ относительно скалярного произведения $(\hat{x}, \hat{y}) = \varphi(y^* x)$, J -каноническая инволюция теории Томита-Такесаки в $\mathcal{H}$ (напомним, что $J\pi(\mathcal{M}) = \pi(\mathcal{M})'$). Условимся нулевым индексом отмечать соответствующие объекты, связанные с $\mathcal{N}$ и φ_0: π_0, $\mathcal{H}_0$, J_0 и т.д. Пусть P – ортогональный проектор $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}_0 = \overline{\hat{\mathcal{N}}}$. Следующая выкладка справедлива для каждых $x \in \mathcal{M}$, $y, z \in \mathcal{N}$ в силу определения γ [2, 3]:

$$(J\pi(x)^* J \hat{z}, \hat{y}) = \gamma(x)(y^* z) =$$

$$= \gamma_0(\mathcal{E}x)(y^* z) = (J_0 \pi_0(\mathcal{E}x)^* J_0 \hat{z}, \hat{y}) .$$

Отсюда следует, что ограничение на $\mathcal{Y}_0$

$$(\rho\mathcal{J}\pi(x)\mathcal{J})\restriction\mathcal{Y}_0 = \mathcal{J}_0\pi_0(\mathcal{E}x)\mathcal{J}_0 ,$$

так что явное выражение $\mathcal{E}$ задается формулой

$$\mathcal{E}x = \pi_0^{-1}(\mathcal{J}_0(\rho\mathcal{J}\pi(x)\mathcal{J}\restriction\mathcal{Y}_0)\mathcal{J}_0) \qquad (x\in\mathcal{M}) . \tag{3}$$

Свойства $\mathcal{E}1$, $\mathcal{E}2$, $\mathcal{E}4$ непосредственно следуют из E1, E2 и E4 соответственно, с учетом того, что $\gamma(1)=\varphi$, $\gamma_0(1)=\varphi_0$; $\mathcal{E}3$ есть прямое следствие представления (3); $\mathcal{E}6$ следует из симметричности формы $\gamma(\cdot)(\cdot)$ на $\mathcal{M}$. Для проверки $\mathcal{E}5$ покажем сначала, что $\mathcal{E}$ нормально, т.е. из $x_i\uparrow x$ $(x_i,x\in\mathcal{M}^+)$ следует, что $\mathcal{E}x_i\uparrow\mathcal{E}x$. Действительно, в силу положительности $\mathcal{E}$ сеть $\mathcal{E}x_i$ возрастает и ограничена сверху оператором $\mathcal{E}x\in\mathcal{N}^+$. Полагая $x_0=\sup\mathcal{E}x_i$, имеем

$$\gamma(x)(y)=\gamma(y)(x)=\sup_i\gamma(y)(x_i)=\sup_i\gamma_0(\mathcal{E}x_i)(y)=$$

$$=\sup_i\gamma_0(y)(\mathcal{E}x_i)=\gamma_0(y)(x_0)=\gamma_0(x_0)(y) \qquad (y\in\mathcal{N}^+),$$

откуда $x_0=\mathcal{E}x$. Заметим теперь, что в силу нормальности $\mathcal{E}$ для каждого $\rho\in\mathcal{M}_*^+$ функционал $\rho(\mathcal{E}\cdot)$ на $\mathcal{M}$ положителен и нормален, а это немедленно влечет $\mathcal{E}5$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что доказательство включения $\mathcal{E}(\mathcal{M})\subset\mathcal{N}$ фактически уже содержится в [2] (см. доказательства импликации $(i)\Rightarrow(ii)$ в теореме II указанной работы). Интересно отметить, что в работе Л.Аккарди и К.Чеккини [4], где также рассматривалась задача обобщения понятия условного ожидания в алгебрах Неймана, соответствующее понятие вводится, исходя из достаточно отдаленной аналогии с классической ситуацией. Однако сравнение формул (3.18) и (3.20) работы [4] и нашего равенства (3) показывает, что отображение $\mathcal{E}:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ и есть φ - условное ожидание в смысле [4]. Отметим, в частности, что $\mathcal{E}$ вполне положительно (это сразу следует, например, из (3)).

З а м е ч а н и е 2. При подготовке рукописи к печати авторам стала известна работа Л.Аккарди и К.Чеккини [5], где получены близкие к нашим результаты. Отметим, что в [5] используется вложение $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}_*$, которое в наших обозначениях есть $x \to \overline{\gamma(x^*)}$.

