

О квазикомпонентах несвязных множеств

А. Д. Тайманов (Кзыл-Орда)

Настоящая работа посвящена изучению общих свойств множества квазикомпонент (см. [1]) произвольного подмножества эвклидова пространства R^n ; она возникла в связи с работой П. С. Новикова [2], доказавшего, что множество компонент произвольного A -множества имеет мощность либо континуальную, либо не более чем счетную.

В § 1 мы обобщаем понятие квазикомпоненты, введенное Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff), и даем определение квазикомпоненты ранга α ; кроме того, мы определяем индекс связных компонент.

В § 2, обозначив через K_E^α множество квазикомпонент ранга, не превосходящего α , мы доказываем следующие теоремы:

Теорема 1. Если E есть A -множество, то K_E^α при $\alpha < \Omega$ или имеет мощность континуума, или не более чем счетно.

Теорема 2. Из существования эффективного множества, имеющего \aleph_1 α -квазикомпонент, следует существование эффективного множества из \aleph_1 точек.

Результаты § 2 имеют место в произвольном метрическом пространстве со счетной базой.

В § 3 мы рассматриваем вопрос о том, какие множества могут являться квазикомпонентами других множеств. Оказывается, что это свойство не является топологическим инвариантом.

§ 1

1. Определение 1. Множество \mathcal{C} , содержащееся в E , разбивается множеством E , если существует разбиение

$$E = E_1 + E_2, \quad H(E_1, E_2) = E_1 \cdot \bar{E}_2 + \bar{E}_1 \cdot E_2 = 0,$$

такое, что

$$E_1 \cdot \mathcal{C} \neq 0 \neq E_2 \cdot \mathcal{C}. \quad (1)$$

Множество \mathcal{C} называется связным в E , если оно не может быть разбито множеством E .

Лемма 1. Сумма двух связных в E множеств $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ с непустым пересечением $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2 \neq 0$ есть множество, связное в E .

Доказательство. Допустим, что существует разбиение $E = E_1 + E_2$, $H(E_1, E_2) = 0$, причем $E_1 \cdot \mathcal{C} \neq 0 \neq \mathcal{C} \cdot E_2$, где $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. Если $\mathcal{C} \cdot E_1 \neq 0$ содержит точку из \mathcal{C}_1 , то $\mathcal{C} \cdot E_1$ содержит и все множество \mathcal{C}_1 : $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C} \cdot E_1$, ибо \mathcal{C}_1 не разбивается множеством E . Тогда множество $\mathcal{C} \cdot E_2$ должно содержать точку из \mathcal{C}_2 , а следовательно, и

все множество $\mathcal{C}_2: \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C} \cdot E_2$. Таким образом, $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C} \cdot E_1$, $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C} \cdot E_2$ и $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2 \subset E_1 \cdot E_2 = 0$, что противоречит условию $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2 \neq 0$.

Определение 2. Максимальное подмножество множества E , связанное в E , называется 1-квазикомпонентой множества E . *

Замечания. Для каждой точки $x \in E$, очевидно, существует 1-квазикомпонента $E^1(x)$ такая, что $x \in E^1(x) \subset E$. 1-квазикомпоненты либо совпадают, либо не пересекаются.

1-квазикомпонента может быть связным или несвязным множеством. Если 1-квазикомпонента есть несвязное множество, то она, в свою очередь, разбивается на 1-квазикомпоненты; назовем их 2-квазикомпонентами множества E и обозначим через $E^2(x)$. В этом случае мы получаем разложение множества E на 2-квазикомпоненты:

$$E = E^2(x) + E^2(y) + \dots$$

Множества $E^2(x)$ замкнуты в E , попарно не пересекаются, и для любой пары $E^1(x)$, $E^2(y)$ либо $E^1(x) \cdot E^2(y) = 0$, либо $E^1(x) \supseteq E^2(y)$.

Квазикомпоненты высших рангов мы определяем по индукции. Допустим, что определены α -квазикомпоненты для всех $\alpha < \beta$. Возможны два случая:

1) β — трансфинитное число первого рода. Тогда существует $\beta - 1$, и по индуктивному предположению определены $(\beta - 1)$ -квазикомпоненты $E^{\beta-1}(x)$. Если $E^{\beta-1}(x)$ связна, то $E^\beta(x) = E^{\beta-1}(x)$. Если множество $E^{\beta-1}(x)$ несвязно, разложим его на 1-квазикомпоненты, назовем их β -квазикомпонентами множества E и обозначим через $E^\beta(x)$.

2) β — трансфинитное число второго рода. Тогда существует последовательность

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots, \quad \beta_n \rightarrow \beta,$$

и множество $E^\beta(x)$ определяется равенством: $E^\beta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} E^{\beta_n}(x)$.

Таким образом, для любого $\alpha < \Omega$ мы получаем разложение множества E на α -квазикомпоненты:

$$E = E^\alpha(x) + E^\alpha(y) + \dots,$$

где $E^\alpha(y)$ — замкнутые в E множества и $E^\alpha(y)$, $E^\alpha(x)$ либо совпадают, либо не пересекаются. Любая пара $E^\alpha(x)$, $E^{\alpha'}(y)$ либо не имеет общих точек, либо $E^\alpha(x) \supseteq E^{\alpha'}(y)$ при $\alpha < \alpha'$. При α предельном каждое множество $E^\alpha(x)$ есть пересечение всех $E^\beta(x)$ таких, что $E^\beta(x) \supseteq E^\alpha(x)$ и $\beta < \alpha$.

Для каждой точки $x \in E$ мы имеем последовательность $E^1(x) \supseteq E^2(x) \supseteq \dots \supseteq E^\alpha(x) \supseteq \dots$ замкнутых в E множеств. По теореме Бэра эта последовательность стационарна, и, начиная с некоторого β , все множества последовательности совпадают со связной компонентой $E(x)$. Таким образом, каждой точке относится трансфинитный индекс.

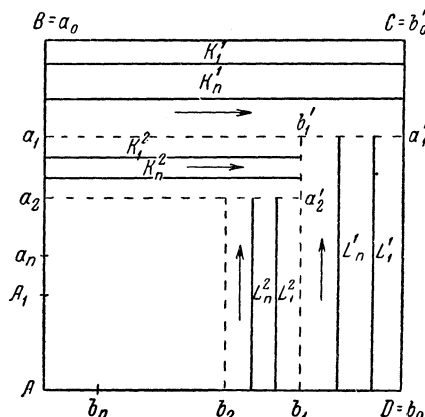
* Это определение эквивалентно определению квазикомпоненты, введенному Хаусдорфом.

Мы получаем трансфинитную функцию $\text{ind}(x)$, постоянную на связной компоненте $E(x)$. Эта функция является топологическим инвариантом множества E .

2. Приведем примеры квазикомпонент.

Пример 1. Множество типа G_δ и F_δ со сколь угодно большим индексом α .

Возьмем множество внутренних точек квадрата $ABCD$ (фиг. 1). На стороне AB поместим последовательность точек $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, сходящуюся к точке $A_1 \neq A$. На стороне AD поместим последовательность точек $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, сходящуюся к точке A . Через каждую из точек a_i проведем прямую k_i , параллельную AD . Через каждую из точек b_i проведем прямую l_i , параллельную AB . Точку пересечения прямой k_i с прямой l_{i-1} обозначим через a'_i , а точку пересечения прямой l_i с прямой k_i — через b'_i . В каждом из прямоугольников $a_i a'_i b'_{i-1} a_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$) поместим последовательность сегментов $K_1^i, K_2^i, \dots, K_n^i, \dots$, сходящуюся к $a_i a'_i$, а в каждом из прямоугольников $b_i b_{i-1} a'_i b'_i$ ($i = 1, 2, \dots$) — последовательность сегментов $L_1^i, L_2^i, \dots, L_n^i, \dots$, сходящуюся к $b_i b'_i$. Теоретико-множественную сумму всех сегментов K_n^i, L_n^i ($i, n = 1, 2, \dots$) и точек A, A_1 обозначим через \mathcal{G} .



Фиг. 1

Тогда множество \mathcal{G} есть несвязное множество типа F_σ и G_δ , и квазикомпонента, содержащая точку A , содержит точку A_1 и имеет индекс ω .

