

**Об антипроксиминальных выпуклых замкнутых радиально ограниченных множествах в пространстве  $l_1$**

**В. С. Балаганский**

Непустое замкнутое подмножество  $A \neq X$  банахова пространства  $X$  называется *антипроксиминальным*, если для любой точки  $x \in X \setminus A$  в множестве  $A$  нет ближайшей точки ( $P_M(x) = \emptyset$ ).

Множество  $0 \in M \subset X$  называется *радиально ограниченным*, если для любого  $x \in X, \|x\| = 1$ , найдется число  $r > 0$  такое, что  $r_1x, -r_1x \notin M$  для любого  $r_1 \geq r$ .

Кобзаш [1] доказал, что в  $L_1(S, \Sigma, \mu)$ , где мера  $\mu$  имеет атом, нет выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множеств.

Несколькими авторами [2], [3] доказано, что в банаховом пространстве  $X$ , удовлетворяющем условию Радона–Никодима, не существует выпуклого ограниченного замкнутого множества, которое является антипроксиминальным множеством для  $X$ . В [4] от условия выпуклости множества удалось отказаться. В настоящей работе показано, что при замене ограниченности на радиальную ограниченность утверждение перестает быть верным.

В работе применяются следующие обозначения:

- $X$  – вещественное банахово пространство,
- $\mathcal{F}(X)$  – семейство непустых замкнутых множеств пространства  $X$ .

Для  $x, y \in X, M \in \mathcal{F}(X)$  полагаем

- $P_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}\}$ ,
- $\mathbb{B}(X) = \{z \in X : \|x - z\| \leq 1\}$  – единичный шар в  $X$ ,
- $\mathbb{S}(X) = \{z \in X : \|x - z\| = 1\}$  – единичная сфера в  $X$ ,
- $\text{conv } M$  – выпуклая оболочка множества  $M$ ,  $\overline{\text{conv}} M$  – замкнутая выпуклая оболочка множества  $M$ ,  $\Sigma(M) = \{f \in X^* \setminus \{0\} : \exists x \in M f(x) = \sup\{f(z) : z \in M\}\}$ .

Для  $f \in l_\infty \setminus \{0\}$  введем обозначение  $\text{crit } f = \{n \in \mathbb{N} : |f_n| = \|f\|\}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеем  $\Sigma(\mathbb{B}(l_1)) = \{f \in l_\infty \setminus \{0\} : \text{crit } f \neq \emptyset\}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть  $M$  – непустое компактное подмножество банахова пространства  $X$  и  $\mu$  – вероятностная мера на  $M$  (т.е. неотрицательная регулярная борелевская мера на  $M$  и  $\mu(M) = 1$ ). Говорят, что точка  $x$  из  $E$  *представлена посредством  $\mu$* , если  $f(x) = \int_M f d\mu$  для любого непрерывного линейного функционала  $f$  на  $M$ .

Пусть  $\mu$  – неотрицательная регулярная борелевская мера на компактном хаусдорфовом пространстве  $M$ , а  $\mathbf{S}$  – такое борелевское подмножество  $M$ , что  $\mu(M \setminus \mathbf{S}) = 0$ . В этом случае мы будем говорить, что  $\mu$  *сосредоточена на  $\mathbf{S}$*  и что  $\mathbf{S}$  есть носитель меры  $\mu$  ( $\mathbf{S} = \text{supp } \mu$ ).

Точка  $x$  выпуклого замкнутого множества  $K$  называется *экстремальной*, если из условий  $x_1, x_2 \in K, x = (x_1 + x_2)/2$  следует, что  $x = x_1 = x_2$ .

Для дальнейшей работы нам потребуются следующая лемма и теорема (Шоке).

ЛЕММА А [5]. Пусть  $X$  – банахово пространство,  $A \in \mathcal{F}(X)$  выпукло,  $A \neq X$ . Тогда антипроксиминальность множества  $A$  эквивалентна условию  $\Sigma(A) \cap \Sigma(\mathbb{B}(X)) = \{\emptyset\}$ .