§ 2. Переходя к случаю веса, будем придерживаться обозначений и терминологии [3]. Пусть $\mathcal{N}$ – подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$, φ – точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ такой, что вес $\varphi_o = \varphi \restriction \mathcal{N}$ полуконечен, $m_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < \infty\}$, m_φ – линейная оболочка m_φ^+; $m_{\varphi_o}^+$ и m_{φ_o} – соответствующие объекты для φ_o. Через $E: L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_o)$ обозначим, как и в § 1, отображение, однозначно определяемое условием (1). В работе [3] (предложение 4) показано, что отображение E удовлетворяет условиям E1–E4 и в этом случае. Однако, поскольку в данном случае алгебра $\mathcal{M}$ уже не обязана входить целиком в $L_1(\varphi)$, то для определения отображения $\mathcal{E}: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ мы воспользуемся приемом, применявшимся при доказательстве теоремы I.

Т е о р е м а 2. Существует и однозначно определено условием

$$\gamma(y)(x) = \gamma_o(y)(\mathcal{E}x) \qquad (y \in m_{\varphi_o}) \tag{4}$$

отображение $\mathcal{E}: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, обладающее следующими свойствами:

$\mathcal{E}1$. $\mathcal{E}$ – линейное отображение, $\mathcal{E}(1) = 1$,

$\mathcal{E}2$. $\mathcal{E}$ – положительно и точно,

$\mathcal{E}3$. $\|\mathcal{E}\| = 1$, т.е. $\|\mathcal{E}x\| \le \|x\| \quad (x \in \mathcal{M})$,

$\mathcal{E}4$. $\varphi_o(\mathcal{E}x) = \varphi(x) \quad (x \in m_\varphi^+)$,

$\mathcal{E}5$. $\mathcal{E}$ ультраслабонепрерывно,

$\mathcal{E}6$. $\gamma(\mathcal{E}x)(y) = \gamma(x)(\mathcal{E}y) \quad (x, y \in m_\varphi)$,

$\mathcal{E}7$. $\mathcal{E}x = Ex \quad (x \in m_\varphi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о с очевидными изменениями, касающимися использования m_φ и m_{φ_o} вместо $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, дословно повторяет доказательство теоремы 1. При этом явное выражение (3) для $\mathcal{E}$ остается, очевидно, верным и в данном случае.

З а м е ч а н и е 3 (ср. [3], замечание на с. 89). Пусть $\mathcal{N}_1$ – еще одна подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$ такая, что $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{M}$, и пусть вес $\varphi_1 = \varphi \restriction \mathcal{N}_1$ полуконечен. Для отображений $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, определенных в теореме 2, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\mathcal{E}"] \arrow[d, "\mathcal{E}_1"'] & \mathcal{N} \\ \mathcal{N}_1 \arrow[ur, "\mathcal{E}_2"'] & \end{tikzcd}$$

Это свойство транзитивности непосредственно следует из определения отображения $\mathcal{E}$.

Замечание 4. Отображение $\mathcal{E}$, построенное в теореме 2, совпадает с φ – условным ожиданием в смысле [4] (теорема 7.5) и, в частности, вполне положительно. Отметим, что переход от состояния к весу в [4] сводится к использованию явного соотношения типа (3), причем лишь для $x \in m_\varphi$, с последующим продолжением по непрерывности на все $x \in \mathcal{M}$. Таким образом, теорема 2 в связи с результатами [3] дает некоторую дополнительную информацию о φ – условных ожиданиях по сравнению с [4].

§ 3. В качестве приложения теоремы 2 мы предложим новые доказательства теоремы 5 из [4] о связи между отображением $\mathcal{E}$ и ограниченным условным ожиданием, а также критерия М. Такесаки [6] существования ограниченного условного ожидания в терминах модулярной группы, ассоциированной с весом. Сохраняя обозначения § 2, будем через $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (соответственно, $(\sigma_t^\circ)_{t\in\mathbb{R}}$) обозначать группу модулярных автоморфизмов $\mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{N}$), ассоциированную с φ (соответственно $\varphi_\circ$).

Напомним, что ограниченным условным ожиданием относительно веса φ называется отображение $\varepsilon: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ (необходимо единственно, см. [3]) такое, что

$\varepsilon 1$. ε – линейная сюрьекция, $\varepsilon 1 = 1$,

$\varepsilon 2$. ε положительно и точно,

$\varepsilon 3$. $\|\varepsilon\| = 1$,

$\varepsilon 4$. $\varphi_\circ(\varepsilon(x)) = \varphi(x)$ $(x \in m_\varphi^+)$,

$\varepsilon 5$. ε ультраслабонепрерывно.