Если дано произвольное число $\alpha, \alpha < \Omega$, то на AA_1 возьмем последовательность точек $a_1, a_2, \dots, a_\omega, \dots, a_\nu, \dots / \alpha$, на AD — последовательность точек $b_1, b_2, \dots, b_\omega, \dots, b_\nu, \dots / \alpha$. Продолжая описанное выше построение по трансфинитной индукции, получим множество \mathcal{G} типа F_σ и G_δ , имеющее компоненту индекса α .

Пример 2. Множество типа G_δ , имеющее компоненту произвольного большого индекса.

Пусть $U \subset K^3$ есть множество, универсальное (см. [3]) для плоских G_δ , т. е. для любого плоского множества \mathcal{G} типа G_δ найдется такая точка $u = u'$, что плоскость $P_{u'}$, параллельная осям OX, OZ и проходящая через $u = u'$, пересекает множество U по множеству $\mathcal{G} = U \cdot P_{u'}$.

На оси OY возьмем множество K рациональных точек и через каждую точку $u \in K$ проведем плоскость P_u . Через U' обозначим множество точек U , не лежащих на плоскостях $P_u, u \in K$, т. е. $U' = U \cdot C \left(\sum_{u \in K} P_u \right)$. Множество U' есть несвязное множество типа G_δ .

Для произвольного $\alpha, \alpha < \Omega$, построим плоское множество типа G_δ индекса α и обозначим его через \mathcal{G}_α . Для последовательности

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_\omega, \dots, \mathcal{C}_\alpha, \dots / \Omega$ плоских G_δ найдется последовательность точек $y_1, y_2, \dots, y_\omega, \dots, y_\alpha, \dots / \Omega$ такая, что $P_{y_\alpha} \cdot U = \mathcal{C}_\alpha$. Так как рациональных точек — счетное число, то в последовательности $y_1, \dots, y_\omega, \dots, y_\alpha / \Omega$ все точки, начиная с некоторого γ , иррациональны. Тогда при любом $\gamma' > \gamma$ множество $P_{y_{\gamma'}} \cdot U' = \mathcal{C}_{\gamma'}$, само являясь 1-квазикомпонентой, имеет компоненту ранга γ' . Таким образом множество U' есть множество типа G_δ , индексы компонент которого не ограничены.

Пример 3. Множество типа F_σ , имеющее компоненту произвольного большего индекса.

Пусть \mathcal{C} есть канторово совершенное множество, лежащее на отрезке $[0, 1]$ оси OY , а Q является топологическим произведением плоскости XOZ и множества \mathcal{C} . Построим универсальное множество U типа G_δ так, что для любого плоского множества E типа G_δ найдется такая точка y , что $y \in \mathcal{C}$ и $E = P_y \cdot U$. Тогда $Q \cdot CU = U'$ есть множество типа F_σ с неограниченным индексом компонент.

Вопрос о существовании плоского множества с неограниченным индексом (поставлен П. С. Новиковым) остается открытым.

Пример 4. Квазисвязное множество, каждая компонента которого есть точка.

1. Возьмем квадрат $R(0, 1; 0, 1)$ и на его нижней стороне расположим следующие множества:

- 1) R — множество рациональных точек,
- 2) L — счетное, всюду плотное множество иррациональных точек,
- 3) Q — множество иррациональных точек, не вошедших в L .

2. Множество рациональных точек на OY занумеруем в последовательность $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$.

Через $D_{x_1}^y$ ($D_{y_1}^x$) обозначим прямую, параллельную оси OY (OX) и проходящую через $(x_1, 0)$ (соответственно через $(0, y_1)$).

3. Через \mathcal{C} обозначим множество точек (x, y) квадрата $R(0, 1; 0, 1)$, удовлетворяющих условиям: а) если $x \in R$, то y рационально; б) если $x \in Q$, то y иррационально; в) если $x \in L$, то $(x, y) \notin \mathcal{C}$ при любом y .

Множество \mathcal{C} есть несвязное множество типа $F_\sigma + G_\delta$, и на верхней и нижней сторонах квадрата $R(0, 1; 0, 1)$ лежит счетное, плотное на них множество точек из \mathcal{C} .

4. Докажем, что любая пара точек $e_1 = (a, y_1)$, $e_2 = (a, y_2)$ из \mathcal{C} с одинаковой абсциссой не отделима в множестве \mathcal{C} , т. е. принадлежит к одной 1-квазикомпоненте. Рассмотрим два случая:

а) $a \in Q$.

Допустим, что существует разбиение $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, $H(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = 0$ и $e_1 \in \mathcal{C}_1$, $e_2 \in \mathcal{C}_2$. Так как $e_1 \notin \mathcal{C}_2$ ($e_2 \notin \mathcal{C}_1$), то существует такое число $\eta_1 > 0$ ($\eta_2 > 0$), что круг $U_{\eta_1}(e_1)$ ($U_{\eta_2}(e_2)$) с центром в e_1 (e_2) радиуса η_1 (η_2) не содержит точек из \mathcal{C}_2 (\mathcal{C}_1). Пусть

$$\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}, \quad \delta = (a - \eta', a + \eta'), \quad \eta' = \frac{\eta}{2} \text{ и } Q' = Q \cdot \delta.$$

Возьмем $x \in Q'$. Множество $D_x^y \cdot \mathcal{C}$ состоит из всех иррациональных точек прямой D_x^y , имеет точки как в $U_{\eta_1}(e_1)$, так и в $U_{\eta_2}(e_2)$, и разби-

вається на сумму:

$$D_x^y \cdot \mathcal{C} = D_x^y \cdot \mathcal{C}_1 + D_x^y \cdot \mathcal{C}_2.$$

Множество $\overline{D_x^y \cdot \mathcal{C}_1} \cdot \overline{D_x^y \cdot \mathcal{C}_2}$ не пусто и состоит из точек с рациональными ординатами, которые лежат на $D_{r_n}^x$ ($n = 1, 2, \dots$). На каждой прямой D_x^y , $x \in Q'$, найдется точка из $\overline{\mathcal{C}_1} \cdot \overline{\mathcal{C}_2}$, лежащая на одной из прямых $D_{r_n}^x$.

Рассмотрим множества $L_n = D_{r_n}^x \cdot \overline{\mathcal{C}_1} \cdot \overline{\mathcal{C}_2}$.

L_n суть замкнутые множества, и сумма их проекций на ось OX содержит множество Q' :

$$Q' \subset \sum_{n=1}^{\infty} \text{пр } L_n.$$

L_n нигде не плотно. Действительно, допустим, что существует интервал λ на $D_{r_n}^x$, целиком принадлежащий L_n . Тогда в λ найдется точка p с рациональной абсциссой; она принадлежит множеству \mathcal{C} и, следовательно, одному из множеств \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 . Если $p \in \mathcal{C}_1$ (\mathcal{C}_2), то $p \in \overline{\mathcal{C}_2}$ ($p \in \overline{\mathcal{C}_1}$) и $p \in \overline{\mathcal{C}_1} \cdot \overline{\mathcal{C}_2}$, что противоречит допущению: $p \in \lambda \subset L_n = D_{r_n}^x \cdot \overline{\mathcal{C}_1} \cdot \overline{\mathcal{C}_2}$. Итак, множество L_n нигде не плотно, и $\sum_{n=1}^{\infty} \text{пр } L_n$ есть

множество первой категории. Но это противоречит включению $Q' \subset \sum_{n=1}^{\infty} \text{пр } L_n$, ибо Q' есть множество второй категории.

б) $a \in R$, $e_1 = (a, y_1) \in \overline{\mathcal{C}_1}$, $e_2 = (a, y_2) \in \overline{\mathcal{C}_2}$.

Поскольку $e_1 \in \overline{\mathcal{C}_2}$ ($e_2 \in \overline{\mathcal{C}_1}$), существует такое число $\eta_1 > 0$ ($\eta_2 > 0$), что $U_{\eta_1}(e_1)$ ($U_{\eta_2}(e_2)$) не содержит точек из $\overline{\mathcal{C}_2}$ ($\overline{\mathcal{C}_1}$). Пусть

$$\eta = \min(\eta_1, \eta_2), \delta = (a - \eta', a + \eta'), \eta' = \frac{\eta}{2} \text{ и } Q' = Q \cdot \delta.$$

Тогда множество $D_x^y \cdot \mathcal{C}$, где $x \in Q'$, имеет точки как в U_{η_1} , так и в U_{η_2} , и эти точки принадлежат соответственно $\overline{\mathcal{C}_1}$ и $\overline{\mathcal{C}_2}$, что противоречит доказанному в случае а).