ТЕОРЕМА А [6; с.25]. Предположим, что  $M$  – метризуемое компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства  $X$  и  $x_0$  – элемент  $M$ . Тогда существует вероятностная мера  $\mu$  на  $M$ , представляющая  $x_0$  и сосредоточенная на экстремальных точках  $M$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00320) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1071.2008.1).

Нам потребуются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^+ &= \left(1, 2 - \frac{1}{2}, \dots, 2 - \frac{1}{n}, \dots\right), & \mathbf{e}^- &= -\mathbf{e}^+, \\ \tilde{\mathbf{e}}_n^+ &= \left(1, 2 - \frac{1}{2}, \dots, 2 - \frac{1}{n-1}, \underbrace{0}_{\text{на } n\text{-м месте}}, 2 - \frac{1}{n+1}, \dots\right), & \mathbf{e}_n^+ &= \frac{\tilde{\mathbf{e}}_n^+}{n}, \\ \tilde{\mathbf{e}}_n^- &= \left(-1, -2 + \frac{1}{2}, \dots, -2 + \frac{1}{n-1}, \underbrace{2 - \frac{1}{n}}_{\text{на } n\text{-м месте}}, 2 - \frac{1}{n+1}, \dots\right), & \mathbf{e}_n^- &= \frac{\tilde{\mathbf{e}}_n^-}{n}, \\ N^+ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{e}_n^+\}, \quad N^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{e}_n^-\}, \quad N = \{0\} \cup N^+ \cup N^-, \\ D^+ &= \text{conv } N^+, \quad D^- = \text{conv } N^-, \\ A &= \overline{\text{conv}}(D^+ \cup D^-), \quad M = \{x \in l_1 : f(x) \leq 1 \forall f \in A\}. \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА.** *Множество  $M$  выпукло, замкнуто, радиально ограничено и антипроксиминально в  $X = l_1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нетрудно заметить, что множества  $N$  и  $A$  компактны по норме пространства  $l_\infty$ . Следовательно, множество  $A$   $w^*$ -замкнуто в  $X^*$ . Тогда по теореме о биполяре множество  $A$  является полярой к выпуклому, замкнутому в  $l_1$  множеству  $M$ .

Множество  $A$  компактно и является выпуклой замкнутой оболочкой компактного множества  $N$ ; тогда, как известно (см., например, [7; с. 89]) все экстремальные точки множества  $A$  принадлежат  $N$ .

Докажем, что множество  $M$  радиально ограничено. Так как  $A$  полярна к  $M$ , достаточно доказать, что для любого элемента  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_1 \setminus \{0\}$  справедливо неравенство

$$\sup \left\{ \langle x, f \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n : f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots) \in A \right\} > 0. \quad (1)$$

Если  $\langle x, \mathbf{e}^+ \rangle \geq \varepsilon > 0$ , то в силу слабой сходимости  $\tilde{\mathbf{e}}_n^+ \xrightarrow{w^*} \mathbf{e}^+$  найдется номер  $n$  такой, что справедливо неравенство  $\langle x, \tilde{\mathbf{e}}_n^+ \rangle \geq \varepsilon/2 > 0$ ; тогда  $\langle x, \mathbf{e}_n^+ \rangle \geq \varepsilon/2n > 0$  и неравенство (1) доказано. Аналогично, если  $\langle x, \mathbf{e}^- \rangle \geq \varepsilon > 0$ , то справедливо неравенство (1). Остался случай, когда  $\langle x, \mathbf{e}^+ \rangle = \langle x, \mathbf{e}^- \rangle = 0$ . Так как  $x \neq 0$ ,  $\langle x, \mathbf{e}^+ \rangle = 0$ , найдется номер  $k$  такой, что  $x_k < 0$ . Тогда  $\langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle > 0$ , неравенство (1) доказано и множество  $M$  радиально ограничено.