Теорема 3 ([3], теорема 5; [6]). Пусть $\mathcal{N}$ – подалгебра Неймана алгебры $\mathcal{M}$, φ – точный нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ и вес $\varphi_0 = \varphi|\mathcal{N}$ полуконечен. Тогда эквивалентны следующие условия:

(i) $Ex = x$ $(x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0})$,

(ii). $\mathcal{E}x = x$ $(x \in \mathcal{N})$,

(iii) существует ограниченное условное ожидание $\varepsilon: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ относительно φ,

(iv) подалгебра $\mathcal{N}$ инвариантна относительно $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

При выполнении этих условий отображение $\mathcal{E}$ – ограниченное условное ожидание относительно φ.

Доказательство. Эквивалентность условий (i) и (ii) следует из $\mathcal{E}5$, $\mathcal{E}7$ и ультраслабой плотности $\mathfrak{m}_{\varphi_0}$ в $\mathcal{N}$.

Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна в силу теоремы 2.

Несложная проверка импликации $(iii) \Rightarrow (iv)$ фактически содержится в [3, с. 92 – 93]. Действительно, пусть S (соответственно S_0) – замыкание антилинейного отображения $x \to \widehat{x^*}$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$ в $\mathcal{H}$ (соответственно отображения $x \to \widehat{x^*}$ $(x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0})$ в $\mathcal{H}_0$) и $S = J\Delta^{1/2}$, $S_0 = J_0 \Delta_0^{1/2}$ – их полярные разложения. Тогда, как показано в [3] (равенство (12)), $p\hat{x} = \widehat{\varepsilon(x)}$ для каждого $x \in \mathfrak{m}_\varphi$ (напомним, что p – ортопроектор на подпространство $\mathcal{H}_0$). Поскольку $\varepsilon(x^*) = \varepsilon(x)^*$ $(x \in \mathcal{M})$, то $S_0 = S|\mathcal{H}_0$, так что p коммутирует с Δ и $\Delta p = \Delta_0 p$. Остается воспользоваться известными соотношениями теории Томита– Такесаки:

$$\widehat{\sigma_t(x)} = \Delta^{it}\hat{x} \quad (x \in \mathfrak{m}_\varphi), \quad \widehat{\sigma_t^0(x)} = \Delta_0^{it}\hat{x} \quad (x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}), \ t \in \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Наконец, для проверки импликации $(iv) \Rightarrow (i)$ заметим, что в силу единственности однопараметрической ультраслабонепрерывной группы автоморфизмов алгебра Неймана $\mathcal{N}$, удовлетворяющей условию К.М.Ш. относительно точного нормального полуконечного веса φ_0, справедливо равенство $\sigma_t|\mathcal{N} = \sigma_t^0$ $(t \in \mathbb{R})$. Тогда из (5) следует, что Δ коммутирует с p и $\Delta p = \Delta_0 p$. В таком случае из (3) следует, что для любых $x, y \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}$

$$\pi_0(y)\Delta_0^{1/2}(\widehat{\mathcal{E}x}) = J_0 \pi_0(\mathcal{E}x)^* J_0 \hat{y} = J\pi(x)^* J \hat{y} =$$

$$= \pi(y)\Delta^{1/2}\hat{x} = \pi_0(y)\Delta_0^{1/2}\hat{x}.$$

Устремляя в этом равенстве сеть $y \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}$ ультрасильно к 1, получим $\Delta_0^{1/2}(\widehat{\mathcal{E}x}) = \Delta_0^{1/2}\hat{x}$, откуда в силу несингулярности $\Delta_0^{1/2}$ $\widehat{\mathcal{E}x} = \hat{x}$, т.е. $\mathcal{E}x = x$ $(x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0})$. Остается учесть условие $\mathcal{E}7$. Теорема доказана.

Литература

1. Голодец В.Я. Условные ожидания и модулярные автоморфизмы неймановских алгебр.- Функциональный анализ и его приложения, 1972, т.6, № 3, с. 68 - 69.

2. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. Условные ожидания в одной схеме некоммутативной теории вероятностей.- In: Trans. 8th Prague Conf. Inform. Theory, Stat. Decis. Funct., Rand. Process., vol. B, Prague, 1978, p. 287-299.

3. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I, II. - Изв. вузов. Матем., 1978, № 8, с. 79 - 88; № 12, с.88 -98.

4. Accardi L., Cecchini C. Conditional expectations in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki.- J. Funct. Anal., 1982, v. 45, N 2, p. 245-273.

5. Accardi L., Cecchini C. Surjectivity of the conditional expectations on the L^1-spaces. — Publ. Ist. math. Univ. Genova, 1982, N 413, 7 p.

6. Takesaki M. Conditional expectations in von Neumann algebras. — J. Funct. Anal., 1972, v. 9, N 3, p. 306 - 321.