Таким образом, мы установили, что множество \mathcal{C} несвязно и разбивается на сумму замкнутых в нем множеств только прямыми D_x^y , $x \in L$. Направления D_x^y назовем осевыми направлениями множества \mathcal{C} .

Это множество было построено Серпинским (W. Sierpiński, [4]) и Мазуркевичем (S. Mazurkiewicz, [5]) более сложным способом. Изложенный способ построения взят у Кнастера (B. Knaster) и Куратовского (C. Kuratowski) [6] (пример двусвязного множества).

Пример 5. Пунктиформное множество с компонентой индекса α .

Возьмем квадрат $ABCD$. На стороне AB поместим последовательность точек $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, сходящуюся к A , на стороне AD — последовательность точек $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, сходящуюся к A (фиг. 1).

В прямоугольниках $a_1 B C a'_1$, $a_2 a_1 b'_1 a'_2$, $b_1 b'_1 a'_1 D$, ... расположим квазисвязные множества с осевыми направлениями, показанными стрелками. Полученное множество обозначим через \mathcal{G} и добавим к нему еще точку A , $\mathcal{G} + A$ обозначим через \mathcal{G}_1 : $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} + A$. Каждая компонента множества \mathcal{G}_1 есть точка, причем точка A является компонентой индекса ω .

Для любого α , $\alpha < \Omega$, можно построить пунктиформное множество \mathcal{G} , имеющее компоненту индекса α . Все эти множества суть множества класса 3.

Пример 6. Пунктиформное множество с неограниченным индексом компонент.

Возьмем в пространстве $(OXYZ)$ такое универсальное множество U класса 3, что для любого плоского множества \mathcal{G} третьего класса найдется точка y , для которой $P_y \cdot U = \mathcal{G}$. Через E обозначим множество таких иррациональных точек на оси OY , что плоскость $y = y_0$, $y_0 \in E$, пересекает множество U по пунктиформному множеству. Множество $U' = U \cdot \sum_{y \in E} P_y$ является пунктиформным множеством с

неограниченным индексом компонент.

Пример 7. Локально компактное множество, имеющее индекс α .

Множество состоит: из замкнутых прямоугольников $A_1^1, A_2^1, \dots, A_n^1, \dots$, сходящихся к сегменту $a_1 a'_1$; из замкнутых прямоугольников $B_1^1, B_2^1, \dots, B_n^1, \dots$, сходящихся к сегменту $b_1 b'_1$, причем верхние стороны этих прямоугольников лежат на $a_1 a'_1$; из прямоугольников $A_1^2, A_2^2, \dots, A_n^2, \dots$, сходящихся к $a_2 a'_2$, причем правые стороны их лежат на $b_1 b'_1$ и т. д. Как в примере 1, продолжая описанное построение до α , мы получаем множество типа G_δ и F_σ с индексом α . Если выбросить вершины всех прямоугольников, то мы будем иметь локально компактное множество индекса α .

Локально компактные множества являются приводимыми множествами первого класса. Если взять два приводимых множества: A — класса 1 и B — класса α , таких, что $A \cdot B = 0$, то $A + B$ будет приводимым множеством класса α . Следовательно, каждый класс приводимости в классификации П. С. Александрова и И. В. Проскуракова [7] распадается на \aleph_1 классов по индексу несвязности. Однако существует локально компактное множество с неограниченным индексом компонент.

Этот пример является ответом на вопрос, поставленный П. С. Александровым.

§ 2

1. В этом параграфе рассматривается вопрос о мощности множества квазикомпонент ранга, не превосходящего α , когда данное множество E есть или A -множество или сумма \aleph_1 A -множеств пространства R^n . Пусть

$$g_1, g_2, \dots, g_n, \dots \quad (1)$$

— все открытые множества базы пространства R^n , содержащие точки из E , т. е. $g_n \cdot E \neq 0$.

Определение 1. Пара множеств (g_n, g_m) разбивается множеством E , если существуют открытые множества G_1, G_2 , такие, что

$$G_1 \cdot G_2 = 0, \quad G_1 + G_2 \supset E \text{ и } g_n \subset G_1, \quad g_m \subset G_2.$$

В этом случае скажем, что множества g_n, g_m отделяются множествами G_1, G_2 .

Пусть множество пар, разбиваемых множеством E , занумеровано в последовательность

$$P_1 = \{g_1^1, g_2^1\}, \quad P_2 = \{g_1^2, g_2^2\}, \dots, \quad P_n = \{g_1^n, g_2^n\}, \dots \quad (2)$$

Для пары $P_1 = \{g_1^1, g_2^1\}$ существуют такие множества G_1^1, G_2^1 , что

$$G_1^1 \cdot G_2^1 = 0, \quad G_1^1 + G_2^1 \supset E \text{ и } g_1^1 \subset G_1^1, \quad g_2^1 \subset G_2^1.$$

Мы получаем разбиение множества E :

$$E = E_1^1 + E_2^1,$$

где

$$E_1^1 = G_1^1 \cdot E, \quad E_2^1 = G_2^1 \cdot E, \quad H(E_1^1, E_2^1) = 0.$$

Для пары $P_2 = \{g_1^2, g_2^2\}$ существуют такие множества G_1^2, G_2^2 , что

$$G_1^2 \cdot G_2^2 = 0, \quad G_1^2 + G_2^2 \supset E, \quad g_1^2 \subset G_1^2, \quad g_2^2 \subset G_2^2,$$

и мы получаем разбиение для каждого из множеств E_1^1, E_2^1 :

$$E_1^1 = E_{11}^1 + E_{12}^1,$$

где

$$E_{11}^1 = E_1^1 \cdot G_1^2, \quad E_{12}^1 = E_1^1 \cdot G_2^2, \quad H(E_{11}^1, E_{12}^1) = 0,$$

$$E_2^1 = E_{21}^2 + E_{22}^2,$$

где

$$E_{21}^2 = E_2^1 \cdot G_1^2, \quad E_{22}^2 = E_2^1 \cdot G_2^2, \quad H(E_{21}^2, E_{22}^2) = 0.$$

Для множества E мы имеем разложения на сумму замкнутых множеств попарно без общих точек:

$$E = E_1^1 + E_2^1, \quad E = E_{11}^1 + E_{12}^1 + E_{21}^2 + E_{22}^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + E_4^2,$$

где

$$E_1^2 = E_{11}^1, \quad E_2^2 = E_{12}^1, \quad E_3^2 = E_{21}^2, \quad E_4^2 = E_{22}^2.$$

Повторяя это рассуждение для всех P_n , мы получим последовательность разложений множества E :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^2 E_i^1, \\ E &= \sum_{i=1}^4 E_i^2, \\ &\dots \dots \dots \\ E &= \sum_{i=1}^{2^n} E_i^n, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3)$$

где все E_i^n ($i, n = 1, 2, \dots$) суть замкнутые в E множества и при всех i, j для $n < m$ либо $E_j^n \cdot E_i^m = 0$, либо $E_j^n \supset E_i^m$ и $E_j^n \cdot E_i^n = 0$.

Мы имеем:

$$E = \sum_{i=1}^2 E_i^1 \cdot \sum_{i=1}^4 E_i^2 \cdots \sum_{i=1}^{2^n} E_i^n \cdots = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots} E_{i_1}^1 \cdot E_{i_2}^2 \cdots E_{i_n}^n \cdots \quad (4)$$

Введем обозначение: $K = E_{i_1}^1 \cdot E_{i_2}^2 \cdots E_{i_n}^n \cdots$.