Докажем, что множество  $M$  антипроксиминально. В силу леммы А и замечания достаточно доказать, что для любого элемента  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_1 \setminus \{0\}$ , для любого элемента  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots) \in A$  таких, что справедливо равенство  $\langle x, f \rangle = \sup \{ \langle x, g \rangle : g \in A \}$ , выполняется соотношение  $\text{crit } f = \emptyset$ . Рассматривая  $x$  как элемент второго сопряженного пространства  $(l_1)''$ , получаем, что  $x$  — линейный непрерывный функционал на  $l_\infty$ . По теореме А найдется вероятностная мера  $\mu$ , представляющая  $x$ , носитель которой принадлежит множеству экстремальных точек. По доказанному ранее множество экстремальных точек множества  $A$  принадлежит  $N$ ; следовательно,  $\text{supp } \mu \subset N$ . Так как множество  $N$  имеет единственную предельную точку, то

$$\mu = \rho_0 \delta_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^1 \delta_{\{\mathbf{e}_k^+\}} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \delta_{\{\mathbf{e}_k^-\}},$$

где  $\rho_0 \geq 0$ ,  $\rho_k^1 \geq 0$ ,  $\rho_k^2 \geq 0$  при  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 = 1$ ,  $\delta_{\{\cdot\}}$  — точечная мера Дирака.

Имеем

$$\sup\{\langle x, g \rangle\} = \langle x, f \rangle = \int_A x \, d\mu = \int_N x \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^1 \langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \langle x, \mathbf{e}_k^- \rangle.$$

Поскольку  $\langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle \rightarrow 0$ ,  $\langle x, \mathbf{e}_k^- \rangle \rightarrow 0$ ,  $\langle x, f \rangle = \sup\{\langle x, g \rangle : g \in A\} > 0$ , найдутся номер  $k_0$  и число  $\varepsilon > 0$  такие, что при  $k > k_0$  справедливы неравенства  $\langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle + \varepsilon < \langle x, f \rangle$ ,  $\langle x, \mathbf{e}_k^- \rangle + \varepsilon < \langle x, f \rangle$ .

Следовательно, справедливы равенства

$$\langle x, f \rangle = \sum_{k=1}^{k_0} \rho_k^1 \langle x, \mathbf{e}_k^+ \rangle + \sum_{k=1}^{k_0} \rho_k^2 \langle x, \mathbf{e}_k^- \rangle, \quad f = \sum_{k=1}^{k_0} \rho_k^1 \mathbf{e}_k^+ + \sum_{k=1}^{k_0} \rho_k^2 \mathbf{e}_k^-,$$

где

$$\rho_k^1 \geq 0, \quad \rho_k^2 \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n_0} \rho_k^1 + \sum_{k=1}^{n_0} \rho_k^2 = 1.$$

В силу определения элементов  $\mathbf{e}_k^+$  и  $\mathbf{e}_k^-$  получаем следующие соотношения:

а) при  $n > k_0$

$$|f_n| = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k};$$

б) при  $n = k_0$

$$|f_n| = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left| \frac{\rho_n^2}{n} + \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k} \right| \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left| \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k} \right|;$$

в) при  $n < k_0$

$$|f_n| = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left| \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1}{k} - \frac{\rho_n^1}{n} - \sum_{k=n}^{k_0} \frac{\rho_k^2}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho_k^2}{k} \right| \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k}.$$

Из соотношений а), б) и в) получаем, что

$$|f_n| < 2 \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| = 2 \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\rho_k^1 + \rho_k^2}{k};$$

следовательно,  $\text{crit } f = \emptyset$  и  $M$  антипроксимinallyно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что пространство  $l_1$  удовлетворяет условию Радона–Никодима, в частности, по теореме Данфорда–Петтиса (см., например, [8; с. 174]) это следует из того, что  $l_1$  – сопряженное, сепарабельное пространство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Cobzaş, *Math. Balkanica*, **4** (1974), 79–82. [2] M. Edelstein, *J. Approx. Theory*, **18**:1 (1976), 1–8. [3] J. Borwein, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **73**:1 (1981), 5–8. [4] В. С. Балаганский, *Матем. заметки*, **60**:5 (1996), 643–657. [5] M. Edelstein, A. C. Thompson, *Pacific J. Math.*, **40**:3 (1972), 553–560. [6] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968. [7] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971. [8] Д. Дистель, *Геометрия банаховых пространств. Избранные главы*, Вища школа, Киев, 1980.

**В. С. Балаганский**

Институт математики и механики УрО РАН

E-mail: Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Поступило

07.04.2008