С одной стороны, легко доказать, что если 1-квазикомпонента множества E пересекается с K , то она содержится в K : $E^1(x) \subset K$. С другой стороны, K не может содержать двух различных 1-квази-компонент $E^1(x)$, $E^1(y)$, $E^1(x) \cdot E^1(y) = 0$. Действительно, существует такое разбиение множества E , что

$$E = E_1 + E_2, \quad H(E_1, E_2) = 0, \quad E_1 \supset E^1(x), \quad E_2 \supset E^1(y).$$

Тогда существуют множества G_1, G_2 , для которых $G_1 \cdot G_2 = 0$, $G_1 \supset E_1$, $G_2 \supset E_2$. Из совокупности (1) выбираем множества g_1, g_2 , такие, что $x \in g_1 \subset G_1$, $y \in g_2 \subset G_2$, и образуем пару (g_1, g_2) , принадлежащую последовательности (2). Пусть эта пара имеет номер l :

$$P_l = \{g_1^l, g_2^l\} = (g_1, g_2).$$

Тогда множество $E_{i_l}^l$ принадлежит одному из множеств G_1^l, G_2^l . Пусть $E_{i_l}^l \subset G_1^l$. Но $K \subset E_{i_l}^l$, $E^1(x) \subset K$, $E^1(y) \subset K$, следовательно, $E^1(x) \subset G_1^l$ и $E^1(y) \subset G_2^l$. Это противоречит тому условию, что

$$x \in g_1 = g_1^l \subset G_1^l, \quad y \in g_2 = g_2^l \subset G_2^l.$$

Таким образом, пересечение $K = E_{i_1}^1 \cdot E_{i_2}^2 \cdots E_{i_n}^n \cdots \neq 0$ является 1-квазикомпонентой множества E , и формула (4) дает разложение множества E на сумму 1-квазикомпонент.

Этим установлена эквивалентность определения квазикомпонент по Хаусдорфу и нашего определения.

2. Дополним конечную систему множеств E_i^l ($i = 1, 2$) пустыми множествами до счетной и запишем ее в виде последовательности

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$$

множеств, занумерованных картежами ранга 1. Каждое множество E_n или пусто, или одновременно открыто и замкнуто в E . Пусть система множества E_i^n ($i = 1, 2, \dots, 2^n$) дополнена пустыми множествами и записана в виде последовательности множеств, занумерованных картежами ранга n ,

$$E_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots).$$

Тогда систему множеств E_i^{n+1} ($i = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$), содержащихся в множестве $E_{i_1 \dots i_n}^n$, дополним пустыми множествами и запишем в виде последовательности множеств, занумерованных картежами $(i_1, i_2, \dots, i_n, l)$:

$$E_{i_1 i_2 \dots i_n l} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

При этом формула (4) примет вид:

$$E = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots} E_{i_1}^1 \cdot E_{i_2}^2 \cdot \dots \cdot E_{i_n}^n \cdot \dots = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots} E_{i_1} \cdot E_{i_2} \cdot \dots \cdot E_{i_n} \cdot \dots \quad (5)$$

Последняя сумма выражает A -операцию над множествами $\{E_{i_1, \dots, i_n}\}$, и формула (5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между 1-квазикомпонентами множества E и непустыми цепями A -операции над множествами $\{E_{i_1, \dots, i_n}\}$.

3. Обозначим через K_E множество связанных компонент множества E , через K_E^β множество β -квазикомпонент множества E . Тогда

$$E = \sum_{\alpha \in K^1} E_\alpha^1,$$

где множество K^1 имеет ту же мощность, что и K_E^1 , или, короче, $m(K^1) = m(K_E^1)$. Разлагая каждое из множеств E_α^1 на 1-квазикомпоненты множества E_α^1 , мы получим представление множества E в виде суммы 2-квазикомпонент множества E :

$$E = \sum_{\alpha \in K^2} E_\alpha^2, \quad m(K^2) = m(K_E^2).$$

Продолжая этот процесс, согласно определению β -квазикомпонент, будем иметь трансфинитную последовательность разложений:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\alpha \in K^1} E_\alpha^1, & E_\alpha^1 \cdot E_{\alpha'}^1 &= 0, & \alpha \neq \alpha', & m(K^1) &= m(K_E^1), \\ E &= \sum_{\alpha \in K^2} E_\alpha^2, & E_\alpha^2 \cdot E_{\alpha'}^2 &= 0, & \alpha \neq \alpha', & m(K^2) &= m(K_E^2), \\ & \dots & & & & & \dots, \\ E &= \sum_{\alpha \in K^\beta} E_\alpha^\beta, & E_\alpha^\beta \cdot E_{\alpha'}^\beta &= 0, & \alpha \neq \alpha', & m(K^\beta) &= m(K_E^\beta), \\ & \dots & & & & & \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

при $\beta < \beta'$ для любой пары α, α' либо $E_\alpha^\beta \cdot E_{\alpha'}^{\beta'} = 0$, либо $E_\alpha^\beta \supset E_{\alpha'}^{\beta'}$. При трансфинитном числе β' второго рода каждое $E_{\alpha'}^{\beta'}$ является пересечением всех E_α^β с $\beta < \beta'$ и $E_\alpha^\beta \supset E_{\alpha'}^{\beta'}$. Отсюда следует, что последовательность мощностей $m(K_E^\beta)$ множеств K_E^β образует неубывающую последовательность:

$$m(K_E^1) \leq m(K_E^2) \leq \dots \leq m(K_E^\beta) \leq \dots \leq mK_E. \quad (6')$$

4. Вопрос о мощности множества K_E связанных компонент разрешен П. С. Новиковым для случая, когда E есть A -множество, в его работе [2]. При этом им была доказана

Лемма 1. Если множества E_{n_1, \dots, n_k} суть A -множества, то множество непустых цепей любой A -операции над системой $\{E_{n_1, \dots, n_k}\}$ есть A -множество в пространстве Бэра.

Из этой леммы и формулы (5) следует

Лемма 2. Множество 1-квазикомпонент A -множества имеет либо мощность континуума, либо не более чем счетно.

Мы рассмотрим еще несколько вспомогательных лемм.

Лемма 3. Если E есть A -множество и K_E^β — множество β -квази-компонент множества E — не более чем счетно, то множество $(\beta + 1)$ -квазикомпонент либо имеет мощность континуума, либо не более чем счетно.

Доказательство.

$$E = \sum_{\alpha \in K^\beta} E^\alpha = E_1^\beta + E_2^\beta + \dots + E_n^\beta + \dots,$$

где множества E_n^β замкнуты в E и, следовательно, суть A -множества. Чтобы получить $E^{\beta+1}$, нужно как каждое E_n^β разложить на 1-квазикомпоненты. По лемме 2 множество $K_{E_n^\beta}^1$ при $n = 1, 2, \dots$ либо имеет мощность континуума, либо не более чем счетно. Если одно из множеств $K_{E_n^\beta}^1$ имеет мощность континуума, то множество $(\beta + 1)$ -квазикомпонент имеет мощность континуума. Если все множества $K_{E_n^\beta}^1$ — счетные, то и $K_E^{\beta+1}$ счетно.

Лемма 4. Если β — предельное число и все множества квази-компонент ранга β' , $\beta' < \beta$, имеют мощность не более чем счетную, то множество β -квазикомпонент либо имеет мощность континуума, либо не более чем счетно.

Доказательство. Существует последовательность

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots < \beta_n < \dots, \quad \beta_n \rightarrow \beta,$$

и все множества $K_E^{\beta_n}$ — счетные. Тогда

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i^{\beta_1}, \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i^{\beta_2}, \dots, \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i^{\beta_n}, \dots$$

Систему множеств $E_i^{\beta_1}$ ($i = 1, 2, \dots$) запишем в виде последовательности множеств, занумерованных картежами ранга 1:

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

Пусть система множеств $E_i^{\beta_n}$ записана в виде последовательности множеств, занумерованных картежами ранга n : $E_{i_1 \dots i_n}$ ($i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots$). При этом систему множеств $E_i^{\beta_{n+1}}$, содержащихся в множестве $E_{i_1 \dots i_n}$ можно записать в виде последовательности $E_{i_1 i_2 \dots i_n l}$ ($l = 1, 2, \dots$) множеств, занумерованных картежами вида $(i_1, i_2, \dots, i_n, l)$. Тогда формула

$$\begin{aligned} E &= \prod_{\beta' < \beta} \sum_{\alpha \in K^{\beta'}} E_\alpha^{\beta'} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} E_i^{\beta_n} = \\ &= \sum E_{i_1}^{\beta_1} \cdot E_{i_2}^{\beta_2} \cdot \dots \cdot E_{i_n}^{\beta_n} \cdot \dots = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} E_{i_1} \cdot E_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot E_{i_1 \dots i_n} \cdot \dots \end{aligned} \quad (7)$$

дает разложение множества E на сумму β -квазикомпонент и устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами непу-

стых цепей A -операции над системой $\{E_{l_1} \dots l_n\}$ и множеством β -квази-компонент.

Из леммы 1 следует, что множество K_E^β либо имеет мощность континуума, либо не более чем счетно.

Таким образом из лемм 1, 2, 3 и 4 вытекает

Теорема. *Если E есть A -множество, то множество его β -квази-компонент при любом $\beta < \Omega$ либо имеет мощность континуума, либо не более чем счетную.*

Возможны два случая:

1) Одно из множеств K_E^β имеет мощность континуума. Тогда из соотношения (6') следует, что все множества K_E^γ , $\gamma \geq \beta$, и K_E имеют мощность континуума.

2) Все множества K_E^β имеют мощность не более чем счетную. Тогда, как было доказано в работе П. С. Новикова [2], множество связанных компонент имеет мощность континуума.

5. Пусть дано множество E , допускающее разложение на сумму \aleph_1 A -множеств:

$$E = \sum_{\gamma < \Omega} \mathcal{G}_\gamma,$$

где \mathcal{G}_γ есть A -множество. По формуле (5) имеем:

$$E = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n, \dots} E_{l_1} \cdot E_{l_1 l_2} \cdot \dots \cdot E_{l_1 \dots l_n} \cdot \dots$$

В этой сумме каждый непустой член $E_{l_1} \cdot E_{l_1 l_2} \cdot \dots \cdot E_{l_1 \dots l_n} \cdot \dots \neq 0$ является 1-квазикомпонентной множества E .

Через $K_E^1(\gamma)$ обозначим множество 1-квазикомпонент множества E , имеющих непустое пересечение с \mathcal{G}_γ . Выясним мощность множества $K_E^1(\gamma)$. Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\gamma \cdot E &= \sum_{l_1, \dots, l_n, \dots} \mathcal{G}_\gamma \cdot (E_{l_1} \cdot E_{l_1 l_2} \cdot \dots \cdot E_{l_1 \dots l_n} \cdot \dots) = \\ &= \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n, \dots} (E_{l_1} \cdot \mathcal{G}_\gamma) \cdot (E_{l_1 l_2} \cdot \mathcal{G}_\gamma) \cdot \dots \cdot (E_{l_1 \dots l_n} \cdot \mathcal{G}_\gamma) \cdot \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Множество $\mathcal{G}_\gamma \cdot E_{l_1 \dots l_n}$, как пересечение \mathcal{G}_γ с множеством $E_{l_1 \dots l_n}$, замкнутым на \mathcal{G}_γ , является A -множеством. Поэтому последняя сумма есть A операция над A -множествами.

Каждому непустому слагаемому $(E_{l_1} \cdot \mathcal{G}_\gamma) \cdot (E_{l_1 l_2} \cdot \mathcal{G}_\gamma) \cdot \dots \cdot (E_{l_1 \dots l_n} \cdot \mathcal{G}_\gamma) \cdot \dots \neq 0$ соответствует 1-квазикомпонента $K = E_{l_1} \cdot E_{l_1 l_2} \cdot \dots \cdot E_{l_1 \dots l_n} \cdot \dots \neq 0$, имеющая непустое пересечение с \mathcal{G}_γ . Обратно, каждой 1-квазикомпоненте с непустым пересечением с \mathcal{G}_γ соответствует непустое слагаемое формулы (8). Применяя лемму 1, убеждаемся, что множество $K_E^1(\gamma)$ или имеет мощность континуума, или не более чем счетную.

Если все множества $K_E^1(\gamma)$ имеют мощность, не более чем счетную, то мощность множества $K_E^1 = \sum_{\gamma < \Omega} K_E^1(\gamma)$ не превосходит \aleph_1 . Мы имеем такую лемму:

Лемма 5. Множество 1-квазикомпонент множества $E = \sum_{\gamma < \Omega} \mathcal{G}_\gamma$ имеет мощность или континуальную, или не превосходящую \aleph_1 .

Применяя рассуждения предыдущего пункта, можно доказать следующие леммы:

Лемма 6. Если множество β -квазикомпонент имеет мощность, не превосходящую \aleph_1 , то множество $(\beta + 1)$ -квазикомпонент имеет мощность либо континуальную, либо не превосходящую \aleph_1 .

Лемма 7. Если число β — второго рода и все множества β' -квазикомпонент, $\beta' < \beta$, имеют мощность, не превосходящую \aleph_1 , то множество β -квазикомпонент имеет мощность либо континуальную, либо не превосходящую \aleph_1 .

Лемма 8. Множество β -квазикомпонент множества $E = \sum_{\gamma < \Omega} \mathcal{G}_\gamma$ имеет мощность либо континуальную, либо не превосходящую \aleph_1 .

Выясним вопрос о мощности множества K_E связанных компонент. Возможны два случая:

1) Одно из множеств K_E^β имеет мощность континуума. Тогда все множества $K_E^{\beta'}$, $\beta' > \beta$, и K_E имеют мощность континуума.

2) Все множества K_E^β имеют мощность, не превосходящую \aleph_1 . Тогда множество связанных компонент индекса β , как подмножество множества K_E^β , имеет мощность, не превосходящую \aleph_1 . Следовательно, множество всех связанных компонент имеет мощность, не превосходящую \aleph_1 .

Леммы 5, 6, 7 и 8 можно объединить следующей теоремой:

Теорема. Если множество представимо в виде $E = \sum_{\gamma < \Omega} \mathcal{G}_\gamma$, где \mathcal{G}_γ есть A -множество, то множества K_E^β β -квазикомпонент, $\beta < \Omega$, и множество связанных компонент имеют мощность либо континуальную, либо не превосходящую \aleph_1 .

Заметим, что эта теорема применима для проективных множеств класса A_2 .

6. Теорема. Из существования эффективного множества, имеющего \aleph_1 α -квазикомпонент, следует существование эффективного множества из \aleph_1 точки.

Доказательство. Каждому замкнутому множеству можно поставить в соответствие одну точку $x = \varphi(E)$ так, чтобы $\varphi(E_1) \neq \varphi(E_2)$ при $E_1 \neq E_2$. Для этого занумеруем в последовательность

$$g_1, g_2, \dots, g_n, \dots \quad (1)$$

множества базы пространства. Для замкнутого множества E запишем номера тех множеств g_n , для которых $g_n \cdot E = 0$, в последовательность

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

Эта последовательность есть точка бэровского пространства $x = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$. Положим $x = \varphi(E)$.

Пусть $E \subset K^n$, $E_\alpha, E_{\alpha'}$ — квазикомпоненты множества E . Так как множества $E_\alpha, E_{\alpha'}$ замкнуты в E , из $E_\alpha \neq E_{\alpha'}$ следует, что существует

точка $x \in E_{\alpha'}$ и $x \notin \bar{E}_{\alpha}$ (или $x \in E_{\alpha}$, $x \notin \bar{E}_{\alpha'}$), т. е. $\bar{E}_{\alpha} \neq \bar{E}_{\alpha'}$. Таким образом, функция $\varphi(E_{\alpha}) = \varphi(\bar{E}_{\alpha})$ однозначна и на разных квазикомпонентах принимает разные значения. Отсюда следует наша теорема.

7. Через L_E^{α} обозначим множество связанных компонент индекса α , через M_E^{α} — множество точек x индекса α , т. е. точек x , принадлежащих связанной компоненте индекса α . Тогда $E = \sum_{\alpha < \Omega} M_E^{\alpha}$.

Остается открытым вопрос о дескриптивной структуре множеств M_E^{α} даже для случая, когда E есть B -множество. Вопрос о мощности точечных 1-квазикомпонент для B -множеств также не разрешен.

Теорема. Если E есть множество типа F_{σ} , то множество точечных 1-квазикомпонент есть B -множество.

Доказательство. Возьмем множества, стоящие в правой части формул (3) § 2 п. 1, предполагая, что E лежит на плоскости XOY . В пространстве $OXYZ$ построим следующие множества

$$E_1^1 \times \delta_1, \quad E_2^1 \times \delta_2,$$

$$E_{11}^2 \times \delta_{11}, \quad E_{12}^2 \times \delta_{12}, \quad E_{21}^2 \times \delta_{21}, \quad E_{22}^2 \times \delta_{22},$$

.....

$$E_{i_1 i_2 \dots i_n}^n \times \delta_{i_1 \dots i_n} \quad (i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2).$$

Пусть

$$S_1 = \sum_{i=1}^2 E_i^1 \times \delta_i = E_1^1 \times \delta_1 + E_2^1 \times \delta_2,$$

$$S_n = \sum_{i_1, \dots, i_n} E_{i_1 i_2 \dots i_n}^n \times \delta_{i_1 \dots i_n},$$

где $\delta_{i_1 \dots i_n}$ — бэровский интервал на OZ . Тогда $S = \prod_{n=1}^{\infty} S_n$ есть B -множество, пересекающееся с плоскостями P_z , параллельными к OXY , по множествам типа F_{σ} . Очевидно, что каждое такое пересечение есть 1-квазикомпонента множества E , и каждая квазикомпонента множества E получается таким образом.

По теореме В. Я. Арсенина [7] проекция множества S на ось OZ есть B -множество.

Из теоремы Арсенина следует

Лемма 9. Если множество E пересекается с прямыми D_x^y , параллельными оси OY , по множествам типа F_{σ} , то множество E' тех точек x , для которых $D_x^y \cdot E$ содержит одну единственную точку, есть B -множество. Множество точек из E , лежащих над множеством E' , есть также B -множество.

Применяя эту лемму к множеству S , мы убеждаемся, что множество точечных 1-квазикомпонент множества E есть B -множество.

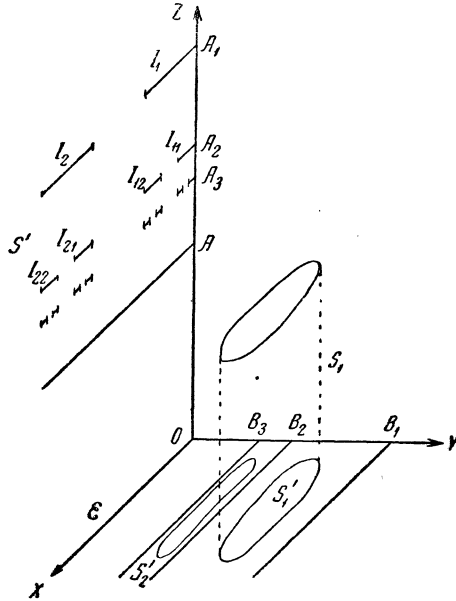
Пример 8. Множество типа G_{δ} , такое, что множество точечных 1-квазикомпонент есть CA -множество.

Возьмем на оси OZ последовательность точек (см. фиг. 2)

$$A_1 = \left(0, 0, 1 + \frac{1}{1}\right), \quad A_2 = \left(0, 0, 1 + \frac{1}{2}\right), \dots, \quad A_n = \left(0, 0, 1 + \frac{1}{n}\right), \dots$$

сходящуюся к точке $A = (0, 0, 1)$, и через них проведем прямые $D_{A_n}^x$, параллельные оси OX . На прямой $D_{A_1}^x$ возьмем сегменты

$$I_1 = \left[\left(0, 0, 2\right), \left(\frac{1}{3}, 0, 2\right) \right], \quad I_2 = \left[\left(\frac{2}{3}, 0, 2\right), (1, 0, 2) \right].$$



Фиг. 2

Каждый из этих сегментов разобьем на три равные части и выбросим средний интервал. Оставшиеся сегменты обозначим через $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$ и поместим на прямой $D_{A_1}^x$. Проведем это построение для всех n и получим счетное множество сегментов. Сумму всех этих сегментов обозначим через S' :

$$S' = \sum_{i_1, \dots, i_k} I_{i_1 i_2 \dots i_k} \quad (i_1, \dots, i_k, \dots = 1, 2).$$

Суммирование берется по всем конечным комбинациям из 1, 2. Тогда $D_A^x \cdot S' = 0$, а $D_A^x \cdot S'$ есть совершенное канторово множество \mathcal{C} , лежащее на D_A^x .

На оси OX возьмем множество \mathcal{C} и A -множество E , лежащее в \mathcal{C} : $E \subset \mathcal{C}$. На оси OY возьмем точки

$$B_1 = (0, 1, 0), \quad B_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \dots, \quad B_n = \left(0, \frac{1}{n}, 0\right), \dots$$

и через них проведем прямые $D_{B_n}^x$, параллельные оси OX . Полоску, ограниченную прямыми D_A^x, D_B^x , обозначим через P_{AB}^x . В полоске P_{B_1, B_2}^x возьмем множество S'_1 типа G_δ , такое, что проекция S'_1 на ось OX есть E . В полоске P_{B_{n-1}, B_n}^x возьмем множество S'_{n-1} типа G_δ , такое, что проекция S'_{n-1} на OX есть E . Через S_{n-1} обозначим множество тех точек (x, y, z) , для которых $0 \leq z \leq 1$ и $(x, y, 0) \in S'_{n-1}$. Через S обозначим множество тех точек (x, y, z) , для которых $0 \leq y \leq 1, (x, 0, z) \in S'$. Тогда множество $S + \sum_{n=1}^{\infty} S_n + \mathcal{G}$ есть множество типа G_δ . Из конструкции видно, что его точечными 1-квазикомпонентами являются точки CA -множества $\mathcal{G} - E$.

§ 3

1. Возникает вопрос: всякое ли плоское множество является 1-квазикомпонентой другого множества?

Лемма 1. *Всякое плоское множество \mathcal{G} является α -квазикомпонентой другого множества \mathcal{G}' , $\mathcal{G}' \subset R^3$.*

Доказательство. Пусть множество \mathcal{G} лежит в плоскости XOZ . На оси OY возьмем последовательность точек $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, y_n > y_{n+1}$, сходящуюся к точке O . Через точки $(0, y_n, 0)$ проведем плоскости P_{y_n} , параллельные осям OX и OZ . Получаем множество

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{y_n}.$$

Легко заметить, что \mathcal{G} есть 1-квазикомпонента множества \mathcal{G}' .

Между плоскостями P_{y_n} и $P_{y_{n+1}}$ поместим множество \mathcal{G}_n (пример 2), имеющее две квазикомпоненты $E_1^{\alpha_n}$ и $E_2^{\alpha_n}$ индекса α_n . $E_1^{\alpha_n}$ соединим дугой d_1^n с P_{y_n} , $E_2^{\alpha_n}$ соединим дугой d_2^n с $P_{y_{n+1}}$. Получим множество

$$\mathcal{G}'' = \mathcal{G}' + \sum_{n=1}^{\infty} (d_1^n + d_2^n + \mathcal{G}_n).$$

Подбирая соответствующим образом α_n ($n = 1, 2, \dots$), можно добиться того, чтобы множество \mathcal{G} было квазикомпонентой множества \mathcal{G}'' при любом $\alpha, \alpha < \Omega$.

2. Рассмотрим плоское множество \mathcal{G}' . Оказывается, не всякое множество \mathcal{G} есть 1-квазикомпонента другого плоского множества \mathcal{G}' . Это следует из замкнутости квазикомпоненты \mathcal{G} в \mathcal{G}' . Действительно если \mathcal{G} есть 1-квазикомпонента множества \mathcal{G}' , то $(\mathcal{G}' - \mathcal{G}) \cdot \overline{\mathcal{G}} = 0$ или $\mathcal{G}' - \mathcal{G} \subset C\overline{\mathcal{G}}$, и никакое всюду плотное множество $\mathcal{G}, \mathcal{G} = R^2$, не может быть квазикомпонентой другого плоского множества.

Определение 1. Множество

$$f, \mathcal{G} = \mathcal{G} \cdot \overline{(R^2 - \mathcal{G})}$$

назовем псевдограницей множества \mathcal{G} .

Определение 2. Множество \mathcal{G} связано со своей псевдо-границей, если

1) $f_r \mathcal{G} \neq 0$,

2) не существует такого разбиения $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$, $H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = 0$, что $f_r \mathcal{G} \subset \mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_1 \neq 0$, $\mathcal{G}_2 \neq 0$.

Лемма 2. Для того чтобы множество \mathcal{G} было квазикомпонентой множества \mathcal{G}' , необходимо, чтобы \mathcal{G} было связано с $f_r \mathcal{G} \neq 0$.

Доказательство. Пусть \mathcal{G} является 1-квазикомпонентой множества \mathcal{G}' . Допустим, что \mathcal{G} не связано с $f_r \mathcal{G}$, т. е. существует разбиение $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$, $H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = 0$, $f_r \mathcal{G} \subset \mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_1 \neq 0$, $\mathcal{G}_2 \neq 0$.

Рассмотрим разбиение $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_2 + (\mathcal{G}' - \mathcal{G}_2)$. Положим $\mathcal{G}'' \triangleq \mathcal{G}' - \mathcal{G}$. Тогда $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_2 + (\mathcal{G}'' + \mathcal{G}_1)$. Покажем, что

$$\mathcal{G}_2 \cdot \overline{(\mathcal{G}'' + \mathcal{G}_1)} = 0.$$

Имеем:

$$\mathcal{G}_2 \cdot \overline{(\mathcal{G}'' + \mathcal{G}_1)} = \mathcal{G}_2 \cdot \overline{\mathcal{G}''} + \mathcal{G}_2 \cdot \overline{\mathcal{G}_1}.$$

а) $\mathcal{G}_2 \cdot \overline{\mathcal{G}_1} = 0$, ибо $H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = 0$;

б) $\mathcal{G}_2 \cdot \overline{\mathcal{G}''} = \mathcal{G}_2 \cdot \overline{(\mathcal{G}' - \mathcal{G}_1)}$, но $\mathcal{G}' - \mathcal{G} = \mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}}$, ибо \mathcal{G} замкнуто в \mathcal{G}' ;

$$\overline{\mathcal{G}''} = \overline{(\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}})} = \overline{\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}}}, \quad \mathcal{G}_2 \cdot \overline{\mathcal{G}''} = \overline{(\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}})} \cdot \mathcal{G}_2,$$

$$\overline{(\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}})} \cdot \mathcal{G} = \overline{(\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}})} \cdot \mathcal{G}_1 + \overline{(\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}})} \cdot \mathcal{G}_2 \subset f_r \mathcal{G} \subset \mathcal{G}_1,$$

следовательно,

$$\overline{(\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}})} \cdot \mathcal{G}_2 = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_2 \cdot \overline{\mathcal{G}''} = 0.$$

Итак,

$$\mathcal{G}_2 \cdot \overline{(\mathcal{G}'' + \mathcal{G}_1)} = 0. \quad (1)$$

Покажем, что

$$\overline{\mathcal{G}_2} \cdot \overline{(\mathcal{G}'' + \mathcal{G}_1)} = \overline{\mathcal{G}_2} \cdot \overline{\mathcal{G}''} + \overline{\mathcal{G}_2} \cdot \overline{\mathcal{G}_1} = 0.$$

а) $\overline{\mathcal{G}_2} \cdot \overline{\mathcal{G}_1} = 0$, ибо $H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = 0$.

б) $\overline{\mathcal{G}_2} \cdot \overline{\mathcal{G}''} = \overline{\mathcal{G}_2} \cdot \overline{(\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}})} \subset \overline{\mathcal{G}} \cdot \overline{(\mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}})} = \overline{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{G}' - \overline{\mathcal{G}} \cdot \overline{\mathcal{G}} = 0$, ибо множество \mathcal{G} замкнуто в \mathcal{G}' .

Итак,

$$\overline{\mathcal{G}_2} \cdot \overline{(\mathcal{G}'' + \mathcal{G}_1)} = 0. \quad (2)$$

Из равенств (1), (2) мы получаем:

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G}_2 + (\mathcal{G}'' + \mathcal{G}_1), \quad H(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}'' + \mathcal{G}_1) = 0,$$

и множество $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ не является связным в \mathcal{G}' и не есть квазикомпонента. Наше допущение привело к противоречию.

Этот критерий не является достаточным, как показывает

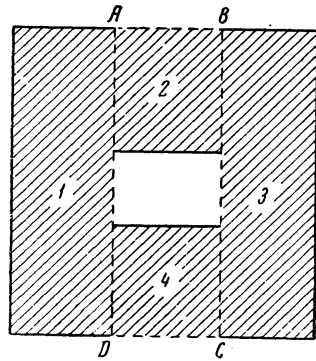
Пример 9. Множество \mathcal{G} состоит из внутренних точек четырех прямоугольников 1, 2, 3, 4, заштрихованных на чертеже (фиг. 3), и

тех частей их границ, которые изображены сплошными линиями. Границы, проведенные сплошными линиями, принадлежат множеству \mathcal{G} и образуют псевдограницу f, \mathcal{G} множества \mathcal{G} . Границы, проведенные пунктирными линиями, не принадлежат множеству \mathcal{G} . Множество \mathcal{G} связно с $f, \mathcal{G} \neq \emptyset$, но не является квазикомпонентой другого множества, ибо множество \mathcal{G} разбивается множеством $\mathcal{G}' = \mathcal{G} + (R^2 - \bar{\mathcal{G}})$, так как разложение $\mathcal{G}' = Q + (R^2 - \bar{Q})$, где Q есть открытый прямоугольник $ABCD$, является разбиением множества \mathcal{G} , и множество \mathcal{G} не является связным ни в каком множестве E , которое удовлетворяет условиям:

$$\mathcal{G} \subset E \subset R^2, \quad E - \mathcal{G} \subset \bar{E}.$$

Этот критерий дает возможность построить примеры множеств, не являющихся квазикомпонентой другого множества. Для этого нужно из любого несвязного множества выбросить его псевдограницу; тогда остаток обладает требуемым свойством.

3. Свойство несвязного множества \mathcal{G} быть квазикомпонентой другого множества \mathcal{G}' , $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}' \subset R^2$, не является топологическим инвариантом. Это видно из следующего примера.



Фиг. 3

Пусть \mathcal{G} — множество, состоящее из внутренних точек круга и одной точки окружности. Это множество является 1-квазикомпонентой другого плоского множества. Множество \mathcal{G}' , состоящее из центра и внутренних точек круга, не лежащих на одном определенном радиусе, является гомеоморфом множества \mathcal{G} . Легко заметить, что множество \mathcal{G}' не является квазикомпонентой плоского множества.

Следовательно, в общем случае не существует внутреннего критерия того, что плоское множество является квазикомпонентой другого плоского множества, в то время как для локально компактных множеств наша теорема дает такой критерий.

4. Пусть даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n на плоскости. Множество точек, лежащих на сегментах $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, назовем незамкнутой ломаной, если $A_1 \neq A_n$.

Точку A назовем точкой самопересечения ломаной L , если существуют сегменты A_kA_{k+1}, A_lA_{l+1} , содержащие точку A .

Приведем несколько известных лемм без доказательства.

Лемма 3. Если O есть связное открытое множество, то любые две точки из O могут быть соединены ломаной линией L с конечным числом звеньев, состоящей из одних лишь точек этого множества.

Лемма 4. Какова бы ни была незамкнутая ломаная L без точек самопересечения, лежащая в связном открытом множестве O , всегда можно построить ограниченное открытое множество O_1 , обладающее следующими свойствами: 1) $L \subset O_1$, 2) $\bar{O}_1 \subset O$,

3) граница множества O_1 есть многоугольник, 4) $O - \bar{O}_1$ есть связанное открытое множество.

Лемма 5. Если точки A_1, A_2, \dots, A_n лежат в открытом связанном множестве O , то можно построить незамкнутую ломаную L без точек самопересечения, проходящую через точки A_1, A_2, \dots, A_n и принадлежащую O .

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 6. Пусть O является связным открытым множеством, граница которого есть ограниченное множество. Тогда существует такая последовательность замкнутых множеств

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots,$$

лежащих в O и попарно без общих точек, что $\bar{P} \supset f_r O$, где $P = \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}$ для любой бесконечной подпоследовательности множеств $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_k}, \dots$.

Доказательство. В каждой точке x , $x \in f_r O$ опишем сферу $S^1(x)$ радиуса 1. По лемме Бореля существует конечное число сфер $S^1(x_1^1), S^1(x_2^1), \dots, S^1(x_{n_1}^1)$, покрывающих множество $f_r O$. Возьмем точки $y_1^1, y_2^1, \dots, y_{n_1}^1$ так, что $y_i^1 \in S^1(x_i^1) \cdot O$. Для любой точки x из $f_r O$ существуют точки y_i^1 , для которых $\rho(x, y_i^1) < 1$. По лемме 5 все точки y_i^1 ($i = 1, 2, \dots, n_1$) лежат на незамкнутой ломаной L_1 без точек самопересечения. По лемме 4 существует открытое множество O'_1 , такое, что $L_1 \subset O'_1 \subset \bar{O}'_1 \subset O$ и $O_1 = O - \bar{O}'_1$ есть связанное открытое множество.

В каждой точке x , $x \in f_r O$, опишем сферу $S^2(x)$ радиуса ε_2 , где $\varepsilon_2 < \min \left\{ \frac{1}{2}, \rho(f_r O, \bar{O}'_1) \right\}$. По лемме Бореля выделим конечное покрытие

$$S^2(x_1^2), S^2(x_2^2), \dots, S^2(x_{n_2}^2)$$

множества $f_r O$. Возьмем точки $y_1^2, y_2^2, \dots, y_{n_2}^2$ так, что $y_i^2 \in S^2(x_i^2) \cdot O_1$. Тогда для каждой точки $x \in f_r O$ существует точка y_i^2 , для которой $\rho(y_i^2, x) < \varepsilon_2$. По лемме 5 построим незамкнутую ломаную L_2 без точек самопересечения, проходящую через точки y_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n_2$) и лежащую в O_1 . По лемме 4 построим такое открытое множество O'_2 , что $L_2 \subset O'_2 \subset \bar{O}'_2 \subset O_1$ и $O_2 = O_1 - \bar{O}'_2$ есть связанное множество.

Проделаем это построение для всех n , мы получим такую последовательность ломаных линий $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$, что $L_n \subset O$, $L_n \cdot L_m = 0$ при $n \neq m$ и для любой точки x , $x \in f_r O$, найдется точка y_i^n из L_n , для которой $\rho(y_i^n, x) < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$.

Определение 3. Пусть G — произвольное множество и множество $R - \bar{G}$ содержит счетное число компонент, являющихся открытыми множествами

$$g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$$

Скажем, что g_n связно с \mathcal{C} , если $\overline{g_n} \cdot \mathcal{C} \neq 0$, и g_n не связно с \mathcal{C} , если $\overline{g_n} \cdot \mathcal{C} = 0$.

Положим $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} + C\overline{\mathcal{C}}$. Докажем следующую теорему:

Теорема. Для того чтобы ограниченное множество \mathcal{C} было 1-квазикомпонентой другого плоского множества \mathcal{C}' , необходимо и достаточно, чтобы \mathcal{C} не разбивалось множеством \mathcal{C}^ .*

Доказательство. Достаточность. Пусть \mathcal{C} не разбивается множеством \mathcal{C}^* . Для каждого n положим $E_n = \sum_{i=1}^{\infty} L_i^n$, причем L_i^n — ломаная, $L_i^n \subset g_n$ и $\overline{E_n} \supset f_r g_n$.

Покажем, что в множестве $\mathcal{C}' = \mathcal{C} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ наше множество \mathcal{C} будет 1-квазикомпонентой.

А) \mathcal{C} не разбивается множеством \mathcal{C}' .

Допустим, наоборот, что существует разбиение

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' &= \mathcal{C}'_1 + \mathcal{C}'_2, & H(\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2) &= 0, & \mathcal{C}_1 &= \mathcal{C}'_1 \cdot \mathcal{C} \neq 0 \neq \mathcal{C}'_2 \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}_2, \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2, & H(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда существуют такие открытые множества G_1, G_2 , что

$$G_1 \cdot G_2 = 0, \quad G_1 + G_2 \supset \mathcal{C}', \quad \mathcal{C}'_1 \subset G_1, \quad \mathcal{C}'_2 \subset G_2.$$

Множества G_1, G_2 распадаются на свои компоненты: h_i^1, h_i^2 ($i=1, 2, \dots$), т. е.

$$G_1 = h_1^1 + h_2^1 + \dots + h_i^1 + \dots, \quad G_2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_i^2 + \dots.$$

Можно предположить, что каждая компонента h_i^1, h_i^2 содержит точки из \mathcal{C}' .

Для каждого множества g_n возможны два случая:

1) g_n пересекается только с одним из множеств G_1, G_2 ,

2) g_n пересекается с каждым из множеств G_1, G_2 .

В первом случае множество $E_n, E_n \subset g_n$, принадлежит одному из G_1, G_2 .

Во втором случае мы имеем две возможности:

а) Все ломаные L_i^n , начиная с некоторого номера i , лежат в G_1 (или G_2) и только конечное число L_i^n — в G_2 (G_1). Тогда найдутся компоненты h_i^2 , содержащие это конечное число ломаных и содержащиеся в g_n . Мы можем выбросить все эти компоненты h_i^2 из G_2 и ломаные из E_n и добиться того, чтобы множество g_n пересекалось с G_1 и не пересекалось с G_2 .

б) Как в G_1 , так и в G_2 лежит бесконечное число ломаных L_i^n . Пусть ломаные $L_{i_1}^n, L_{i_2}^n, \dots, L_{i_n}^n, \dots$ лежат в G_1 , а остальные: $L_{j_1}^n, L_{j_2}^n, \dots, L_{j_n}^n, \dots$ лежат в G_2 . Тогда найдутся компоненты $h_{i_k}^1$, содержащие $L_{i_k}^n$ и лежащие в g_n , и $h_{j_k}^2$, содержащие $L_{j_k}^n$ и лежащие в g_n . Мы можем из множества E_n выбросить все $L_{j_k}^n$, из G_2 выбросить все $h_{j_k}^2$ и добиться того, чтобы множество g_n пересекалось только с G_1 . Следовательно, мы можем предположить, что каждое множество g_n пересекается только с одним из множеств G_1, G_2 . Пусть

$$H_1 = G_1 + \sum_{g_n \cdot G_1 \neq 0} g_n, \quad H_2 = G_2 + \sum_{g_n \cdot G_2 \neq 0} g_n.$$

Очевидно, $H_1 \cdot H_2 = 0$, $H_1 + H_2 \supset \mathcal{G}^*$. Мы получили разбиение множества \mathcal{G}^* , противоречащее условию леммы. Следовательно, наше допущение неверно, и \mathcal{G} не разбивается множеством \mathcal{G}' .

В) Если из множества E_n выбросить какую-нибудь ломаную L_i^n , то останется одновременно открытое и замкнутое в \mathcal{G}' множество. Выбрасывая все ломаные L_i^n по одной и пересекая полученные множества, мы будем иметь в пересечении множество \mathcal{G} .

Из пунктов А) и В) следует наше утверждение: \mathcal{G} есть 1-квази-компонента множества \mathcal{G}' .

Необходимость. Пусть \mathcal{G} разбивается множеством \mathcal{G}^* , т. е. существует разбиение $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_1^* + \mathcal{G}_2^*$, $H(\mathcal{G}_1^*, \mathcal{G}_2^*) = 0$, при котором $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1^* \cdot \mathcal{G} \neq 0$, $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2^* \cdot \mathcal{G} \neq 0$. Тогда всякое множество \mathcal{G}' , удовлетворяющее условиям: 1) $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$ и 2) $\mathcal{G}' - \mathcal{G} \subset C\mathcal{G}$, разбивается на сумму

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G}' \cdot \mathcal{G}_1^* + \mathcal{G}' \cdot \mathcal{G}_2^* = \mathcal{G}'_1 + \mathcal{G}'_2, \quad H(\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}'_2) = 0,$$

и

$$\mathcal{G}'_1 \cdot \mathcal{G} \neq 0 \neq \mathcal{G}'_2 \cdot \mathcal{G}.$$

Следовательно, множество \mathcal{G} разбивается множеством \mathcal{G}' и не является квазикомпонентой множества \mathcal{G}' .

Следствие. Всякое замкнутое множество \mathcal{G} является квази-компонентой.

Доказательство. Каждое множество g_n связано с \mathcal{G} , и множество \mathcal{G}^* совпадает со своей плоскостью.

Наша теорема имеет место и для неограниченных множеств и доказывается приведенным выше способом. Для простоты изложения мы провели доказательство для случая ограниченных множеств.

Из рассуждений п. 1 § 3 следует, что всякое множество, являющееся 1-квазикомпонентой, будет при любом $\alpha < \Omega$ квазикомпонентой другого множества.

(Поступило в редакцию 1/XI 1947 г.)

Литература

1. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.
2. П. С. Новиков, О мощности множества связанных компонент A -множества, ДАН, LVI, № 8 (1947), 787—790.
3. N. N. Luzin, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, 1930.
4. W. Sierpiński, Sur les ensembles connexes et non connexes, Fund. Math., II (1921), 81—85.
5. S. Mazurkiewicz, Sur un ensemble G_δ punctiforme, qui n'est pas homéomorphe avec aucun ensemble linéaire, Fund. Math., I (1920), 61—81.
6. В. Кнастер и С. Куратовский, Sur les ensembles connexes, Fund. Math., II (1921), 205—255.
7. В. Я. Арсенин, Природа проекций некоторых B -множеств, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, № 4—5 (1940), 403—410.